A.I. KITAIGORODSKI

INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA

A.I. KITAIGORODSKI

INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA

INDICE

11. ENTROPÍA

12. TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES

13. PROCESOS DA TRANSICIÓN AL ESTADO DE EQUILIBRIO

PARTE II

CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

14. CAMPO ELÉCTRICO

19. PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

20. FENÓMENOS DE INTERFERENCIA

21. DISPERSIÓN

22. DIFRACCIÓN DE LOS RAYOS X POR UN CRISTAL

23. DOBLE REFRACCIÓN

24. TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

36. MATERIALES MAGNÉTICOS

37. ESTRUCTURA ELECTRONICA Y PROPIEDADES DE LOS CUERPOS

PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN

A la primera edición de este libro le siguieron dos ediciones en inglés y otras dos en polaco. Muchos centros de enseñanza (en su mayoría extranjeros) han considerado que los principios básicos de este libro coinciden con los suyos propios. Me limitaré aquí a enumerar estas ideas fundamentales. Son éstas la falta de detalles y de descripciones de experimentos, la exposición deductiva de la teoría, la exclusión de la historiología y la renuncia absoluta a repetir el material que se estudia en las escuelas de enseñanza media. Al mismo tiempo he considerado imposible la omisión de cuestiones más complicadas, porque creo que una mención, siquiera fugaz, de muchos problemas que preocupan hoy a los físicos es necesaria, aunque no sea más que para dar al lector noticia de su existencia. Esta circunstancia dio motivo a que un colega, al que quiero y respeto, llamase a esta obra «Física a vista de pájaro». Yo acepto esta apreciación, con su algo de doble sentido, como un halago. Es natural que al hacer una exposición sucinta se pierden detalles, pero si el autor ha logrado dar unos contornos bien definidos al edificio esbelto y elegante de la física, puede dar por cumplida su tarea.

A. Kitaigorodski

I

MOVIMIENTO MECÁNICO Y TÉRMICO

1

LEY FUNDAMENTAL DE LA MECÁNICA

§ 1. *Cinemática*

ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DE UN PUNTO MATERIAL. Si las dimensiones y forma de un cuerpo carecen de importancia al estudiar un fenómeno, este cuerpo se sustituye mentalmente por un punto. La representación aproximada de un cuerpo por un punto material (es decir, que posee masa) es justa no sólo en los casos en que las dimensiones del cuerpo son pequeñas comparadas con otras dimensiones que figuran en el problema, sino también en todos aquellos en que interese conocer únicamente el movimiento del centro de gravedad del cuerpo.

Para describir el movimiento de un punto material hay que indicar en qué lugares del espacio estuvo dicho punto y en qué instantes pasó por unos puntos determinados de la trayectoria. Con este objeto es necesario ante todo elegir un sistema de coordenadas de referencia (fig. 1). La situación del punto con respecto a este sistema, que suele elegirse rectangular por ser más sencillo, se caracteriza por tres coordenadas x, y, z o por el llamado radio vector o vector de posición $\boldsymbol{r}$ trazado desde el origen de referencia al punto dado *) (fig. 2).

*) El radio vector $\boldsymbol{r}$ viene dado por su magnitud, igual a $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, y por los ángulos que forma con los ejes de coordenadas: $\cos\alpha=x/r$, $\cos\beta=y/r$ y $\cos\gamma=z/r$. De este modo, para conocer el radio vector $\boldsymbol{r}$ hay que disponer de tres números que pueden ser: x, y, z o r, α, β o r, α, γ, etc. (dos ángulos definen el tercero, puesto que $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$).

El resultado de la investigación del movimiento puede darse, por lo tanto, aproximadamente, en forma de tabla de los valores de $\boldsymbol{r}$ (con tres números para cada valor) correspondientes a los instantes t_1, t_2, etc. o, exactamente, en forma de una función

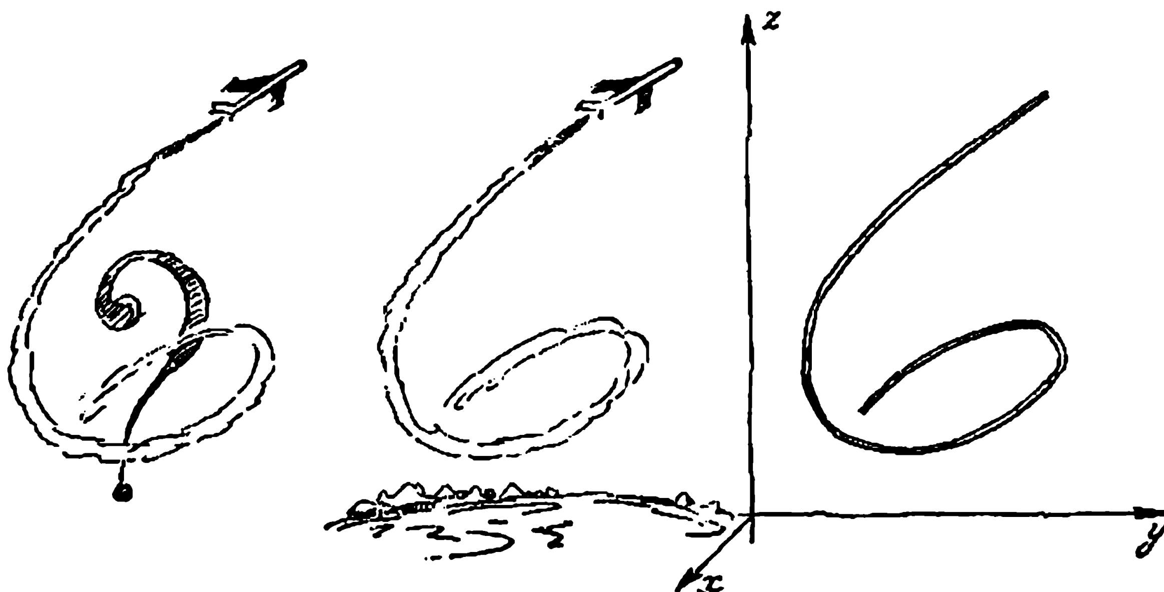


FIG. 1.

continua $\boldsymbol{r}=f(t)$ (en realidad en forma de tres funciones, por ejemplo, $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$ o $r=\varphi_1(t)$, $\alpha=\varphi_2(t)$, $\beta=\varphi_3(t)$, etc.).

La ecuación vectorial $\boldsymbol{r}=f(t)$ y las tres ecuaciones escalares quivalentes a ella se llaman *ecuaciones del movimiento*.

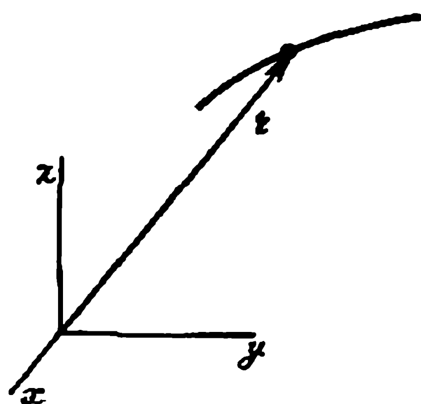


FIG. 2.

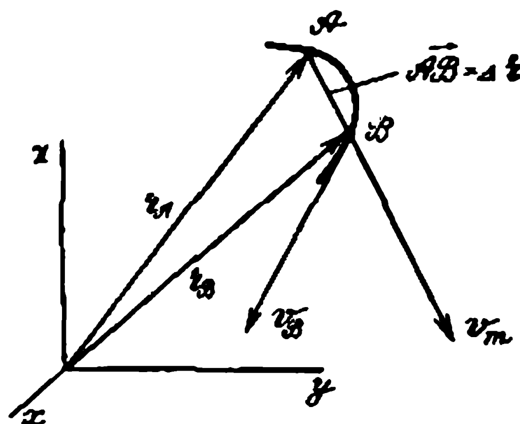


FIG. 3.

VELOCIDAD MEDIA. Consideremos un tramo de trayectoria AB. Supongamos que en un instante t el punto móvil se encontraba en A

y en el instante $t+\Delta t$, en el B (fig. 3). Tracemos los radios vectores $\boldsymbol{r}_A$ y $\boldsymbol{r}_B$. Sabemos que durante el tiempo Δt el punto se trasladó desde A hasta B. Es natural, pues, llamar al vector $\overrightarrow{AB}$ vector traslación del punto.

Los vectores se componen de acuerdo con la regla del paralelogramo. Observando la fig. 3 vemos que

$$\boldsymbol{r}_B=\boldsymbol{r}_A+\overrightarrow{AB}, \quad \text{o} \quad \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A=\Delta\boldsymbol{r},$$

es decir, el vector traslación del punto es la diferencia vectorial de los radios vectores. El valor del vector traslación $\Delta\boldsymbol{r}$ en el tiempo Δt determinará el movimiento curvilíneo con una exactitud tanto mayor cuanto menor sea $\Delta\boldsymbol{r}$.

La velocidad media en el tramo AB se acostumbra caracterizarla por la relación

$$v_m=\frac{AB}{\Delta t};$$

ésta es, por consiguiente, la velocidad a que el cuerpo recorrería el tramo AB con movimiento rectilíneo y uniforme en el tiempo Δt.

Así, pues, el movimiento en el tramo AB se puede caracterizar por la dirección del vector $\overrightarrow{AB}=\Delta\boldsymbol{r}$ y la magnitud de la velocidad v_m. En vez de esto se introduce el vector

$$\boldsymbol{v}_m=\frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t},$$

que es igual en longitud a la velocidad media y tiene la dirección del vector traslación. Ahora puede decirse que el movimiento del cuerpo en el tramo AB viene determinado por la velocidad vectorial media.

VELOCIDAD VERDADERA (INSTANTÁNEA). Si disminuimos el intervalo de tiempo Δt, el punto B se aproximará al A. Llegará un instante en que estos puntos se unan, convirtiéndose la dirección $\overrightarrow{AB}$ en línea tangente a la trayectoria en el punto en que se unen aquéllos.

Se puede afirmar que la relación $\overrightarrow{AB}/\Delta t$ tiende al límite cuando Δt disminuye. El vector $\boldsymbol{v}_{verd}$, que tiene dirección tangencial a la trayectoria del punto en el instante dado del movimiento y numéricamente es igual al límite de $AB/\Delta t$ si $\Delta t\to 0$, se llama *velocidad vectorial verdadera (instantánea)* del movimiento del punto:

$$\boldsymbol{v}_{verd}=\lim\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \text{ cuando } \Delta t\to 0.$$

En otras palabras, la velocidad verdadera (instantánea) es la derivada del vector $\boldsymbol{r}$ respecto del tiempo:

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

Subrayamos una vez más que para describir un movimiento no es obligatorio emplear vectores. En vez de utilizar el concepto de velocidad vectorial se puede hablar de valor numérico de la velocidad $\frac{|d\boldsymbol{r}|}{dt}$ *) e indicar la dirección del movimiento. Pero en este caso las mismas reglas y los mismos datos experimentales tienen que formularse mediante frases más largas. El idioma de los vectores concuerda con la experiencia física y, además, es conciso y expresivo. Claro está que para acostumbrarse a él hay que hacer cierto esfuerzo.

Como las proyecciones del vector $\boldsymbol{r}$ sobre los ejes de coordenadas son las coordenadas de su extremo x, y, z, las proyecciones de la velocidad vectorial serán iguales a

$$v_x=\frac{dx}{dt}, \qquad v_y=\frac{dy}{dt}, \qquad v_z=\frac{dz}{dt}.$$

ACELERACIÓN VECTORIAL. Prosiguiendo el estudio del movimiento curvilíneo, construyamos en forma de flechas las velocidades verdaderas del movimiento del cuerpo al pasar por los puntos A y B de su trayectoria. Si no hubiéramos introducido el concepto de velocidad vectorial tendríamos que decir así: la velocidad en B es distinta que en A y, además, varió la dirección del movimiento. Utilizando la velocidad vectorial diremos simplemente: en el punto B la velocidad vectorial es distinta que en A.

La velocidad vectorial puede variar en magnitud y en dirección.

Si el tramo AB es rectilíneo, los vectores $\boldsymbol{v}_A$ y $\boldsymbol{v}_B$ tendrán la misma dirección. La magnitud de la variación de la velocidad se halla en este caso restando aritméticamente la longitud del vector $\boldsymbol{v}_A$ de la del vector $\boldsymbol{v}_B$.

Consideremos un tramo rectilíneo AB; los vectores $\boldsymbol{v}_A$ y $\boldsymbol{v}_B$ difieren ahora tanto en magnitud como en dirección. Para determinar cuánto aumentó *la magnitud* de la velocidad hay que restar, como antes, la longitud del vector $\boldsymbol{v}_A$ de la del $\boldsymbol{v}_B$:

$$\Delta|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{v}_B|-|\boldsymbol{v}_A|.$$

Sin embargo, este número no caracteriza completamente las variaciones ocurridas en el movimiento.

*) Las líneas verticales | | significan que sólo se tiene en cuenta el valor numérico (módulo) de la magnitud vectorial encerrada entre ellas.

Restemos ahora el vector v_A del v_B según las reglas de operaciones con vectores. En la fig. 4 se muestra el vector

$$\Delta v = v_B - v_A .$$

El vector v_B — suma $\Delta v + v_A$ — es la diagonal del paralelogramo construido sobre estos vectores.

Al vector Δv le llamaremos incremento vectorial de la velocidad. La longitud de este vector, en el caso del movimiento curvilíneo, no es igual a $\Delta |v| = |v_B| - |v_A|$. La figura evidencia que la magnitud del incremento vectorial $|\Delta v|$ es mayor que la

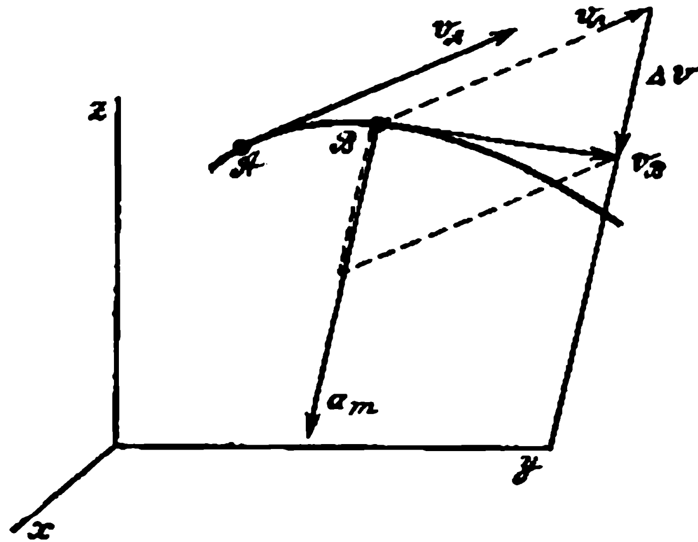


FIG. 4.

diferencia $\Delta |v|$ entre las magnitudes de las velocidades vectoriales. Para conocer la velocidad vectorial en el punto B hay que sumar, de acuerdo con la regla del paralelogramo, el vector velocidad v_A y el incremento Δv.

Ahora podemos definir la magnitud de la aceleración en el movimiento curvilíneo de la forma siguiente: el vector igual a la razón del incremento vectorial de la velocidad al tiempo durante el cual se produjo este incremento se llama *aceleración vectorial media*:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} .$$

Al disminuir el intervalo de tiempo Δt esta relación tiende al límite. El vector

$$a_{verd} = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ cuando } \Delta t \to 0$$

se llama *aceleración vectorial verdadera (instantánea)* del cuerpo en un instante dado de su movimiento. En otras palabras, la aceleración vectorial es igual a la derivada de la velocidad vectorial:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

y

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

La aceleración vectorial define unívocamente el carácter de la variación de la velocidad del cuerpo.

En general, el vector aceleración puede formar cualquier ángulo con la trayectoria del movimiento. Este ángulo deter-

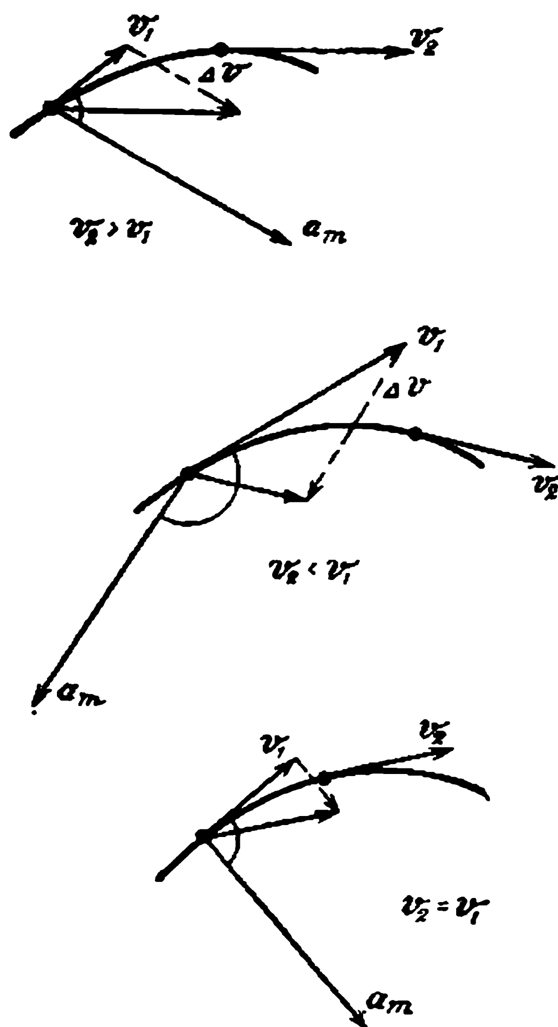


FIG. 5.

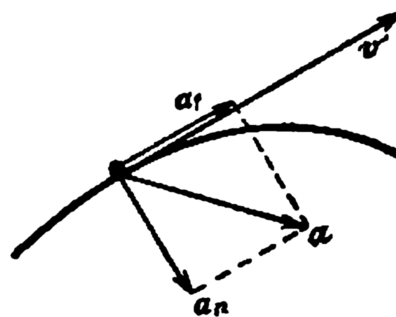


FIG. 6.

mina el carácter de la aceleración y la curvatura de la trayectoria del modo siguiente. Por el punto que nos interesa de la trayectoria trazamos una circunferencia que tenga con aquélla una tangente común en dicho punto y que en el tramo dado de la curva se aproxime lo más exactamente posible a ella. Esta circunferencia se llama *osculatriz* *), y su radio ρ recibe el nombre de *radio de curvatura* en el punto dado. El vector aceleración está siempre dirigido hacia dentro de esta circunferencia. Si el movimiento es acelerado, el vector **a** formará un ángulo agudo con la trayectoria (es decir,

*) La circunferencia osculatriz y el cálculo del radio de curvatura se estudian detenidamente en los cursos de geometría diferencial.

con la tangente a la trayectoria en el punto dado). Si el movimiento es retardado este ángulo será obtuso. Y, finalmente, si la velocidad no cambia en magnitud, la aceleración vectorial será normal a la trayectoria.

Estas afirmaciones pueden demostrarse rigurosamente; nosotros nos limitaremos a dar su ilustración geométrica (fig. 5).

De acuerdo con lo dicho, el vector aceleración se suele descomponer en dos (fig. 6):

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$$

Como el triángulo vectorial es rectángulo,

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

El vector $\boldsymbol{a}_t$, dirigido a lo largo de la trayectoria, caracteriza la variación de la velocidad en magnitud; este vector se llama *aceleración tangencial*. No es difícil demostrar que la aceleración tangencial

$$a_t = \lim \frac{\Delta |\boldsymbol{v}|}{\Delta t} \text{ cuando } \Delta t \to 0,$$

es decir, $a_t = \frac{d|\boldsymbol{v}|}{dt}$, donde $\Delta |\boldsymbol{v}|$ es el incremento de la magnitud de la velocidad.

El vector $\boldsymbol{a}_n$ está dirigido según la normal a la trayectoria; este vector caracteriza el cambio de dirección de la velocidad y se denomina *aceleración normal*.

La aceleración normal a_n está ligada por medio de una fórmula simple con la magnitud de la velocidad v y el radio de curvatura ρ en el punto dado, a saber:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

De esta fórmula, que se deduce en los cursos de mecánica teórica basándose en razonamientos geométricos, se desprende que un movimiento en el cual permanece invariable la aceleración normal (a_n y v son magnitudes constantes) es un movimiento circular. En este caso ρ es una magnitud constante para todos los puntos de la trayectoria e igual al radio de la circunferencia.

La aceleración normal $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ se llama también con frecuencia *aceleración centrípeta*.

La aceleración centrípeta de un cuerpo que se mueve por una circunferencia de radio R puede expresarse también en función del período T, de la frecuencia ν o de la velocidad angular ω de dicho movimiento. Entre estas magnitudes y la velocidad lineal v

existen las siguientes relaciones simples:

$$v=\frac{2\pi R}{T}, \qquad v=\omega R, \qquad \nu=\frac{1}{T}, \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}.$$

Las dos últimas fórmulas son las definiciones de las magnitudes auxiliares ν y ω.

De este modo, la aceleración centrípeta de un cuerpo que se mueve siguiendo una circunferencia se puede escribir también en la forma

$$a_n=\omega^2 R \quad \text{o} \quad a_n=\frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Hay que subrayar que el concepto ordinario de la palabra «aceleración» es mucho más estrecho que su sentido físico. El concepto físico de aceleración incluye la retardación o deceleración (aceleración negativa); lo más importante es que llamamos también acelerado al movimiento uniforme que tiene lugar siguiendo una línea curva. Movimiento sin aceleración vectorial puede ser únicamente el que es a la vez rectilíneo y uniforme.

Orden de las aceleraciones. En un acelerador moderno el protón se mueve, siguiendo una circunferencia, con una aceleración normal del orden de 10^{13} m/s^2. La aceleración lineal de los modernos proyectiles a reacción es de ~ 30 m/s^2. La aceleración de una pelota de hockey es de ~ 10 m/s^2. La aceleración de un automóvil al arrancar es de 1—2 m/s^2. La velocidad angular del rotor de un turbogenerador es de 314 rad/s, a 0,5 m de distancia del eje de rotación sus partículas se mueven con una aceleración de $\sim 5\cdot 10^4$ m/s^2. La velocidad angular de la rueda de una bicicleta es de 7—10 rad/s^2, las partículas de su llanta de radio 0,5 m tienen una aceleración normal de cerca de 20 m/s^2.

§ 2. *Fuerzas*

En la actualidad conocen los físicos cuatro tipos de interacciones.

FUERZAS GRAVITATORIAS. Las fuerzas de atracción establecidas por Newton para los cuerpos celestes, llamadas también gravitatorias, actúan entre dos partículas materiales cualesquiera de acuerdo con la ley

$$F=\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

donde $\gamma=6{,}67\cdot 10^{-11}$ (N·m^2)/kg^2, m_1, m_2 son las masas de las partículas y r es la distancia entre ellas.

Puede demostrarse rigurosamente, aunque nosotros no nos detendremos en ello, que la ley de atracción de Newton escrita para los cuerpos de pequeñas dimensiones (comparadas con la distancia entre ellos) también es válida para la interacción de un

cuerpo pequeño con una gran esfera. En este caso debe entenderse por distancia la que hay entre los centros de los cuerpos.

La ley de la gravitación universal para el caso de la atracción de un cuerpo por la Tierra se escribe por esto en la forma

$$F=\gamma\frac{M}{(R+h)^2}m,$$

donde h es la altura sobre la superficie de la Tierra y R es el radio de la esfera terrestre. Para los puntos próximos a la superficie de la Tierra h es tan pequeña con respecto a R que $R+h$ se puede sustituir por R. En este caso $F=\gamma\frac{M}{R^2}m$. Comparando esta fórmula con la expresión ordinaria del peso $F=mg$, vemos que la aceleración de la gravedad puede expresarse en función de la constante de gravitación, de la masa de la Tierra y del radio de ésta por medio de la fórmula

$$g=\gamma\frac{M}{R^2}.$$

El hecho de que las fuerzas de atracción sean proporcionales a las masas hace que aquéllas sean enormes para los cuerpos celestes e insignificantes por su pequeñez para las partículas elementales. En las interacciones de los átomos, las moléculas u otras partículas de la materia no desempeñan ningún papel las fuerzas de gravitación.

La fuerza de atracción entre la Luna y la Tierra es igual a $2{,}3\times\times10^{20}$ N; entre la Tierra y una molécula de oxígeno, $\sim5\cdot10^{-25}$ N; entre dos moléculas de oxígeno que se hallen a la distancia de contacto ($3\text{Å}=3\cdot10^{-8}$ cm), $\sim2\cdot10^{-42}$ N. Estas cifras son elocuentes por sí mismas.

FUERZAS ELECTROMAGNÉTICAS. Si las partículas o los grandes cuerpos poseen cargas eléctricas q_1 y q_2, entre ellas actúa una fuerza, de atracción si las cargas son de signo contrario y de repulsión si son de igual signo, de acuerdo con la ley de Coulomb $F=\frac{q_1q_2}{r^2}$. Lo mismo que en el caso de la gravitación universal, esta fórmula es válida para las partículas puntuales. A su debido tiempo estableceremos (§ 111) que las fuerzas magnéticas se encuentran en relación directa con las fuerzas eléctricas. Todas las interacciones electromagnéticas son de una misma naturaleza.

Las interacciones entre los átomos, las fuerzas intermoleculares y las que retienen a los electrones cerca del núcleo atómico son todas de procedencia eléctrica. Para subrayar una vez más que las interacciones gravitatorias entre partículas elementales son insignificantes, compararemos la fuerza de atracción gravitatoria con la de atracción eléctrica en el caso de un átomo de hidrógeno

con su único electrón:

$$F_{el} = 9 \cdot 10^{-8}\ \text{N, mientras que}\ F_{gr} = 4 \cdot 10^{-47}\ \text{N. (!)}$$

A primera vista puede parecer incomprensible por qué la interacción de los átomos neutros y de las moléculas neutras tiene origen eléctrico. De esto se tratará detenidamente en el capitulo 29. No obstante, es oportuno señalar ya aquí que las fuerzas entre los átomos y las moléculas no dependen de la carga total de las moléculas (que es igual a cero), sino de las condensaciones y enrarecimientos locales de las cargas eléctricas.

Como quiera que las fuerzas intermoleculares son de origen eléctrico, las fuerzas superficiales tienen este mismo origen, lo mismo que cualquier fuerza de adhesión entre los cuerpos. Las fuerzas de rozamiento se reducen también esencialmente a interacciones eléctricas.

Las fuerzas de elasticidad que se manifiestan cuando se estira el caucho o se comprime un resorte metálico son resultado de interacciones interatómicas e intermoleculares. Por lo tanto, también estas fuerzas tienen, en fin de cuentas, naturaleza electromagnética.

FUERZAS NUCLEARES. Entre las particulas neutras que componen el núcleo atómico, así como entre un neutrón y un protón y entre dos protones con carga de igual signo, actúan fuerzas que no pueden reducirse a electromagnéticas. Estas fuerzas disminuyen con extraordinaria rapidez al aumentar la distancia entre las partículas que interaccionan. Por esta razón dichas fuerzas no se manifiestan fuera de los límites del núcleo y sólo nos encontramos con ellas en los fenómenos relacionados con la interacción directa de los núcleos.

FUERZAS DE INTERACCIÓN «DÉBIL». Se ponen de manifiesto en los procesos de transformación de las partículas elementales en que participa el neutrino.

CAMPO DE FUERZAS. El espacio en que actúan las fuerzas de gravitación se llama *campo gravitatorio* o *campo de atracción* (de Newton). De manera análoga puede hablarse de campo electromagnético. Si una partícula cualquiera está sometida a la acción de un campo de fuerzas, ella misma es capaz de crearlo. Por ejemplo, cualquier particula material crea un campo de atracción y está sometida a la acción de la atracción. Cualquier partícula con carga eléctrica crea un campo electromagnético y está sometida a la acción de un campo electromagnético.

De este modo, cualquier interacción de partículas se representa en física por un esquema partícula — campo — partícula. La primera partícula crea un campo y este campo actúa sobre la segunda partícula. En la pág. 632 se dirán unas palabras acerca de

cómo se tiene en cuenta en este esquema la naturaleza cuántica del campo.

Las propiedades del campo difieren considerablemente de las propiedades de la sustancia. Por esto se suele decir ahora que la materia se encuentra en dos formas: campo y sustancia. Los problemas de las relaciones mutuas del campo y la sustancia son en la actualidad objeto de intenso estudio y, por ahora, no pueden considerarse resueltos (para más detalles véase el § 220).

§ 3. Ley fundamental de la mecánica

LEYES DE NEWTON. La ley fundamental de la mecánica es la relación, hallada por Newton, entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y la aceleración que adquiere dicho cuerpo por la acción de aquéllas. Esta ley se formula de ordinario para un punto material. Con esto no se limita en nada la generalidad de dicha ley, puesto que todo cuerpo complejo se puede considerar como un conjunto de puntos materiales. Por otra parte, la ecuación de Newton para un punto material tiene un campo de aplicación directa extraordinariamente amplio, ya que en multitud de problemas de mecánica nos encontramos con cuerpos de dimensiones pequeñas o nos interesa únicamente el movimiento del centro de gravedad del cuerpo.

La ley fundamental de la mecánica dice lo siguiente: Si sobre un cuerpo actúan las fuerzas $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$, etc., que dan como resultante la fuerza $\boldsymbol{F}=\Sigma \boldsymbol{f}$, la aceleración vectorial que adquiere el cuerpo por la acción de estas fuerzas será proporcional al cociente de dividir la fuerza resultante por la masa del cuerpo material:

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{F}}{m}.$$

Esta ecuación dice también que el vector aceleración debe coincidir con la dirección de la fuerza resultante. En esta fórmula se supone que el coeficiente de proporcionalidad es igual a la unidad, lo que impone a las unidades de medición de las magnitudes que figuran en ella las condiciones que se estudian en el curso de física de los centros de enseñanza media.

La ley fundamental de la mecánica puede escribirse también en la forma

$$\boldsymbol{F}=m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

o también $\boldsymbol{F}=\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}$. La última expresión equivale a la anterior solamente en el caso en que la masa no varía durante el movimiento.

Nosotros nos atendremos a esta condición. El caso en que la masa es variable se estudiará más adelante. En el cap. 3 nos detendremos brevemente en la ecuación del movimiento de los cuerpos de masa variable, tipo cohetes, y en el cap. 24 consideraremos la complicación que surge cuando los cuerpos se mueven a velocidades próximas a la de la luz (mecánica de la teoría de la relatividad).

La ley fundamental de la mecánica se debe considerar como una ley que generaliza los hechos. Esta ley no puede deducirse teóricamente de ningunos razonamientos generales simples.

La ley de la inercia es consecuencia directa de ley fundamental. Si sobre un cuerpo no actúan fuerzas la aceleración vectorial será igual a cero y el movimiento de dicho cuerpo será rectilíneo y uniforme.

Al aplicar la ley fundamental de Newton a un cuerpo cualquiera colocamos éste en el centro de nuestra atención, nos interesan las fuerzas que actúan sobre él. Pero hay que tener siempre presente que las fuerzas son la medida de la interacción de los cuerpos y que no existen interacciones unilaterales. Si un cuerpo actúa sobre otro, el segundo también actúa sobre el primero. La medición de las fuerzas es la medición de las interacciones. Por esto el procedimiento de medición de las fuerzas contiene ya la afirmación de que la fuerza que el primer cuerpo ejerce sobre el segundo es igual a la que el segundo ejerce sobre el primero. Como generalmente nos interesa un cuerpo determinado, la fuerza que actúa sobre él es la que destacamos, y a la segunda fuerza le damos el nombre de reacción. Las fuerzas de acción y reacción son iguales en magnitud y tienen sentidos opuestos. Este postulado se introdujo en la ciencia con el nombre de tercera ley de Newton.

RELATIVIDAD DEL MOVIMIENTO. Un cuerpo que esté en reposo en un sistema de coordenadas puede parecernos que se mueve desde otro punto de vista. El movimiento uniforme de una persona que se pasea por un andén será variado si se describe en el sistema de coordenadas asociado con un tren que va frenando. Por esto, al hablar de la ley de un movimiento hay que indicar el sistema de referencia en que esta ley se cumple. El sistema en el que se cumplen las leyes de Newton debe satisfacer necesariamente la siguiente condición: todo cuerpo sobre el cual no actúen fuerzas debe moverse en él rectilínea y uniformemente o estar en reposo. Este tipo de sistema se llama *inercial*.

Es completamente evidente que todos los sistemas de referencia que se mueven con aceleración respecto a un cuerpo sobre el cual no actúan fuerzas no serán inerciales. Otra conclusión importante a la que llegamos inmediatamente es, que el sistema inercial no será único. Al contrario, existe una multitud innumerable de sistemas inerciales. Con cualquiera de los cuerpos que se

mueven uniforme y rectilíneamente respecto a otro cuerpo, sobre el cual no actúan fuerzas, se puede asociar un sistema inercial.

En efecto, supongamos que ya está elegido el sistema inercial. Para cualquier cuerpo que se mueva en este sistema con la velocidad $\boldsymbol{v}$ y la aceleración $\boldsymbol{a}$ será válida la ley de Newton $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$. Consideremos ahora otro sistema de referencia que se mueva rectilínea y uniformemente, con la velocidad $\boldsymbol{u}$, respecto del inercial. En este sistema el mismo cuerpo tendrá otra velocidad, igual a la diferencia entre la velocidad $\boldsymbol{v}$ y la velocidad $\boldsymbol{u}$ del movimiento del segundo sistema con relación al primero. Pero en virtud de que el movimiento relativo de estos dos sistemas es rectilíneo y uniforme, la aceleración del cuerpo en ambos será la misma. Esto se explica porque la aceleración es la derivada de la velocidad, y la derivada de una magnitud constante es nula:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})}{dt},$$

puesto que $\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=0$. En la ley de Newton figura la aceleración del cuerpo y no su velocidad. Por esto la ley fundamental de la mecánica tendrá necesariamente la misma forma desde el punto de vista de ambos sistemas.

Esta importante afirmación, que se deduce de la ley de la mecánica de Newton, se llama *principio de la relatividad del movimiento*. Este principio dice: existe una multitud innumerable de sistemas inerciales en los cuales se cumple la ley de la inercia y la ley $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$. Ninguno de estos sistemas posee privilegios o peculiaridades respecto de los demás. Todos los sistemas inerciales de referencia tienen las mismas propiedades.

El principio de la relatividad fue establecido primeramente por Galileo.

LEYES DE LA MECÁNICA EN UN SISTEMA DE COORDENADAS NO INERCIAL. Admitimos que la afirmación «la aceleración es provocada por las fuerzas» se conserva siempre en todos los sistemas de referencia. En los sistemas no inerciales de referencia un cuerpo se mueve con aceleración incluso en aquellos casos en que no interviene en interacciones con otros cuerpos. Pero si esto es así, en los sistemas no inerciales, además de las fuerzas debidas a la interacción, existen fuerzas de otro origen, debidas al carácter no inercial del sistema. Estas fuerzas adicionales se llaman fuerzas de inercia (aunque en esencia sería más correcto llamarlas fuerzas no inerciales). Como las fuerzas de inercia no se deben a una interacción, no cumplen la tercera ley de Newton.

En adelante no utilizaremos para el análisis del movimiento los sistemas no inerciales de coordenadas, por esto vamos a limitarnos a poner un ejemplo sencillo de fuerza de inercia.

Supongamos que por determinadas razones nos conviene tomar un sistema de referencia que se mueve con una aceleración $\boldsymbol{a}$ constante en magnitud y dirección. Todos los cuerpos en reposo o en movimiento uniforme respecto de los sistemas inerciales se moverán con la aceleración $-\boldsymbol{a}$ con relación al sistema no inercial de referencia elegido. La aceleración $-\boldsymbol{a}$ es originada por una fuerza $-m\boldsymbol{a}$.

Esta es la fuerza de inercia en el caso considerado. Esta fuerza no es el resultado de una interacción de cuerpos, sino que se debe al movimiento acelerado del sistema de referencia.

Si el cuerpo observado en el sistema no inercial de referencia se halla en interacción con otros cuerpos, la fuerza de inercia se suma a las fuerzas debidas a la interacción.

La ley fundamental de la mecánica en los sistemas de coordenadas no inerciales se escribe en la forma

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \text{fuerzas de inercia};$$

aquí $\boldsymbol{F}$ es la fuerza resultante debida a las interacciones entre los cuerpos.

En dependencia del carácter que tenga el movimiento del sistema no inercial de referencia (lineal, circular, circular acelerado, etc.) la expresión de las fuerzas de inercia tendrá formas distintas. Las fórmulas de las fuerzas de inercia para todos los casos posibles pueden encontrarse en los manuales de física teórica.

§ 4. *Aplicación de la ley fundamental de la mecánica al movimiento rectilíneo acelerado*

A continuación se dan varios ejemplos elementales que aclaran el contenido físico de la ley fundamental de la mecánica: la suma geométrica de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración y está dirigida a lo largo de ésta.

MOVIMIENTO HORIZONTAL POR LA ACCIÓN DE UNA FUERZA CONSTANTE. Un motor empuja una vagoneta colocada sobre raíles. Sobre la vagoneta actúan dos fuerzas en sentidos opuestos: la fuerza de rozamiento $\boldsymbol{F}_{rr}$ por la parte de los raíles y la fuerza elástica $\boldsymbol{F}_{mv}$ por la parte del motor. Si estas dos fuerzas son iguales la vagoneta se mueve uniformemente. Pero si la vagoneta toma aceleración, la fuerza resultante debe estar dirigida a lo largo de $\boldsymbol{a}$. Por consiguiente, para crear un movimiento acelerado, la fuerza que actúa por la parte del motor debe ser mayor que la fuerza de rozamiento. La diferencia de estas fuerzas es la resultante que, según la ley fundamental de la mecánica, es igual al producto de

la masa por la aceleración. Así, pues,

$$F_{mv} - F_{rv} = ma.$$

La fuerza de rozamiento es el resultado de la interacción de los raíles con la vagoneta. Por consiguiente, la fuerza que forma pareja con F_{rv} estará aplicada a los raíles (F_{vr}). La fuerza que forma pareja con F_{mv} será la fuerza F_{vm} con que la vagoneta actúa sobre el motor.

La fuerza F_{vm} es la fuerza de resistencia que vence el motor (es decir, que él experimenta o que sobre él actúa). Esta fuerza es la

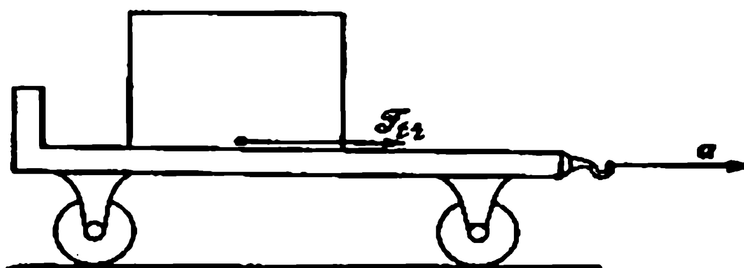


FIG. 7.

que sentirían los músculos de un hombre si él fuera el que hacía las veces de motor. Como vemos, la fuerza de resistencia F_{vm} se compone de dos: la fuerza de rozamiento y la magnitud — ma, que conviene llamar *resistencia inercial*. Se da el nombre de resistencia inercial a una fuerza que existe siempre, y que actúa sobre el cuerpo acelerador, que es igual a ma y está dirigida en sentido opuesto al de la aceleración. La resistencia inercial puede ser también la única fuerza que actúe sobre el cuerpo acelerador, como, por ejemplo, en el caso de la vagoneta si no existiera rozamiento.

Veamos otro ejemplo de movimiento horizontal por la acción de una fuerza constante. Una carga, objeto de nuestra observación, está colocada sobre una vagoneta, con borde (fig. 7), que se mueve. Si no existiera el borde, la carga podría deslizar y caerse de la plataforma de la vagoneta cuando el movimiento fuera acelerado. La suerte de la carga depende de la interacción de la superficie de la plataforma de la vagoneta con ella. Esta interacción consiste únicamente en el rozamiento. La vagoneta se mueve con una aceleración pequeña a. La fuerza que actúa sobre la carga, es decir, la fuerza de rozamiento, debe ser igual a ma*). Pero la fuerza

*) Si un cuerpo cualquiera es arrastrado, a espensas únicamente del rozamiento, en un movimiento acelerado, la fuerza de rozamiento estático o en reposo (puesto que el cuerpo arrastrado en el movimiento *está en reposo* respecto del que lo arrastra) estará siempre dirigida a lo largo de la aceleración.

de rozamiento en reposo no puede ser tan grande como se quiera, sino que es menor que cierta magnitud $F_{roz}^{máx}$. Si

$$ma > F_{roz}^{máx},$$

el movimiento con la aceleración a se hace imposible y la carga se desliza y cae de la vagoneta. Si no existiera rozamiento entre la carga y la superficie de la plataforma de la vagoneta aquélla no se movería de su sitio: la vagoneta se escaparía de debajo de la carga. Supongamos ahora que la vagoneta tiene borde. En este caso cesa el deslizamiento de la carga en cuanto ésta entra en contacto con el borde. Ahora el borde tirará de la carga con la fuerza $F=ma$. La fuerza que forma pareja con la motriz es la resistencia inercial que experimenta el borde. Esta fuerza también es igual a ma, está dirigida en sentido contrario al de la aceleración y aplicada al borde.

Ejemplos numéricos de fuerzas. La fuerza que acelera a un automóvil de turismo es de ~200 kgf=1960 newtones (N). 1 N es la fuerza que le comunica a una masa de 1 kg la aceleración de 1 m/s²; 1 N=10^5 dinas=0,102 kgf. La fuerza de tracción del motor a reacción de un avión moderno es de 10 000—20 000 kgf=$=10^5$—$2\cdot10^5$ N. La fuerza de tracción de la locomotora ТЭ-3, de ~10 000 kgf.

MONTACARGAS VERTICAL. Estudiemos las fuerzas que actúan cuando a una carga que descansa sobre el suelo de un montacargas se le comunica un movimiento variado.

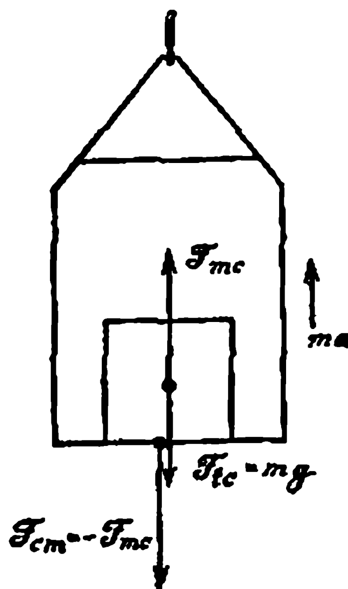


FIG. 8.

Supongamos que el montacargas se mueve hacia arriba con aceleración (fig. 8). Sobre la carga actúan dos fuerzas: una por

parte de la Tierra $\boldsymbol{F}_{tc}$ y otra por parte del montacargas $\boldsymbol{F}_{mc}$. Pero ahora la fuerza resultante debe ser distinta de cero y, por consiguiente, $F_{tc} \neq F_{mc}$. Como la fuerza resultante tiene que estar dirigida a lo largo de la aceleración, $F_{mc} > F_{tc}$, y ser precisamente:

$$\boldsymbol{F}_{mc} - \boldsymbol{F}_{tc} = m\boldsymbol{a}.$$

La fuerza $\boldsymbol{F}_{tc}$ es la fuerza de atracción de la carga por la Tierra, por lo tanto

$$\boldsymbol{F}_{mc} - m\boldsymbol{g} = m\boldsymbol{a}.$$

La magnitud de la fuerza con que la carga presiona sobre el montacargas F_{cm} es identicamente igual a F_{mc}; por consiguiente, la resistencia que experimenta el montacargas al elevar la carga es igual a

$$\boldsymbol{F}_{mc} = m\boldsymbol{g} + m\boldsymbol{a}.$$

Como vemos esta resistencia se compone del peso de la carga y de la resistencia inercial. La fuerza $\boldsymbol{F}_{cm}$ se llama a veces peso aparente.

Este resultado se ha obtenido para el caso en que la aceleración del montacargas está dirigida en sentido contrario al de la acelaración de la gravedad, lo que ocurrirá no sólo cuando el montacargas se mueva hacia arriba con aceleración, sino también cuando se mueva hacia abajo con retardación.

En el caso en que el sentido de la fuerza de la gravedad y el de aceleración del montacargas coinciden, la fuerza con que presiona la carga sobre el montacargas (peso aparente) será

$$\boldsymbol{F}_{cm} = m\boldsymbol{g} - m\boldsymbol{a}.$$

De esta fórmula se deduce que la presión sobre el fondo del montacargas desaparece si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$, es decir, si el montacargas cae libremente en el campo de la gravedad. En estas condiciones los cuerpos que se hallan en el montacargas que cae dejan de presionar sobre el soporte, de tensar los cables, etc., o sea, se comportan como si dejaran de pesar.

TRACCIÓN DE UNA CARGA COLGADA LIBREMENTE. Consideremos el movimiento de una carga colgada situada sobre una vagoneta que se mueve con aceleración. Con este movimiento, el hilo de que pende la carga forma un ángulo con la vertical. Sobre la carga actúan dos fuerzas: la tensión del hilo $\boldsymbol{F}_{hc}$ y la atracción de la Tierra $\boldsymbol{F}_{tc}$, igual a $m\boldsymbol{g}$ (fig. 9). Las direcciones de estas fuerzas forman un ángulo. Su suma geométrica, de acuerdo con la ley fundamental de la mecánica, deberá ser igual a $m\boldsymbol{a}$ y estar dirigida a lo largo de la aceleración. Por consiguiente, la diagonal del paralelogramo construido sobre las fuerzas $\boldsymbol{F}_{hc}$ y $\boldsymbol{F}_{tc}$ será horizontal,

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{hc} + \boldsymbol{F}_{tc}.$$

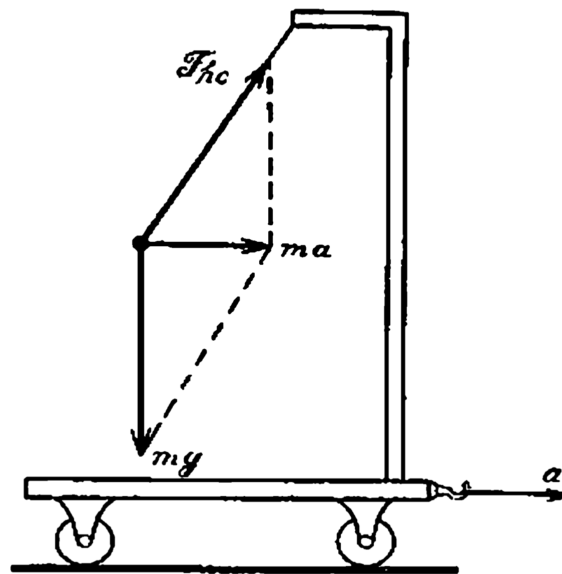


FIG. 9.

La fuerza que forma pareja con F_{tc} está aplicada a la Tierra y no nos interesa. Por el contrario, ofrece interés la fuerza F_{ch}, o sea, la fuerza con que la carga tensa el hilo. Esta fuerza, aplicada al hilo, es

$$F_{ch} = -ma + F_{tc}.$$

Así, pues, en este ejemplo la resistencia inercial figura como sumando en la resistencia que experimenta el cuerpo acelerador.

§ 5. Aplicación de la ley fundamental de la mecánica al movimiento circular

El movimiento circular es un movimiento acelerado. Si un cuerpo se mueve con velocidad angular constante siguiendo una circunferencia, su aceleración es igual en magnitud a $\omega^2 R$ y está dirigida radialmente hacia el centro.

Un cuerpo con movimiento circular uniforme puede estar sometido a un número cualquiera de fuerzas dirigidas arbitrariamente. Pero de la ley fundamental de la mecánica se deduce, que la suma vectorial de todas estas fuerzas o, concretamente, la fuerza resultante, deberá estar dirigida radialmente hacia el centro (paralela a la aceleración) y, por su magnitud, tener el valor

$$F_{ct} = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R.$$

La fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo con movimiento circular uniforme se llama *fuerza centrípeta*. Subrayamos una vez

más, que la fuerza resultante está dirigida siempre a lo largo de la aceleración, y no de la velocidad, es decir, en nuestro caso, la fuerza que origina el movimiento circular uniforme está dirigida, a lo largo del radio, hacia el centro, y no a lo largo de la tangente a la trayectoria circular. El papel de la fuerza centrípeta es desviar continuamente el cuerpo del camino rectilíneo que recorrería por inercia en ausencia de la fuerza actuante.

Ejemplo. Una partícula no equilibrada de masa m, ligada a una de las paletas de una turbina de vapor moderna (3000 r. p. m. y radio de 1 m aproximadamente), experimenta una fuerza centrípeta $F=m\omega^2 r=m\ (314)^2\cdot 100=10^7\ m$ dinas (m en gramos). El peso de la partícula es igual a mg, por lo tanto, la fuerza centrípeta es $\frac{10^7\ m}{mg}$ 10 000 veces mayor que el peso.

Si se hace que el movimiento del cuerpo sea acelerado, de acuerdo con la regla de la acción y reacción el cuerpo acelerado actuará sobre los otros cuerpos (que desempeñan el papel de enlaces o ligaduras) que le obligan a moverse aceleradamente, y no por inercia. A la fuerza que actúa sobre las ligaduras por parte del cuerpo acelerado la hemos llamado resistencia inercial. Esta fuerza existe, por supuesto, y cuando el movimiento es circular recibe el nombre de *fuerza centrífuga*.

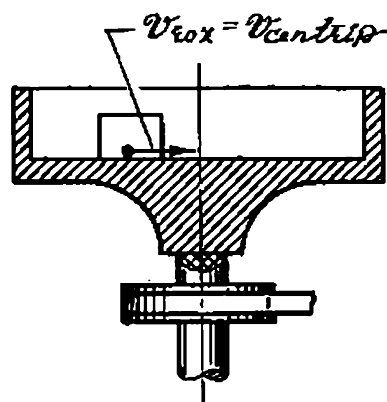


FIG. 10.

La fuerza centrífuga es igual en magnitud a la fuerza centrípeta y está dirigida en sentido opuesto a ella. La fuerza centrífuga está aplicada a las ligaduras del cuerpo que participa en el movimiento circular, o en otras palabras, está aplicada a los cuerpos que obligan al cuerpo considerado a moverse siguiendo una circunferencia y le impiden hacerlo rectilínea y uniformemente. Lo mismo que la fuerza centrípeta, la centrífuga es una fuerza resultante, suma de todas las reacciones que opone el cuerpo que gira a los cuerpos que lo sujetan.

Consideremos varios ejemplos limitándonos a los casos más simples, en los cuales el movimiento circular se produce como resultado de la interacción de dos cuerpos. Si un cuerpo A impide que un cuerpo B se mueva rectilínea y uniformemente y le obliga a moverse uniformemente describiendo una circunferencia, la fuerza F_{AB} será centrípeta y la F_{BA}, centrifuga. Esta simplísima interacción tiene lugar entre un cuerpo colocado sobre el soporte en forma de platillo cilíndrico (fig. 10) que gira alrededor de su eje en el plano horizontal, y el propio soporte. Si el rozamiento

no es muy grande y el soporte gira con rapidez, el cuerpo se deslizará hacia el borde del soporte. En este caso la interacción del cuerpo y el soporte consiste en lo siguiente: el borde del platillo actúa sobre el cuerpo en dirección radial hacia el centro (fuerza centrípeta) y el cuerpo presiona sobre el borde con una fuerza igual en magnitud dirigida radialmente en sentido opuesto (fuerza centrífuga).

Volvamos a considerar ahora el instante inicial de este experimento. El cuerpo se encuentra sobre el soporte y éste apenas comienza a girar. Si entre el cuerpo y el soporte no existiera interacción, aquél permanecería en su sitio y el soporte giraría debajo de él. La existencia del rozamiento en reposo conduce a otro resultado. El soporte al girar arrastra consigo al cuerpo. En este caso, como se indicó en el párrafo anterior, la fuerza de rozamiento en reposo estará dirigida radialmente hacia el centro: esta fuerza es la única que obliga al cuerpo a girar, es decir, la fuerza de rozamiento es, en este caso, la fuerza centrípeta. Por lo tanto

$$\boldsymbol{F}_{roz} = \boldsymbol{F}_{ct}.$$

La fuerza centrífuga actúa por parte del cuerpo sobre el soporte y está dirigida radialmente en sentido opuesto al centro. Suponiendo para mayor claridad (aunque recordando que ésta es una representación muy burda) que el rozamiento es el resultado del «enganche» de dos superficies rugosas, en el cual los salientes de la superficie de un cuerpo penetran en los entrantes de la superficie de otro cuerpo, la fuerza centrífuga nos la figuramos como actuando a lo largo del radio, en sentido contrario al centro, sobre los puntos de «enganche» de la superficie del soporte.

La interacción de rozamiento que mantiene al cuerpo en reposo con respecto al soporte sólo puede ser menor que cierto valor máximo $F_{roz}^{máx}$. Al aumentar la velocidad de rotación del platillo llega un instante en el cual el producto $m\omega^2 R$ se hace mayor que $F_{roz}^{máx}$. Entonces la participación del cuerpo en el movimiento circular con la aceleración $|\boldsymbol{a}| = \omega^2 R$ se hace imposible. Efectivamente, para asegurar la participación del cuerpo en un movimiento circular con la velocidad angular ω hay que actuar sobre él con una fuerza $m\omega^2 R$. Si la interacción de rozamiento no puede asegurar esta fuerza y, por consiguiente, el movimiento según la circunferencia de radio R con la velocidad ω, el cuerpo se desplaza de su sitio con respecto al soporte y entre aquél y éste deja de efectuarse la interacción de rozamiento estático.

En cuanto que cesa la interacción del cuerpo con el soporte y aquél queda libre, comienza un movimiento rectilíneo y uniforme con la velocidad vectorial que tenía el cuerpo en el instante del

arranque. Como la velocidad de un cuerpo que se mueve siguiendo una circunferencia está dirigida tangencialmente, esta línea será la que al moverse siga el cuerpo liberado. La demostración más clara de que las trayectorias que siguen las partículas que se desprenden de un cuerpo en rotación son tangenciales se consigue en el experimento con la muela de afilar.

Hagamos ahora varias observaciones acerca del proceso de rotación de una piedra sujeta con un bramante (fig. 11). Para,

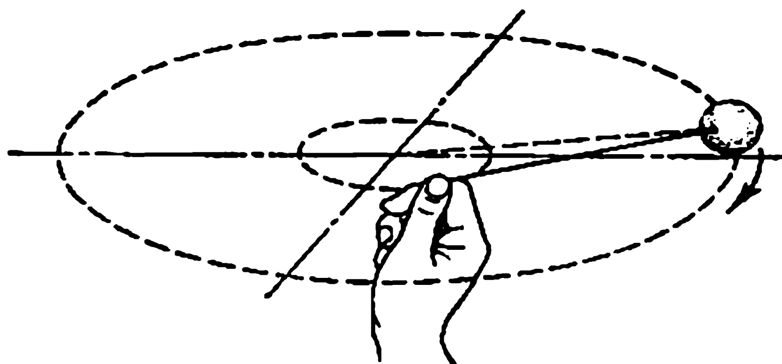


FIG. 11.

en condiciones normales, hacer girar uniformemente una piedra sujeta a una cuerda hay que comunicarle a aquélla no sólo una aceleración centrípeta, sino también una tangencial. Esta última es necesaria para vencer el rozamiento con el aire. La aceleración resultante y, por consiguiente, la fuerza, no están dirigidas a lo largo del radio, sino que forman un ángulo agudo con la dirección del movimiento. La mano realiza un movimiento de rotación y la cuerda está dirigida, en cada instante dado, a lo largo de la tangente a la circunferencia que describe la mano.

Como un ejemplo más de movimiento circular consideraremos la rotación de dos cuerpos que se atraen y que giran con la misma velocidad angular alrededor de un centro común. Con una máquina centrífuga no es difícil hacer que dos pesas de igual masa, unidas entre sí por un hilo, giren en torno a un eje común.

Examinemos al principio la primera pesa sujeta por el hilo al eje de rotación. La fuerza centrífuga que actúa sobre el eje será igual a $m_1\omega^2 R_1$. La segunda pesa actúa sobre el eje con una fuerza $m_2\omega^2 R_2$. Si estas fuerzas son iguales, los hilos se podrán atar el uno al otro sin que con esto varíe nada (fig. 12). De esto se deduce claramente que la condición para que el movimiento de rotación de dos cuerpos, unidos por un hilo, sea estable es que sean iguales las fuerzas centrífugas que actúan sobre el hilo por parte de estos cuerpos:

$$m_1\omega^2 R_1 = m_2\omega^2 R_2.$$

Por lo tanto,

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{R_2}{R_1},$$

es decir, la rotación será estable únicamente en el caso en que las distancias de los cuerpos al eje de rotación sean inversamente proporcionales a las masas de dichos cuerpos.

El punto que divide la línea de longitud R_1+R_2 en la proporción $\frac{R_1}{R_2}=\frac{m_2}{m_1}$ (fig. 12) se llama centro de inercia (véase el § 15).

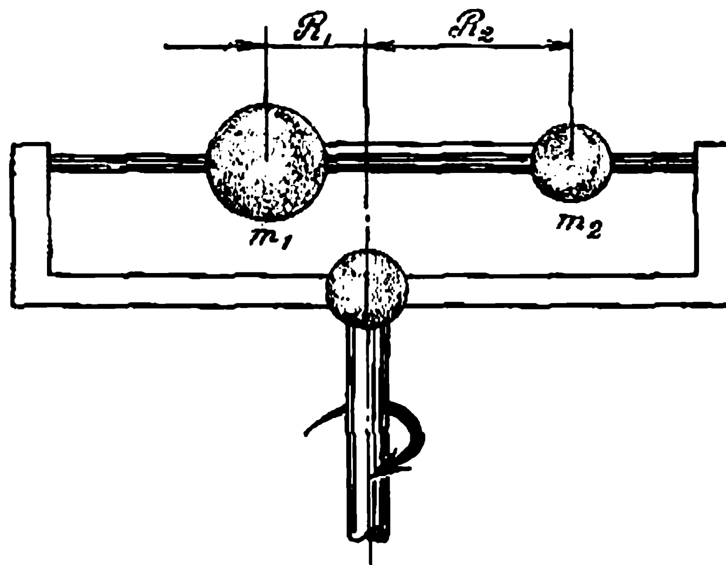


FIG. 12.

Se puede asegurar que la rotación estable de dos cuerpos ligados entre sí tiene lugar alrededor del punto que es centro de inercia del sistema.

Nos hemos referido a dos cuerpos cuya interacción se realiza por medio de un hilo. No obstante, todo lo dicho es también completamente válido en el caso de dos cuerpos que se atraen de acuerdo con la ley de la gravitación universal o de dos cargas eléctricas, positiva y negativa, que se atraen. La interacción de cualquier naturaleza entre un par de cuerpos que se atraen puede, por lo tanto, conducir a la rotación estable alrededor de un punto, que es el centro de inercia. Esta interacción se representa por dos fuerzas aplicadas a dos cuerpos que se atraen. Estas fuerzas están dirigidas la una al encuentro de la otra y numéricamente son iguales. (Por lo general, al llegar a este punto, al lector poco preparado se le plante la pregunta: ¿por qué, entonces, no se aproximan entre sí los cuerpos? Volvemos a subrayar una vez más que estas fuerzas son paralelas a las aceleraciones, pero no a las velocidades, y que

en el movimiento circular las aceleraciones están dirigidas radialmente hacia el centro de rotación). Como sobre cada cuerpo actúa solamente una fuerza, ambas son centrípetas. Pero al mismo tiempo estas dos fuerzas son también centrífugas. En efecto, el cuerpo A desempeña el papel de ligadura del cuerpo B, y viceversa. Esto quiere decir que para el cuerpo A la fuerza F_{BA} es centrípeta y la fuerza F_{AB} es centrífuga, y viceversa. Sin embargo, la utilización en este caso del concepto de fuerza centrífuga tiene un carácter completamente formal. Estos renglones sólo eran necesarios para subrayar la analogía que existe entre un sistema de esferas ligadas entre sí por un hilo y un sistema de cuerpos «ligados» entre sí por fuerzas de atracción.

El sistema planetario es un ejemplo de rotación estable de cuerpos que se atraen. Supongamos, por ejemplo, que el Sol no tuviera más planeta que la Tierra. En este caso el centro de rotación dividiría la recta que une el Sol con la Tierra en la proporción m_{Sol} : : $m_{Tierra}=330\ 000 : 1$.

De este modo, al decir de ordinario que la Tierra gira alrededor del Sol no cometemos un error grande, y tampoco lo cometeríamos incluso en el caso en que la Tierra fuera el único satélite del Sol.

§ 6. *Influencia de la rotación de la Tierra en los fenómenos mecánicos*

La esfera terrestre efectúa un movimiento complejo: gira en torno a su eje y se mueve por su órbita alrededor del Sol. Es, pues, completamente comprensible que la Tierra no sea un sistema de referencia inercial. Sin embargo, nosotros aplicamos eficazmente la ley de Newton en las condiciones de la Tierra. Pero en una serie de casos el carácter no inercial de la Tierra se deja sentir con bastante fuerza. Estos casos deben ser estudiados.

INFLUENCIA DE LA ROTACIÓN DE LA TIERRA EN SU FORMA. PESO DE UN CUERPO. Si no se tiene en cuenta la rotación de la Tierra, un cuerpo que se encuentre en su superficie deberá considerarse en reposo. La suma de las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo sería entonces igual a cero. Pero en realidad cualquier punto de la superficie de la esfera terrestre que se halle a una latitud geográfica φ, se mueve alrededor del eje de la Tierra, es decir, describiendo una circunferencia de radio $r=R\cos\varphi$ (R es el radio de la Tierra considerada en primera aproximación como si tuviera forma de esfera), con la velocidad angular $\omega=0{,}7292\cdot10^{-4}$ s^{-1}. Por lo tanto, la suma de las fuerzas que actúan sobre este punto será distinta de cero e igual al producto de la masa por la aceleración $\omega^2R\cos\varphi$ y estará dirigida a lo largo de r.

Es evidente que la existencia de esta fuerza resultante, *OG* (fig. 13), solamente es posible en el caso en que las direcciones respectivas de la reacción de la superficie terrestre *OA* y de la fuerza de gravitación OE forman un ángulo entre sí. Entonces el cuerpo presionará sobre la superficie de la Tierra (según la tercera ley de Newton) con una fuerza $OC = -OA$. Si la esfera terrestre

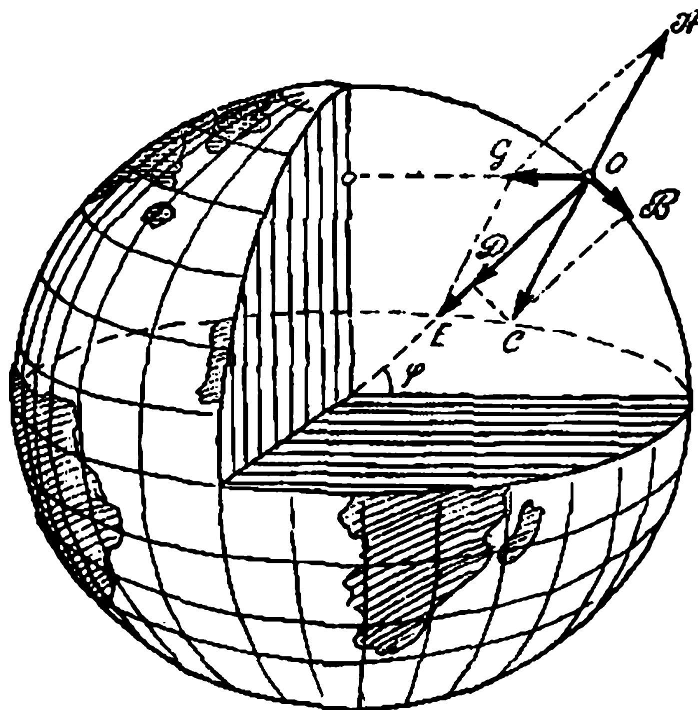


FIG. 13.

estuviera en reposo, esta fuerza seria igual a la de gravitación *OE* y su dirección coincidiría con la de ésta.

Descompongamos la fuerza *OC* en dos: una dirigida a lo largo del radio *OD* y otra siguiendo la tangente *OB*. La existencia de la rotación de la Tierra conduce, como puede verse en la figura, a dos hechos. En primer lugar, el peso (presión del cuerpo sobre la Tierra) se hace menor que la fuerza de gravitación. Como $OC \approx OD$, esta disminución será igual a $DE = mR\omega^2/\cos^2\varphi$. En segundo lugar, aparece una fuerza que tiende a achatar la Tierra, a trasladar la materia al ecuador; esta fuerza es $OB = mR\omega^2 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi$. Este achatamiento existe en realidad; la Tierra no tiene forma de esfera, sino una forma que se aproxima a la de un elipsoide de revolución. El radio ecuatorial de la Tierra se hace, a consecuencia de la acción indicada, $\frac{1}{300}$ parte mayor que el radio polar.

Las fuerzas achatadoras obligaran a la masa de la esfera terrestre a desplazarse hasta que tomó una forma equilibrada. Cuando el proceso de desplazamiento terminó, las fuerzas achatadoras cesaron, evidentemente, de actuar. Por consiguiente, las fuerzas de presión que actúan sobre la superficie de la «esfera» terrestre están dirigidas normalmente a dicha superficie.

Volvamos a ocuparnos ahora del valor de la presión que ejerce un cuerpo sobre la tierra, es decir, de la magnitud física que generalmente se llama peso. El cálculo hecho para la esfera (la fuerza de gravitación menos $mR\omega^2 \cos^2 \varphi$) no es válido, claro está, para la forma verdadera de la Tierra. Sin embargo, este resultado puede utilizarse para los cálculos aproximados.

En el polo ($\varphi=90°$) el peso del cuerpo es igual a la fuerza de gravitación. Llamemos mg a la fuerza de gravitación del cuerpo en el polo. Entonces, la presión del cuerpo sobre la superficie terrestre en cualquier otro punto de la esfera terrestre o, dicho de otra forma, su peso, será igual, como dijimos antes, a la diferencia entre la fuerza de gravitación y la fuerza DE, es decir

$$mg - mR\omega^2 \cos^2 \varphi = mg'$$

y

$$g' = g - R\omega^2 \cos^2 \varphi$$

es la aceleración con que caen los cuerpos en la latitud φ. En el ecuador g' es aproximadamente $\frac{1}{300}$ menor que g.

Utilizando las distintas aceleraciones de caída libre correspondientes a las diversas latitudes evitamos la necesidad de tener en cuenta la influencia de la rotación de la Tierra en el peso del cuerpo.

INFLUENCIA DE LA ROTACIÓN DE LA TIERRA EN EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS POR SU SUPERFICIE. Figurémonos que la observación del movimiento del cuerpo se hace en un sistema de coordenadas giratorio. Ante el observador se mueve rectilínea y uniformemente un cuerpo cualquiera. En el sistema de referencia no inercial elegido la trayectoria del cuerpo será curvilínea. El científico francés Coriolis demostró por medio de cálculos que, con respecto a un sistema que se mueva con la velocidad angular ω, un cuerpo con movimiento rectilíneo y uniforme de velocidad v tendrá una aceleración igual a $2v\omega$ sen α, donde α es el ángulo comprendido entre el eje de rotación y la dirección del movimiento rectilíneo. En estas condiciones el vector aceleración tiene dirección perpendicular al plano que pasa por el eje de rotación y por la dirección de la velocidad. Para elegir una de las dos direcciones posibles de la aceleración se puede utilizar la regla siguiente: si se mira a lo largo del eje de rotación de modo que se vea ésta en

sentido contrario al de las agujas del reloj y se coloca la mano izquierda con la palma hacia abajo, poniendo los dedos en la dirección del movimiento rectilíneo, el dedo pulgar indicará la dirección de la aceleración (fig. 14).

La aceleración de Coriolis a_c actúa sobre todos los cuerpos que se mueven por la superficie de la Tierra. Si se mira el eje de la esfera terrestre desde la parte del polo norte, la rotación de ésta tiene el sentido contrario al de las agujas del reloj. Por lo tanto, cualquier cuerpo que se mueva en el hemisferio norte rectilíneamente con respecto a un sistema inercial, se desviará hacia la derecha en la dirección del movimiento (o hacia la izquierda en el hemisferio sur) para un observador que se halle en la Tierra. Esta desviación puede ser mayor o menor en dependencia de la dirección que tenga el movimiento con relación al eje y de la velocidad lineal del mismo.

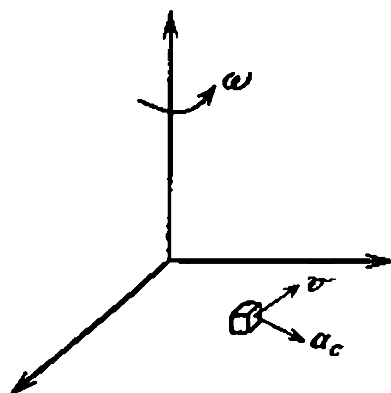


FIG. 14.

La desviación de los cuerpos puede tener lugar tanto en el plano horizontal como en el vertical (con respecto a la superficie de la Tierra). La aceleración de Coriolis está dirigida perpendicularmente al eje de la Tierra; por esto la desviación que tiene lugar en el plano horizontal es máxima en el polo e igual a cero en el ecuador. En el caso de la desviación en el plano vertical ocurre lo contrario. Las desviaciones en estos dos planos se caracterizan por las correspondientes proyecciones del vector aceleración. Así, la proyección de la aceleración de un cuerpo en el plano horizontal será igual a

$$2v\omega \operatorname{sen} \varphi,$$

donde φ es la latitud. En el hemisferio norte esta proyección está dirigida hacia la derecha siguiendo el movimiento.

La desviación del camino rectilíneo de los cuerpos que se mueven en el plano horizontal se manifiesta en el derrubio por los ríos de sus orillas derechas según la corriente en el hemisferio norte y de sus orillas izquierdas en el hemisferio sur. Por esta misma causa los ríos rodean los obstáculos por la derecha en el hemisferio norte y por la izquierda en el hemisferio sur.

Las masas de aire que afluyen a una región de baja presión se desvían de la dirección radial hacia la derecha en el hemisferio norte (y hacia la izquierda en el sur) y originan ciclones. Por lo tanto, en el hemisferio norte los ciclones transportan las masas de aire en sentido contrario al de las agujas del reloj, y en el sur, al contrario.

La existencia de la desviación vertical hace que un cuerpo al caer siga no exactamente la vertical, sino que se desvíe de occidente a oriente (la Tierra gira de occidente a oriente, es decir, en sentido contrario al de las agujas del reloj si se mira desde la parte del polo norte).

Ejemplos. 1. Calculemos la desviación máxima de la trayectoria rectilínea que experimenta un proyectil de artillería. La desviación será máxima en el polo ($\varphi=90°$ y para todas las direcciones en que se dispare $\alpha=90°$). Tomando la velocidad del proyectil igual a 1 km/s obtenemos $2\cdot 1000\cdot 0{,}73\cdot 10^{-4}\approx 0{,}15$ m/s². Esta aceleración es aproximadamente 70 veces menor que la aceleración de la gravedad. La desviación del proyectil de la trayectoria rectilínea puede alcanzar, como vemos, una magnitud del orden de varios centímetros.

2. Supongamos que un río corre de norte a sur (en el hemisferio norte) con la velocidad $v=3$ km/h. En este caso el agua pasa de unas regiones en que la velocidad lineal de rotación de la superficie terrestre es pequeña a otras regiones en que dicha velocidad es mayor. Este aumento de la velocidad del movimiento (dirigido de occidente a oriente junto con las márgenes del río) se caracteriza por la aceleración de Coriolis y se debe a la acción de la orilla derecha del río sobre la masa de agua. Calculemos la aceleración de Coriolis para la latitud $\varphi=45°$:

$$a_c = 2v\omega_0 \operatorname{sen}\varphi,$$

$$\omega_0 = 2\pi \text{ rd/d} = 7{,}25\cdot 10^{-5} = \text{rd/s},\quad v = 3 \text{ km/h} = 0{,}83 \text{ m/s},$$

$$a_c = 2\cdot 0{,}83\cdot 7{,}25\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}707 = 8{,}50\cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2.$$

Por lo tanto, sobre cada tonelada de agua la orilla derecha presiona con una fuerza de

$$8{,}5\cdot 10^{-5}\cdot 10^{-3} = 8{,}5\cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

Las escarpadas márgenes derechas del Volga, Don y otros grandes ríos del hemisferio norte pueden servir de ilustración a este cálculo.

§ 7. ¿Qué datos son necesarios para resolver un problema de mecánica?

El problema fundamental de la mecánica es hallar el movimiento partiendo de las fuerzas dadas. Hallar o determinar el movimiento significa poder indicar en qué lugar del espacio y en qué instante se encuentra cualquiera de los puntos materiales. Pero si lo que nos interesa es un sistema mecánico complejo, ¿qué conocimientos serán necesarios con respecto a cada uno de los puntos materiales en que dicho sistema se divide mentalmente?

Para poder resolver este problema deberemos disponer ante todo de los datos completos acerca de las fuerzas que actúan. Las fuerzas deben conocerse para cualquier punto y cualquiera que sea el lugar en que éste se encuentre. Si se conocen las fuerzas, aplicando las ecuaciones de Newton podemos determinar la aceleración del punto material. No obstante, todos los datos sobre la trayectoria, la velocidad y el instante al que corresponde el paso por un

punto dado del espacio no se pueden obtener aplicando únicamente las ecuaciones del movimiento de Newton. Para describir el movimiento es necesario conocer para cualquier instante el lugar en que se encontraba el punto material, así como su velocidad, tanto en magnitud como en dirección. Hay que conocer en total seis números: las tres coordenadas del punto y las tres proyecciones de la velocidad sobre los ejes. Estos datos caracterizan unívocamente el «estado mecánico» del punto; se pueden llamar, pues, parámetros de estado.

De este modo, el problema se reduce a hallar los parámetros de estado, y las ecuaciones de Newton dan únicamente la aceleración.

Para resolver un problema hay que conocer las condiciones iniciales, es decir, los valores de los parámetros de estado para un instante cualquiera (por lo general en este instante se designa por $t=0$, de aquí la denominación de condiciones iniciales). Si se conocen los valores iniciales de los parámetros de estado, lo demás es ya una cuestión matemática. Las ecuaciones del movimiento de Newton más los datos iniciales resuelven unívocamente el problema mecánico. La suerte del punto, tanto en el futuro como en el pasado, se puede analizar, en principio, durante un plazo tan grande como se desee hacia adelante o hacia atrás. Esta idea admiró en su tiempo a los hombres de ciencia. El gran científico y pensador francés Laplace decía: si conociéramos las coordenadas iniciales y las velocidades de todas las partículas que constituyen el mundo, podríamos predecir su suerte. Este punto de vista ingenuo, que reduce todo lo existente a fenómenos puramente mecánicos, es falso por principio, y no sólo porque en la práctica sea imposible disponer de todos los datos necesarios. Esto se debe a que la mecánica basada en las leyes de Newton tiene una aplicación limitada y sus deducciones no pueden utilizarse con tanta amplitud.

Pero, volvamos a las seis condiciones iniciales. La necesidad de conocer precisamente seis cifras para determinar el estado de un punto se deduce evidentemente de las propias ecuaciones de Newton.

La ecuación vectorial puede descomponerse según los tres ejes y escribirse en forma de tres igualdades: $ma_x=F_x$, $ma_y=F_y$ y $ma_z=$ $=F_z$. Determinar un movimiento significa hallar cómo varían con el tiempo las tres coordenadas del punto x, y, z. La dependencia de la coordenada x respecto del tiempo se halla integrando la ecuación

$$m\frac{dv_x}{dt}=F_x.$$

La primera integración permite hallar la componente x de la velocidad. Al hacer esta integración aparece la primera constante de

integración. La segunda integración da la posibilidad de hallar la coordenada x en función del tiempo. Al integrar por segunda vez aparece una segunda constante, constante arbitraria. Esto mismo se refiere también a las ecuaciones de variación con el tiempo de las otras dos coordenadas. En total aparecen seis constantes arbitrarias que únicamente se pueden encontrar si se conocen seis datos independientes cualesquiera acerca de las coordenadas y de las velocidades de la partícula.

Las condiciones iniciales, como ya hemos dicho, son las tres coordenadas iniciales y las tres proyecciones también iniciales. No obstante, el problema se puede resolver también si se conocen otros seis números. Por ejemplo, pueden darse las tres coordenadas del punto inicial, el valor numérico de la velocidad inicial y dos coordenadas del punto final. La trayectoria del punto también queda determinada unívocamente con estas seis condiciones.

Los parámetros de un punto pueden darse por diversos procedimientos. La posición de un punto en el espacio puede darse mediante tres coordenadas cartesianas o por la distancia desde el origen de coordenadas al punto y dos de los ángulos que forma el radio vector (o vector de posición) con los ejes. Lo mismo puede decirse con respecto a la velocidad.

Un ejemplo característico de la dependencia del movimiento de un cuerpo respecto de las condiciones iniciales es el comportamiento de un cohete lanzado desde la superficie de la Tierra. La trayectoria de dicho cohete y su suerte estarán determinadas por la dirección del lanzamiento, la situación geográfica del lugar en que se efectúa este último y por la magnitud de la velocidad inicial. Si las velocidades son pequeñas, el cuerpo lanzado desde la Tierra describe, como sabemos perfectamente, una curva parabólica. Cuando la velocidad alcanza cerca de 8 km/s se consigue igualar la fuerza centrífuga y la fuerza de atracción y el cuerpo puede colocarse en una órbita circular. Con velocidades comprendidas entre 8 y 11,2 km/s el cuerpo lanzado describe alrededor de la Tierra una trayectoria elíptica. Y si la velocidad inicial es de cerca de 11,2 km/s, la energía cinética del cuerpo se hace suficiente para vencer por completo la atracción de la Tierra. Un cohete lanzado con esta velocidad se moverá siguiendo una hipérbola.

Si un sistema mecánico consta de n puntos independientes, el número de parámetros del sistema será igual a $6n$.

Pero en una serie de casos al sistema mecánico se le pueden imponer ligaduras (o enlaces) que disminuyen este número. Un ejemplo sencillo es el de un regulador centrífugo, el cual podemos figurárnoslo como un sistema de dos esferas ligadas entre sí que pueden separarse y girar alrededor de un eje común. Está claro que, en este caso, dando la distancia a un punto desde el eje de

rotación y el ángulo acimutal con respecto a una línea arbitraria podemos determinar unívocamente el estado mecánico del sistema. Dos «coordenadas» y dos velocidades de variación de las mismas serán los parámetros de este estado.

Consideremos ahora un cuerpo sólido que gire arbitrariamente y veamos qué datos hay que tener para fijar su posición con respecto a un sistema de coordenadas en reposo. Está claro que con tres datos podemos determinar la posición del centro de gravedad del cuerpo. Pero para definir la rotación del cuerpo basta conocer tres ángulos. En esta afirmación podemos no detenernos, puesto es evidente que, mediante tres giros alrededor de unos ejes perpendiculares entre sí, siempre es posible dar a un cuerpo cualquier orientación.

Así, pues, el cuerpo sólido tiene que caracterizarse por medio de seis coordenadas y seis velocidades de variación de estas coordenadas, en total doce parámetros.

Como otro ejemplo más, consideraremos dos puntos rígidamente unidos. Si fueran libres, para sus características se necesitarían los valores de seis coordenadas. Pero como están rígidamente enlazados existe una condición adicional que relaciona las coordenadas de estos puntos:

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=\text{const.}$$

De este modo, para caracterizar dicho sistema se tienen cinco magnitudes independientes. Cinco coordenadas y cinco velocidades de variación de las mismas dan para este sistema diez parámetros.

Como los parámetros de estado se dividen siempre en «coordenadas» y en velocidades de variación de las «coordenadas», se acostumbra hablar de *grados de libertad* del sistema, entendiéndose por esto el número de coordenadas independientes necesario para definir el sistema. Por lo tanto, un punto tiene tres grados de libertad; dos puntos rígidamente unidos, cinco grados de libertad; un sólido, seis grados de libertad; un sistema de n puntos independientes, $3n$ grados de libertad, etc. Ahora está claro el sentido que tiene la afirmación de que el estado mecánico de un sistema se determina dando sus parámetros de acuerdo con el número de grados de libertad que tenga.

§ 8. Coeficientes de proporcionalidad en las fórmulas de la física y dimensiones de las magnitudes físicas

El coeficiente γ que figura en la ley de la gravitación universal es una constante universal que depende de las unidades de medición de la fuerza, masa y distancia que se elijan. Las unidades de me-

dición se pueden elegir de modo que $\gamma=1$. Para esto hay que tomar como unidad de masa la masa de un punto que atraiga a otro de igual masa que se halle a la distancia unidad, con una fuerza igual a la unidad. En el sistema CGS esta masa sería igual, evidentemente, a $1{,}5\cdot 10^7$ g, es decir, a 15 toneladas.

De este modo, los coeficientes universales que figuran en las leyes de la física aparecen como consecuencia de las unidades de medición que concretamente se elijan. Si se quisiera podrían hacerse desaparecer todos los coeficientes de este tipo de todas las leyes, eligiendo convenientemente las unidades de medida.

Lo importante es asimilar lo siguiente: en las fórmulas están ligados entre sí el sistema de unidades de medición que se utiliza y los coeficientes de proporcionalidad. Esta relación se pone de manifiesto cuando se estudian las fórmulas de las dimensiones. En primer lugar es necesario establecer el número de unidades que se desean considerar fundamentales. Este número depende totalmente de nuestra voluntad y se determina exclusivamente atendiendo a razones de comodidad.

En física se admite generalmente un sistema en el cual las unidades de longitud L, masa M y tiempo T se han elegido independientemente unas de otras. En este caso los valores de todas las constantes universales, lo mismo que las unidades de medición de todas las demás magnitudes quedan determinadas unívocamente al elegir las unidades de L, M y T. El carácter de esta relación viene dado por las llamadas fórmulas de las dimensiones. El sentido de estas fórmulas queda claro en los ejemplos siguientes. La dimensión de la velocidad es LT^{-1}, la de la aceleración LT^{-2}, la de la fuerza MLT^{-2}, la de la constante de gravitación $M^{-1}L^3T^{-2}$, la de la carga eléctrica en la fórmula de Coulomb $M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$, etc. Conociendo estas fórmulas se puede decir inmediatamente cómo varían los valores numéricos de las constantes universales y de las unidades de medición de las magnitudes físicas derivadas si se varía la magnitud de una unidad fundamental cualquiera.

Como veremos en los ejemplos (§ 81), el análisis de las dimensiones de las magnitudes físicas puede indicar el carácter de unas u otras dependencias entre dichas magnitudes.

Además del sistema en el cual las magnitudes fundamentales son la distancia, el tiempo y la masa, se utiliza mucho el sistema en el que como magnitudes fundamentales se toman la distancia L, el tiempo T y la fuerza F (sistema FLT). Es indudable que en este sistema las fórmulas de las dimensiones tendrán otra forma. Por ejemplo, el momento de una fuerza en el sistema FLT tiene la dimensión FL, mientras que en el sistema MLT su dimensión es ML^2T^{-2}. La masa, que en el sistema FLT es una magnitud derivada, toma la dimensión $FL^{-1}T^2$.

La ley fundamental de la mecánica relaciona entre sí la fuerza, la masa, la distancia y el tiempo. Por esto, la elección del coeficiente de proporcionalidad en esta fórmula depende para ambos sistemas de las unidades de medida que se tomen. En ambos sistemas se supone que el coeficiente de proporcionalidad es igual a la unidad. Esto significa que en el sistema MLT, por la fórmula $F=ma$, se elige la unidad de medida de la fuerza de tal modo, que $F=1$ si la masa y la aceleración son iguales a la unidad, mientras que en el sistema FLT, por la fórmula $m=\frac{F}{a}$, se elige la unidad de medición de la masa de manera, que $m=1$ si la fuerza y la aceleración son iguales a la unidad.

En este libro utilizaremos con más frecuencia el sistema MLT en sus dos variantes:

El sistema CGS: L, centímetro; M, gramo; T, segundo;

y el sistema SI: L, metro; M, kilogramo; T, segundo.

En el sistema CGS la unidad de fuerza es la dina $=1\text{g}\cdot\text{cm/s}^2$, y la unidad de trabajo es el ergio $=1$ din·cm. En el SI la unidad de fuerza es el newton $=1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$, y la de trabajo es el julio $=1$ N·m.

Si el lector encuentra datos expresados en el sistema FLT debe reducirlos a cualquiera de los dos sistemas indicados. Para esto basta recordar que la unidad de fuerza en el sistema FLT es el kilogramo fuerza (peso de una pesa de 1 kilogramo al nivel del mar a 45° de latitud), que está ligado con las dos unidades de fuerza que hemos admitido por medio de las relaciones

$$1\text{kgf}=9{,}81\text{ N}=9{,}81\cdot10^5\text{ din}.$$

Del problema de los sistemas de unidades volveremos a tratar cuando nos sean necesarias las magnitudes eléctricas.

2

ENERGÍA MECÁNICA

§ 9. *Trabajo*

Un movimiento sin aceleración (es decir, rectilíneo y uniforme) puede producirse tanto si sobre el cuerpo no actúan fuerzas como si actúan. En el último caso la suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es nula. Entre estas dos formas de movimiento sin aceleración existe una diferencia esencial. En el primer caso el movimiento no va acompañado de trabajo, mientras que para

efectuar el segundo tipo de movimiento hay que realizar trabajo. Trabaja el motor que mueve uniforme y rectilíneamente a un automóvil. Trabaja el hombre que hace que se mueva uniforme y rectilíneamente un trineo con carga. Se dice que en estos casos el trabajo se invierte en vencer las resistencias, como el rozamiento, la resistencia del aire, etc.

De dos fuerzas equilibradas entre sí que actúan sobre un cuerpo que se mueve sin aceleración, una está dirigida en el sentido del movimiento y la otra en sentido contrario.

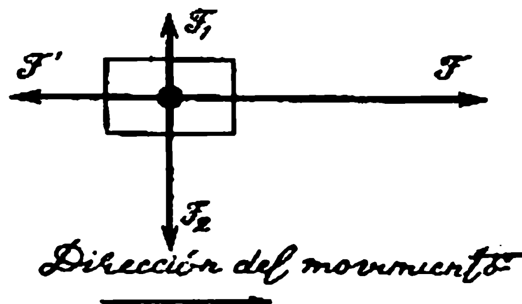


FIG. 15.

De la fuerza que actúa en el sentido del movimiento se dice que es la que realiza trabajo, y de la que tiene sentido contrario al del movimiento se dice que contra ella se realiza el trabajo.

La característica cuantitativa del trabajo es el producto de la fuerza que actúa sobre el cuerpo, en el sentido del movimiento, por el camino recorrido. Esta magnitud física se llama *trabajo.*

Supongamos que sobre un cuerpo actúa una multitud de fuerzas cuya suma geométrica es nula. El cuerpo se mueve uniforme y rectilíneamente. En este caso todas las fuerzas se pueden reducir a cuatro (fig. 15). Las fuerzas F_1 y F_2, de acuerdo con la definición admitida, no realizan trabajo. La fuerza F efectúa un trabajo igual a $F\Delta S$ (ΔS es el camino recorrido). El trabajo de la fuerza F' es igual a $-F\Delta S$. El signo menos indica que el trabajo se realiza contra la fuerza F'.

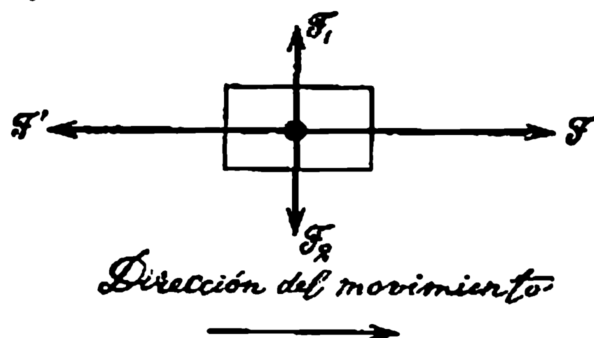


FIG. 16.

Consideremos ahora el movimiento acelerado de un cuerpo, es decir, el movimiento curvilíneo y variado. Como sabemos, en este caso actúa sobre el cuerpo una fuerza resultante dirigida a lo largo de la aceleración (¡pero, en el caso general, no a lo largo de la trayectoria!). Reduzcamos otra vez todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo a fuerzas dirigidas a lo largo del movimiento y a fuerzas perpendiculares a él (fig. 16). Ahora F no es igual a F' ni F_1 igual a F_2. Conservando la definición de trabajo que hemos dado antes, decimos, lo mismo que en el caso precedente, que las

fuerzas $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$ no realizan trabajo. El trabajo de la fuerza $\boldsymbol{F}'$ es, como antes, negativo, es decir, el trabajo se efectúa contra la fuerza $\boldsymbol{F}'$ y es igual a $F'\Delta S$. La fuerza $\boldsymbol{F}$ realiza el trabajo $F\Delta S$, que es mayor que el trabajo contra las fuerzas de resistencia. El exceso de trabajo se invierte en acelerar el cuerpo.

La desigualdad de las fuerzas F_2 y F_1 indica que el movimiento es curvilíneo. La diferencia entre las fuerzas $F_2 - F_1$ responde de la componente normal del vector aceleración.

Estudiemos el caso límite, el movimiento uniforme por una circunferencia. En este movimiento, como ya sabemos, la fuerza resultante está dirigida siguiendo el radio de la circunferencia, es decir, perpendicularmente a la dirección del movimiento. Por esto la fuerza centrípeta no realiza trabajo.

Así, pues, en el caso general del movimiento curvilíneo acelerado el exceso de trabajo no se invierte en crear la totalidad de la aceleración, sino sólo la componente tangencial del vector aceleración. Para un punto material esta afirmación se escribe así:

$$F - F' = ma_t \quad \text{y} \quad F\,\Delta S - F'\,\Delta S = ma_t\,\Delta S.$$

Recordamos que $(F - F')$ es la componente tangencial de la fuerza resultante F_t^{res}.

El trabajo que se invierte en acelerar el cuerpo (igual, por definición, a la proyección de la fuerza resultante sobre la dirección del movimiento multiplicada por la magnitud del camino recorrido) es igual al producto de la masa del cuerpo por la magnitud del camino recorrido y por la de la aceleración tangencial. Esta última igualdad se puede escribir de la forma $F\Delta S = F'\Delta S + ma_t\Delta S$ y leerla así: el trabajo de la fuerza que actúa sobre el cuerpo se compone del trabajo contra las fuerzas de resistencia y del trabajo que se invierte en acelerar el cuerpo.

Ejemplos. 1. Un avión de pasajeros, a reacción, cuyo peso $P = 70$ tf, se eleva a la altura $h = 10$ km. Si se moviera uniformemente el trabajo de elevación a dicha altura sería

$$A_1 = Ph = 7 \cdot 10^8 \text{ kgf} \cdot \text{m} = 68{,}6 \cdot 10^8 \text{ J} = 68{,}6 \cdot 10^{15} \text{ erg}.$$

Pero si la toma de altura se realiza durante un trayecto $S = 85$ km aumentando simultáneamente la velocidad (con la aceleración $a = 0{,}3$ m/s²), el gasto adicional de trabajo en conseguir la aceleración será

$$A_2 = ma \cdot S = 17{,}9 \cdot 10^8 \text{ J} = 17{,}9 \cdot 10^{15} \text{ erg} = 1{,}82 \cdot 10^8 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

2. En acepillar una tabla de 2 m de longitud y 0,2 m de anchura un carpintero realiza un trabajo de cerca de 150 kgf·m = 1470 J.

§ 10. Energía cinética

Como hemos dicho, al acelerar un cuerpo la fuerza resultante F^{res} realiza un trabajo

$$A = F_t^{res}\,\Delta S = ma_t\,\Delta S,$$

donde a_t es la aceleración tangencial media en el trozo de camino ΔS que se considera. Poniendo el valor de a_t, tenemos que

$$A = m\frac{\Delta v\cdot\Delta S}{\Delta t} = mv\cdot\Delta v,$$

siendo v la velocidad media, igual a $\frac{1}{2}(v_2+v_1)$, si v_2 y v_1 son las velocidades instantáneas al final y al principio del recorrido. Como $\Delta v = v_2 - v_1$ *),

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

es decir, el trabajo es numéricamente igual al incremento de la magnitud $mv^2/2$. Por eso la magnitud

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

se toma como medida de la energía del movimiento de un punto material; a la magnitud K le llamaremos *energía cinética*. La ecuación precedente se lee ahora así: el trabajo de la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo (es decir, el producto de la componente tangencial de la fuerza resultante por el camino recorrido) es igual al incremento de la energía cinética de dicho cuerpo. Esta ecuación resulta cómoda para resolver los problemas elementales de mecánica en que se da el trayecto durante el cual actuó la fuerza.

Con el término «energía» nos encontraremos más de una vez. Este es uno de los conceptos más importantes de la física. La energía, es decir, la capacidad de producir trabajo, es función del estado del cuerpo; a espensas de la disminución de la magnitud de esta función se realiza el trabajo. La energía cinética es función del estado de movimiento. Si la energía cinética varía de K_1 a K_2, el trabajo realizado al ocurrir esto será igual a $K_2 - K_1$ inde-

*) El mismo resultado obtendríamos escribiendo la expresión para el trabajo infinitesimal en la forma $dA = mv\,dv$ e integrándola desde el instante en que la velocidad era v_1 hasta el que era v_2:

$$A = \int_{v_1}^{v_2} mv\,dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

pendientemente del carácter del movimiento. Que la velocidad varíe rápida o lentamente, uniformemente o no, carece de importancia. La disminución de la energía cinética en una cantidad determinada produce siempre un mismo trabajo.

Una magnitud física puede tener sentido de energía, es decir, de reserva de trabajo, únicamente en el caso en que dicha magnitud sea función de estado.

Ejemplos. La unidad de energía en física atómica es el electrón voltio (eV); ésta es la energía cinética de un electrón acelerado por una diferencia de potencial de 1 voltio:

$$1\ \text{eV} = 1,6\cdot 10^{-12}\ \text{erg} = 1,6\cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

La energía de un protón acelerado en un sincrofasotrón es igual a 10 GeV $= 10^{10}$ eV $= 0,016$ erg $= 1,6\cdot 10^{-9}$ J.

La energía cinética de un gran avión reactor de pasajeros ($m = 100$ t, $v = 800$ km/h) es igual a

$$2,5\cdot 10^{16}\ \text{erg} = 2,5\cdot 10^{9}\ \text{J} = 2,5\cdot 10^{8}\ \text{kgf}\cdot\text{m}.$$

§ 11. Energía potencial

Veamos ahora algunos fenómenos en los cuales el trabajo realizado no va acompañado de una variación de la velocidad del cuerpo. Dos tipos de ejemplos serán objeto de nuestra atención: los primeros se refieren a la deformación elástica de los cuerpos, los segundos describen los hechos que tienen lugar cuando los cuerpos se mueven en el campo de la gravedad o en un campo eléctrico. Vamos a demostrar que en estos dos casos nos encontramos con la transformación del trabajo en una forma especial de la energía llamada energía potencial.

Primeramente nos detendremos en los fenómenos de deformación elástica. La experiencia demuestra que en toda deformación elástica de tracción, compresión, flexión, etc., se puede evidenciar una función del estado tal, que aumenta precisamente en la cantidad de trabajo realizada sobre el cuerpo. Esta función del estado o, dicho de otra forma, función de las propiedades del cuerpo y del grado de deformación, se llama *energía potencial de elasticidad.*

Demostraremos la existencia de esta energía solamente en un ejemplo de deformación elástica, la de tracción o compresión lineal. Demostraciones análogas pueden hacerse con otros tipos cualesquiera de deformación elástica.

Supongamos que cierta fuerza (muscular, por ejemplo) estira muy despacio un cuerpo sólido (un muelle). El trabajo que se invierte en alargar el cuerpo desde la longitud $l+s_1$ hasta la longitud $l+s_2$, donde l es la longitud del muelle no deformado es

$$A = F(s_2 - s_1).$$

La fuerza muscular es equilibrada en cada instante dado por la fuerza de elasticidad del muelle. Esta última, si los alargamientos no son muy grandes, es proporcional a la deformación s *):

$$F_{elast} = ks.$$

En la expresión del trabajo debemos poner el valor medio de la fuerza F, es decir, 1/2 $(ks_2 = ks_1)$. Entonces obtenemos **):

$$A = \frac{ks_2^2}{2} - \frac{ks_1}{2} = \Delta\left(\frac{ks^2}{2}\right),$$

o sea, el trabajo contra las fuerzas de elasticidad se invierte en aumentar la magnitud $ks^2/2$. Esta magnitud debe tomarse como medida de la energía elástica. A la magnitud

$$U_{elast} = \frac{ks^2}{2}$$

le llamaremos *energía potencial de elasticidad*.

Exactamente la misma forma tienen las fórmulas de la energía potencial de elasticidad para otros tipos de deformaciones. k caracteriza la rigidez del cuerpo con respecto a una forma concreta de deformación, y s es la medida de la deformación (por ejemplo, el ángulo de torsión, el ángulo de cizallamiento, etc.).

La magnitud U_{elast} es energía precisamente en el sentido que hablamos al final del § 10. Cualquiera que sea el procedimiento y la rapidez con que se deforme el cuerpo, a un mismo trabajo invertido le corresponderá siempre un mismo valor del incremento de la magnitud $ks^2/2$. Esto significa que $ks^2/2$ es una medida de energía, concretamente, de la energía potencial de elasticidad.

Ejemplos. 1. La energía potencial de un trozo de alambre de acero (módulo de Young $E = 20{,}6 \cdot 10^{10}$ N/m²) de 50 m de longitud, 10 mm² de sección transversal y alargado 1 cm, será

$$U_{elast} = \frac{ks^2}{2} = 20 \cdot 10^6 \text{ erg} \approx 2\text{J}.$$

2. El módulo de Young de la goma es $E = 7{,}85 \cdot 10^5$ N/m². Una china de 20 g de masa lanzada con un tirador se eleva hasta 20 m de altura. Para esto hay que transmitirle una energía de 3,92 J. Supongamos que al disparar la china se estiró la goma 40 cm, siendo su longitud inicial igual a 40 cm. Hallemos la sección que

*) Recordamos que la ley de la deformación elástica (ley de Hooke) se escribe de la forma $\frac{F}{S} = E\frac{s}{l}$, donde E es el módulo de elasticidad y S es la sección del cuerpo que se estira. Por lo tanto, la rigidez (coeficiente de proporcionalidad en la expresión de la fuerza de elasticidad) tiene el valor $k = ES/l$.

**) Al mismo resultado llegaríamos integrando el trabajo infinitesimal $dA = -ks\,ds$ entre los límites de s_1 a s_2.

debe tener la goma.

$$U_{elast}=\frac{ES}{l}\frac{s^2}{2};\quad S=\frac{2lU}{Es^2}=\frac{2\cdot 40\ \text{cm}\cdot 3{,}92\ \text{J}}{7{,}85\cdot 10^6\ \text{N/m}^2\cdot 1600\ \text{cm}^2}=0{,}25\ \text{cm}^2.$$

Las fuerzas de gravedad tienen la misma peculiaridad que las de elasticidad, a saber: el trabajo realizado en elevar un cuerpo en el campo de la gravedad se invierte en variar una función del estado de dicho cuerpo. En este caso la función que nos interesa depende de la posición del cuerpo dado con relación a los cuerpos que lo atraen. Esta función recibe el nombre de *energía potencial de gravitación*.

En primer lugar demostraremos la existencia de esta energía en los cuerpos que se hallan cerca de la superficie de la Tierra. Desde un punto 1 un cuerpo se traslada a otro punto 2 más alto siguiendo cierto camino curvilíneo. Dividamos esta trayectoria en trozos pequeños y sustituyamos la línea curva por una quebrada. Esto se puede hacer tan exactamente como se quiera. El trabajo que se emplea en trasladar el cuerpo a lo largo de uno de estos segmentos rectilíneos de longitud dl es igual a

$$dA=mg\,dl\operatorname{sen}\alpha \quad \text{o} \quad dA=mg\,dh,$$

donde dh es el incremento de la altura. Como mg es constante durante todo el recorrido, al hacer la suma de los trabajos correspondientes a todo el camino, mg se saca fuera de paréntesis (al integrar se saca fuera del signo de integración), lo que da para el trabajo total

$$A=mg(h_2-h_1),$$

donde h_1 y h_2 son las alturas respectivas de los puntos 1 y 2.

$$A=(mgh)_2-(mgh)_1=\Delta(mgh),$$

es decir, el trabajo de traslación es igual al incremento del producto mgh, que es la medida de la energía potencial de gravitación en este caso.

Está claro que

$$U=mgh$$

es una energía y que responde completamente al sentido que le damos a esta palabra. Cualquiera que sea el procedimiento por el cual se realice el trabajo, el camino por que se traslade el cuerpo y la rapidez con que se mueva, el trabajo de traslación del cuerpo desde el punto 1 hasta el punto 2 será siempre el mismo, puesto que el incremento de la energía depende únicamente de la posición que ocupen estos puntos o, en nuestro caso, de sus alturas.

Como el trabajo de traslación de un cuerpo en el campo de la gravedad no depende de la forma del camino recorrido, el trabajo de traslación por un contorno cerrado será nulo.

Advertimos que el origen que se tome para la lectura de h no desempeña ningún papel. Si convenimos medir h desde la superficie de la Tierra, la energía potencial de un cuerpo que se encuentre en el fondo de un pozo será negativa.

La fórmula escrita anteriormente no sirve para los cuerpos que se encuentran a gran distancia de la Tierra, por ejemplo, para la Luna. En efecto, como se aclaró en el § 2, para grandes distancias la fórmula aproximada de la gravitación mg debe sustituirse por la exacta $\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$.

Calculemos el trabajo que realizan las fuerzas de gravitación. Convencionalmente consideraremos positivo el trabajo que efectúan las fuerzas del sistema y negativo el que se realiza contra dichas fuerzas. Supongamos que dos cuerpos que se atraen se aproximan entre sí, siguiendo la línea de acción de las fuerzas, en un trozo infinitamente pequeño, $-dr$, del espacio que los separa (se toma con signo menos porque r disminuye). En este caso

$$dA = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr.$$

Pero $\frac{dr}{r^2} = d\left(-\frac{1}{r}\right)$. Por consiguiente

$$dA = -d\left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r}\right).$$

El trabajo se realiza a costa de la disminución de la magnitud $U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$, que es la medida de la energía de gravitación en el caso general:

$$dA = -dU.$$

La magnitud

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

es la energía potencial de gravitación en el caso general.

La energía potencial de gravitación es nula si los cuerpos se encuentran a una distancia infinitamente grande uno del otro. Al acercarse los cuerpos aumenta el valor absoluto de U, pero como U es negativa, lo mismo que en el caso de la fórmula aproximada para los cuerpos que se hallan cerca de la Tierra, la energía potencial será tanto menor cuanto más cerca se encuentren entre sí los cuerpos que se atraen. Está claro que, si se quiere, puede cambiarse el origen de la lectura de U y hacer que esta magnitud sea positiva en el intervalo de valores que nos interese.

No es difícil demostrar la relación que existe entre la fórmula general de U y su caso particular $U = mgh$. En efecto, sustituyendo

r por $R+h$, donde R es el radio de la Tierra, obtenemos

$$U=-\frac{\gamma Mm}{R+h}=-\frac{\frac{1}{R}\gamma Mm}{1+\frac{h}{R}}$$

(M es la masa de la Tierra). Pero $\frac{h}{R}$ es una cantidad pequeña, por lo que con suficiente exactitud $\frac{1}{1+\frac{h}{R}}=1-\frac{h}{R}$, de donde

$$U=-\gamma\frac{Mm}{R}+mgh.$$

Cambiando el origen de la lectura de U, es decir, tomando como cero la energía potencial del cuerpo que se halla en la superficie de la Tierra, llegamos a la fórmula $U=mgh$.

Ejemplo. Para que se comprenda mejor el sentido de los resultados obtenidos calcularemos la energía potencial de un cuerpo de masa $m=1$ kg en la superficie de la Tierra y a 1000 km de distancia sobre dicha superficie.

La energía potencial en la superficie de la Tierra

$$U_0=-\gamma\frac{Mm}{R}\approx 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}8\cdot 10^{24}\cdot 1}{6{,}3\cdot 10^{6}}=-6{,}1\cdot 10^{7}\text{ J}=-6{,}1\cdot 10^{14}\text{ erg}.$$

La energía potencial a 1000 km de distancia

$$U_{1000}=-6{,}67\cdot 10^{11}\cdot\frac{5{,}8\cdot 10^{24}\cdot 1}{7{,}3\cdot 10^{6}}=-5{,}3\cdot 10^{7}\text{ J}=-5{,}3\cdot 10^{14}\text{ erg}.$$

De este cálculo se deduce que: 1) la energía potencial de un cuerpo en el campo gravitario de la Tierra es siempre negativa y aumenta a medida que se aleja de la Tierra (puesto que convinimos en que tiende a cero cuando $h\to\infty$); 2) la variación de la energía potencial de un cuerpo que se eleva sobre la Tierra no se describe, en general, por la fórmula $mg(h_2-h_1)$. En efecto,

$$U_{1000}-U_0=-5{,}3\cdot 10^{7}-(-6{,}1\cdot 10^{7})=0{,}8\cdot 10^{7}\text{ J},$$

mientras que el cálculo por la fórmula $mg(h_2-h_1)$ da $0{,}98\cdot 10^{7}$ J. Pero en aquellos casos en que se trata de elevaciones a alturas $h\ll R$ (R es el radio de la Tierra) puede utilizarse la fórmula simplificada $mg(h_2-h_1)$.

Las expresiones de la energía potencial de gravitación y de *la energía potencial de la interacción eléctrica de las cargas* se parecen mucho.

Consideremos dos cargas eléctricas de igual signo, q_1 y q_2, que se hallen a la distancia r una de otra. Las cargas interaccionan (se repelen) de acuerdo con la ley de Coulomb. Por lo tanto, al aproximarlas entre sí en un pequeño espacio dr realizaremos un trabajo igual a $-dA=-\frac{q_1q_2}{r^2}dr$ (el signo menos del primer

miembro se debe a que el trabajo se realiza contra las fuerzas del sistema, y el del segundo, a que, como se produce una aproximación, dr es negativa). El cálculo, que no se diferencia en nada del que acabamos de hacer para las fuerzas de atracción gravitatoria, da para la energía de la interacción eléctrica de las cargas (que para abreviar se llama coulombiana) la expresión $U=\frac{q_1q_2}{r^2}$, es decir, aquí también $dA=-dU$.

La energía de interacción de las cargas de signos distintos será negativa y se comportará lo mismo que la gravitatoria. La energía de las cargas de igual signo es nula en el infinito y aumenta a medida que se aproximan las cargas.

Podemos limitarnos a estos ejemplos de energía potencial, aunque en algunos casos puede tomarse en consideración otras funciones del estado del cuerpo.

La energía potencial aparece siempre que entre los cuerpos o partículas que forman el sistema que se considera actúan fuerzas dependientes de la distancia entre los cuerpos. La energía potencial es la energía de interacción de los cuerpos. Si un sistema consta de multitud de cuerpos o partículas puede hablarse de su energía potencial total, que se compone de las energías de interacción entre todas las partículas (cada una con cada una de las demás). En el caso de cuatro partículas la energía potencial constará ya de seis sumandos, puesto que hay que contar la interacción del primer cuerpo con el segundo, tercero y cuarto, la del segundo con el tercero y cuarto y, finalmente, la del tercero con el cuarto.

En mecánica se tiene en cuenta únicamente la energía potencial de las fuerzas que actúan entre cuerpos distintos. Si los cuerpos son complejos y constan de multitud de partículas, la energía potencial de la interacción de estas partículas se considera constante durante los fenómenos mecánicos. La energía potencial de interacción de las partículas que componen un cuerpo es parte integrante de la energía interna de dicho cuerpo (cap. 9). Si se producen variaciones de la energía interna del cuerpo, el fenómeno deberá considerarse desde el punto de vista de las leyes de la termodinámica (cap. 9).

§ 12. Ley de conservación de la energía mecánica

Cualesquiera que sean las fuerzas que tomen parte en un movimiento, el trabajo de la fuerza resultante será siempre igual al incremento de la energía cinética del cuerpo, es decir,

$$F\Delta s=\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo pueden ser de elasticidad, de gravitación, eléctricas, de rozamiento, etc.

De las fuerzas que actúan se pueden separar siempre aquellas cuyo trabajo se invierte en cambiar la energía potencial. Estas fuerzas se llaman a veces, para abreviar, *potenciales* o poseedoras de potencial. La ecuación del trabajo puede escribirse de la forma

$$F_{pot}\Delta s + f\Delta s = \Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Aquí f son las fuerzas no potenciales. El trabajo de estas fuerzas es igual a la variación de la energía interna del cuerpo o del medio en que éste se mueve.

Sustituyendo el trabajo de las fuerzas potenciales por el incremento de la energía potencial con signo contrario, podemos escribir la ecuación anterior en la forma

$$f\,\Delta s = \Delta\left(\frac{mv^2}{2} + U\right).$$

La suma de las energías potencial y cinética de un cuerpo se llama *energía mecánica total*. Representando por $\mathscr{E}$ esta magnitud, obtenemos: $f\,\Delta s = \Delta\mathscr{E}$, es decir, la variación de la energía total de un cuerpo es igual al trabajo de las fuerzas no potenciales, por ejemplo, de las fuerzas de rozamiento.

Si el trabajo que se invierte en variar la energía interna del cuerpo es pequeño comparado con $\mathscr{E}$, la igualdad se transforma en la afirmación siguiente: $\Delta\mathscr{E}=0$ y $\mathscr{E}=\text{const}$. Esta es la ley o principio de conservación de la energía mecánica, que dice, que la energía mecánica total de un cuerpo se conserva.

Este principio se generaliza inmediatamente a un sistema formado por muchos cuerpos o partículas. Para cada cuerpo puede escribirse la ecuación del trabajo y después sumar todas estas igualdades. La energía total será igual en este caso a la suma de las energías cinéticas de los cuerpos más la energía potencial de la interacción:

$$\mathscr{E} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \ldots + U.$$

Si se toman en consideración todos los cuerpos de interacción (este sistema se llama *cerrado* o *aislado*), la forma de la ley sigue siendo la misma que para el caso de un solo cuerpo. La variación de la energía mecánica es igual al trabajo de las fuerzas no potenciales, y si este trabajo puede despreciarse, la energía mecánica total del sistema cerrado de cuerpos permanece invariable, es decir, se conserva.

La ley de conservación de la energía mecánica es, por una parte, consecuencia de las ecuaciones de la mecánica (de la ley de Newton); y, por otra parte, se puede considerar como un caso particular de la ley más general de la naturaleza, o sea, de la ley de conservación de la energía (cap. 9).

Ya en la mecánica nos encontramos con una gran variedad de transformaciones mutuas de la energía. Al estudiar el movimiento de un cuerpo por la acción de las fuerzas elásticas o de gravitación no es difícil advertir que el aumento de una de las formas de la energía mecánica va acompañado de la disminución de otra forma de la energía.

Así, por ejemplo, las fuerzas de la gravedad que actúan sobre un cuerpo que cae hacen que disminuya la energía potencial y que aumente la energía cinética de dicho cuerpo. La transformación inversa se produce cuando se eleva el cuerpo. Las fuerzas de elasticidad que obligan a una pelota lanzada a botar en la pared, hacen que disminuya la energía potencial de la pelota comprimida, que se transforma en energía cinética. La transformación contraria ocurre en el instante en que la pared detiene a la pelota lanzada (en el período desde que aún no existe deformación hasta la compresión máxima).

Un muelle alargado puede elevar un peso a cierta altura. Y, al contrario, el peso al caer alarga el muelle. Por consiguiente, la energía de elasticidad se puede transformar en energía de gravitación y viceversa.

Los ejemplos citados se refieren tanto a casos de transformación de una forma de la energía en otra concernientes a un mismo cuerpo, como a casos en que un cuerpo le comunica energía a otro.

Está claro que un cuerpo puede cederle a otro energía de una misma forma, por ejemplo, un peso tira de otro por medio de un hilo que pasa por una polea; una bola, al chocar con otra, le cede parte de su energía cinética, etc.

§ 13. Curvas de potencial. Equilibrio

La energía potencial de interacción de los cuerpos o partículas depende de su posición mutua, es decir, es siempre función de las coordenadas o de otros parámetros que caracterizan la posición de estos cuerpos en el espacio. En los casos más simples la energía potencial puede depender de una sola coordenada.

Consideremos la interacción de dos partículas cuya energía potencial viene determinada por la función $U(x)$, donde x es la distancia entre dichas partículas. Supongamos, para concretar, que las partículas se repelen con una fuerza F. La fuerza de inte-

racción hace que la distancia entre las partículas aumente en dx, es decir, se realizará el trabajo Fdx. Esto puede ocurrir a costa de la energía potencial de interacción U, que variará en $-dU$ (disminución de la energía).

Por lo tanto, $-dU=Fdx$, o

$$F=-\frac{dU}{dx},$$

es decir, en el caso de las fuerzas potenciales, la fuerza es la derivada de la energía potencial respecto del parámetro x con signo contrario. Entonces el carácter del problema mecánico se define simple y claramente por medio de las llamadas curvas de potencial, o sea, de unas gráficas en las cuales los valores de la energía potencial se toman en función del parámetro x (fig. 17).

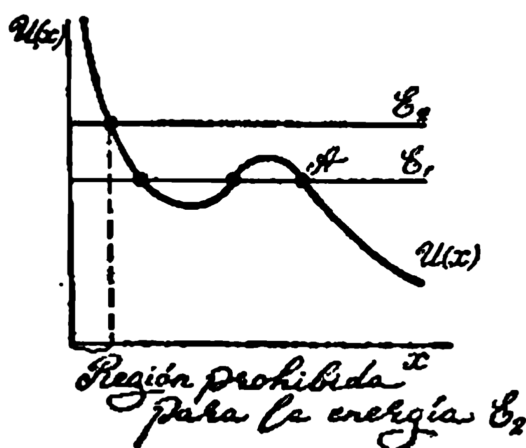


FIG. 17.

Al explicar la esencia de este método gráfico se recurre generalmente al ejemplo del movimiento de un cuerpo por una montaña. El dibujo de la curva de potencial resulta muy comprensible en este caso, ya que el perfil de la montaña y la forma de la energía potencial, que es proporcional a la altura h, coinciden salvo un factor constante.

En la curva de potencial hay pozos, vértices, y subidas y bajadas pendientes y suaves. La forma de la curva permite indicar inmediatamente en qué tramos de la trayectoria se realiza un trabajo mayor o menor y cuál es el signo de dicho trabajo. Cuanto más pendiente es la curva de potencial, tanto mayor es la fuerza que actúa sobre el cuerpo. De acuerdo con el conocido sentido geométrico de la derivada, la fuerza viene caracterizada por la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la tangente geométrica a la curva de potencial.

La validez de la fórmula que relaciona la energía potencial y la fuerza es completamente evidente para aquellos casos particulares de energía potencial que hemos tomado en consideración. Para la energía potencial de un cuerpo cerca de la superficie de la Tierra

$$U=mgh \quad \text{y} \quad F=-\frac{dU}{dh}=-mg;$$

para un cuerpo en un campo gravitatorio en el caso general

$$U=-\gamma\frac{m_1m_2}{r} \quad \text{y} \quad F=-\frac{dU}{dr}=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2};$$

para un cuerpo sometido a una acción elástica

$$U=\frac{kx^2}{2} \quad \text{y} \quad F=-\frac{dU}{dx}=-kx;$$

y para una interacción eléctrica

$$U=-\frac{q_1q_2}{r} \quad \text{y} \quad F=-\frac{dU}{dr}=-\frac{q_1q_2}{r^2}.$$

Volviendo a la curva de potencial representada en la figura, podemos advertir inmediatamente en ella, teniendo en cuenta las observaciones hechas, los sitios en que la fuerza es máxima y los puntos en que la fuerza que actúa sobre el cuerpo es nula. Estos últimos puntos, es decir, las posiciones de equilibrio, son el fondo del pozo de potencial y el vértice de la montaña de potencial. Las posiciones en que la energía potencial es máxima corresponden a un equilibrio inestable, mientras que el fondo de un pozo de potencial es una posición de equilibrio estable.

Hemos dicho antes que la forma de la curva de potencial permite describir el posible movimiento del cuerpo. Esto no es completamente exacto: además de la curva de potencial es necesario conocer el valor de la energía mecánica total del cuerpo. Si se conoce este número, por la forma de la curva de potencial se puede hablar, en efecto, de los posibles movimientos del cuerpo o de la partícula.

En la fig. 17 se han trazado unas rectas horizontales cuyas ordenadas son $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$. Si $\mathcal{E}$ es la energía total de una partícula, por la gráfica se puede hallar en este caso no sólo la energía potencial, sino también la energía cinética como diferencia entre $\mathcal{E}$ y U.

El punto que se mueve no puede hallarse en posiciones en las cuales la energía potencial es mayor que la energía total. Por lo tanto, la recta horizontal $\mathcal{E}$ limita los posibles tramos del movimiento del cuerpo. En el caso en que la energía viene expresada por la recta inferior $\mathcal{E}_1$, el punto que se mueve tiene dos intervalos de posiciones posibles: puede estar en el pozo de potencial (y realizar en él un movimiento oscilatorio) o en la pendiente que hay a la derecha del punto A, donde se moverá hacia abajo o hacia arriba según que adquiera o pierda energía cinética.

Los razonamientos expuestos son iguales para curvas de potencial de cualquier naturaleza. En la fig. 18 se muestran varios tipos de curvas de potencial. La curva 18, *a* es la curva de potencial de un cuerpo que oscila en un resorte. El cuerpo oscilante se encuentra en un pozo de potencial con bordes simétricos. La curva

18, *b* es la de potencial típica de muchas partículas en interacción, como los átomos o las moléculas. Esta curva representa un pozo de potencial con uno de sus bordes muy empinado y el otro en pendiente suave. Sobre el eje de abscisas se ha tomado la distancia entre las partículas. Como puede verse por la curva, la energía potencial es bastante grande cuando las distancias son pequeñas, luego, al ir aumentando éstas, la energía potencial decrece, alcanza un mínimo y después aumenta lentamente tendiendo a cierto límite finito. El carácter del movimiento y la relación entre las dos partículas que interaccionan queda descrito con todo detalle por esta

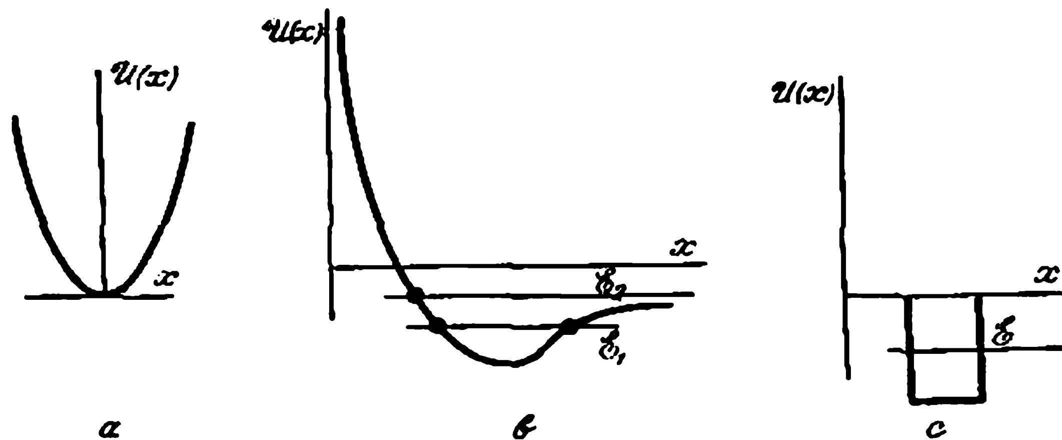


FIG. 18.

curva. Hay que distinguir dos casos: primero, cuando la energía mecánica total de este par de partículas viene expresada por la recta horizontal inferior $\mathscr{E}_1$, y segundo, cuando la energía total es igual a $\mathscr{E}_2$. En el primer caso el sistema no puede salir del pozo de potencial. Esto significa que la distancia entre las partículas se halla entre los límites indicados en la figura. El movimiento mutuo de las partículas sólo puede tener en este caso, carácter oscilatorio. Así ocurre, por ejemplo, en una molécula diatómica estable. El segundo caso es inverso al primero. La energía total de interacción de las partículas es demasiado grande para que estén ligadas constantemente. El sistema puede salir del pozo de potencial, es decir, el enlace entre las partículas no puede existir, las partículas pueden separarse hasta una distancia tan grande como se quiera.

La tercera curva de la figura es la llamada caja de potencial. Recordando que la fuerza se caracteriza por la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la tangente geométrica a la curva de potencial, vemos que la energía potencial puede expresarse en forma de caja si el cuerpo o la partícula se mueve libre-

mente sin que sobre él actúen fuerzas, pero no puede salir de los límites de la región dada mientras la energía total sea menor que la altura de los bordes del pozo.

3

IMPULSO

§ 14. Conservación del impulso

Se llama impulso o impulsión de un cuerpo o punto material el producto de la masa del punto por el vector velocidad, $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ (esta magnitud se denomina también cantidad de movimiento). El impulso $\boldsymbol{p}$ es, por lo tanto, una magnitud vectorial. Si se trata de un sistema de cuerpos o de puntos, el impulso de dicho sistema será igual a la suma geométrica de los impulsos de los puntos que constituyen el sistema:

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\ldots$$

La peculiaridad fundamental que hace que esta magnitud vectorial sea de interés para la física consiste en que, en un sistema cerrado, el vector $\boldsymbol{P}$ no varía cualesquiera que sean los movimientos que ocurran dentro del sistema. Este postulado se conoce con el nombre de *ley* o *principio de conservación del impulso.*

La ley de conservación del impulso se deduce directamente de las leyes de Newton. Para cada uno de los cuerpos que integran un sistema cerrado es válida la ecuación

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F},$$

es decir,

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F}.$$

Veamos lo que ocurre si se suman estas ecuaciones escritas para todos los puntos. En el segundo miembro se encuentran las fuerzas que actúan sobre un cuerpo dado por parte de los demás. Es decir, la fuerza que actúa sobre el primer cuerpo es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre él por parte del segundo, tercero, etc. Utilizando subíndices dobles, esto se puede escribir así: $\boldsymbol{F}_{12}+\boldsymbol{F}_{13}+\boldsymbol{F}_{14}+\ldots$ Análogamente puede escribirse la expresión de la fuerza que actúa sobre el segundo cuerpo: $\boldsymbol{F}_{21}+\boldsymbol{F}_{22}+$ $+\boldsymbol{F}_{23}+\ldots$, sobre el tercero: $\boldsymbol{F}_{31}+\boldsymbol{F}_{32}+\boldsymbol{F}_{33}+\ldots$, etc. No es di-

fícil comprender que, al sumarlos, los segundos miembros de las igualdades dan cero. A cada sumando de una fila puede encontrársele siempre, en otra fila, otro igual y de signo contrario de acuerdo con la regla de la acción y la reacción. Así, la fuerza $\boldsymbol{F}_{12}$ se anula al sumarla con $\boldsymbol{F}_{21}$, la fuerza $\boldsymbol{F}_{13}$, al sumarla con $\boldsymbol{F}_{31}$, etc. Por esto, en un sistema cerrado se cumple la igualdad

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt}+\frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt}+\frac{d\boldsymbol{p}_3}{dt}+\ldots=0;$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3+\ldots)=0,$$

o bien

$$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3+\ldots=\text{const}.$$

Esta es la ley de conservación del impulso. La magnitud y la dirección de los impulsos de los distintos cuerpos puede variar, pero su suma geométrica para el sistema cerrado no cambia.

Valores de algunos impulsos: el impulso de un electrón de energía 5eV$\sim$ $\sim 12\cdot 10^{-20}$ g·cm/s, el de una bala de fusil $\sim 8\cdot 10^{5}$g·cm/s$=8$ kg·m/s, el de un tren de mercancías $\sim 10^{7}$ kg·m/s.

§ 15. *Centro de inercia*

Los procedimientos para hallar el centro de gravedad de cualquier cuerpo son conocidos. Un cuerpo sujeto por su centro de gravedad se encuentra en una posición de equilibrio indiferente. Si

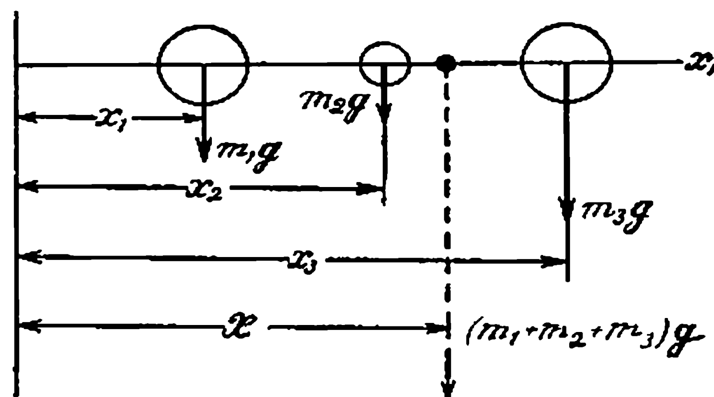


FIG. 19.

tenemos un sistema de puntos materiales o si un cuerpo continuo se descompone convencionalmente en volúmenes elementales, considerando cada uno como un punto material, se puede dar la expresión analítica de la posición del centro de gravedad.

Aplicando la regla de composición de fuerzas paralelas (fig. 19), podemos hallar en el caso en que los puntos materiales se encuentren a lo largo de una recta, por ejemplo, del eje x, la siguiente expresión de la posición del centro de gravedad:

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}.$$

Aquí x_1, x_2, x_3, ... son las coordenadas de los puntos materiales, y m_1, m_2, m_3, ... son sus masas respectivas. Las masas aparecen en vez de los pesos, ya que la aceleración de la gravedad se simplifica.

En la mecánica teórica se demuestra que, cuando los puntos materiales están dispuestos arbitrariamente, la expresión de la posición del centro de gravedad tiene la forma

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots},$$

donde $\boldsymbol{R}$ es el radio vector (vector de posición) del centro, y $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, ... son los radios vectores de los puntos.

El hecho de que la aceleración de la gravedad se haya simplificado en estas fórmulas nos permite considerar que el punto hallado tiene también un sentido objetivo en el caso en que el cuerpo se trasladara a otras condiciones gravitatorias e incluso si se encontrase en condiciones de ingravidez en el espacio interplanetario. Por esta razón sería conveniente sustituir el tan difundido nombre de «centro de gravedad» por el de *centro de inercia*, del cuerpo *), que guarda relación directa con la esencia de la cuestión.

Ahora veremos el profundo sentido que tiene esta denominación. Consideremos la velocidad del movimiento del centro de inercia

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt}.$$

Aplicando la fórmula para hallar el centro de inercia, obtenemos

$$\boldsymbol{V} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}.$$

En el numerador figura el impulso total, que se conserva en el sistema cerrado; esto significa que en el segundo miembro de esta igualdad se encuentra una cantidad constante. De aquí se deduce que el vector velocidad del centro de inercia no varía ni en magnitud ni en dirección. O, dicho en otras palabras, el centro de inercia de un sistema cerrado de puntos materiales realiza un movimiento inercial.

*) Se suele llamar también *centro de masas* (*N. del T*).

Como sabemos, todos los sistemas inerciales de coordenadas tienen las mismas propiedades. Por esto siempre se puede pasar al sistema de coordenadas asociado al centro de inercia del sistema que se estudia y considerar que este punto interesante se halla en reposo. En la física atómica se estudian con frecuencia las colisiones de partículas entre sí. Para este fin se utilizan dos sistemas de coordenadas: el de laboratorio (sistema de coordenadas natural del observador) y el asociado con el centro de inercia de las partículas que chocan. La comodidad que resulta del empleo del segundo sistema de referencia es evidente: el impulso total de las partículas es nulo.

§ 16. *Choques*

El término «choque», «colisión» o «percusión» debe entenderse con un sentido algo más amplio que el que se le da en el uso ordinario. En los problemas mecánicos que nos interesan ahora, se consideran colisiones los encuentros de cualquier tipo, de dos o más cuerpos en los cuales la interacción dura muy poco. De este modo, además de los fenómenos que pueden considerarse choques en todos los sentidos de la palabra, como, por ejemplo, el de dos bolas de billar, el de los átomos o los núcleos atómicos, también se incluyen aquellos sucesos como el salto de un hombre al apearse de un tranvía o al subirse a él o el impacto de una bala en una pared. En estas interacciones tan cortas se producen fuerzas tan grandes, que el papel de todas las fuerzas que actúan constantemente se puede considerar insignificante. Esto nos da derecho a tratar los cuerpos que chocan como si fueran un sistema cerrado y a aplicarles la ley de conservación del impulso.



FIG. 20.

En muchas colisiones la interacción dura milésimas de segundo. En este tiempo la fuerza llega hasta su valor máximo y luego cae hasta cero. La curva típica de la fuerza en un choque se representa en la fig. 20. En cada instante de la colisión, la relación entre la fuerza que actúa sobre cualquiera de los cuerpos y el impulso de este mismo cuerpo viene dada por la segunda ley de Newton:

$$\frac{d}{dt}(mv) = F.$$

Escribiendo esta expresión en la forma $F\Delta t=\Delta(mv)$, podemos decir, que el producto del valor medio de la fuerza por el tiempo que dura su acción debe ser igual a la variación del impulso. Una afirmación más exacta se obtiene integrando la ecuación antes escrita desde el momento inicial del choque hasta el fin de la interacción. Es evidente que

$$\int_0^T F\,dt=(mv)_2-(mv)_1.$$

La integral del primer miembro se suele llamar impulso de la fuerza. El sentido geométrico de esta cantidad, en la gráfica, es el área situada bajo la curva del choque (véase la fig. 20).

En dependencia de las propiedades elásticas de los cuerpos, las colisiones pueden transcurrir de formas muy diversas. Se acostumbra destacar dos casos extremos: el del choque de cuerpos perfectamente elásticos y el del choque de cuerpos totalmente inelásticos.

Nos detendremos primeramente en el segundo de ellos. Se entiende por *choque inelástico* el encuentro de dos cuerpos cuyo resultado es la unión de ambos. A la categoría de choques inelásticos pertenecen: el choque de dos bolas de arcilla, el salto de un hombre sobre una vagoneta en movimiento, la colisión de dos iones de signos distintos para formar una molécula, la captura de un electrón por un ion positivo, etc.

Supongamos que antes del choque los cuerpos se movían con las velocidades $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$; el impulso total era igual a $m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2$. Después de encontrarse los cuerpos tendrán una masa total igual a m_1+m_2 y se moverán con una velocidad $\boldsymbol{V}$. El impulso del sistema después de la colisión será igual a $(m_1+m_2)\boldsymbol{V}$. La ley de conservación del impulso impone que se cumpla la igualdad

$$(m_1+m_2)\,\boldsymbol{V}=m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2,$$

de donde después del choque inelástico, la velocidad de los cuerpos vendrá expresada por la fórmula

$$\boldsymbol{V}=\frac{m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2}.$$

El vector impulso, después de encontrarse los cuerpos, debe ser igual a la suma de los vectores impulso de dichos cuerpos antes del choque.

Si los cuerpos se mueven al encuentro siguiendo una recta, después del choque se moverán en el sentido en que iba antes el cuerpo cuyo impulso era mayor. Si los impulsos de los cuerpos son iguales en magnitud, $m_1\boldsymbol{v}_1=-m_2\boldsymbol{v}_2$ y, por lo tanto, $\boldsymbol{V}$ será igual a cero, es decir, los cuerpos se detendrán después de chocar.

El choque inelástico va acompañado de una transformación energética. En el ejemplo que acabamos de poner se ve que la energía cinética puede anularse. No es difícil calcular la cantidad en que aumenta la energía interna de los cuerpos que se encuentran en un caso cualquiera; para esto basta plantear la diferencia

$$\frac{m_1+m_2}{2}V^2-\left(\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}\right).$$

Estudiemos ahora los *choques perfectamente elásticos*, es decir, aquellos en que los cuerpos recuperan totalmente su forma. Esto significa que en el estado de estos cuerpos no se producen cambios algunos, que su energía potencial e interna, antes y después de la colisión, no varía y, por consiguiente, que su energía cinética debe conservarse. Para dos cuerpos que choquen de este modo se pueden plantear dos ecuaciones: la de la ley de conservación del impulso y la de la ley de conservación de la energía cinética. Llamemos m y M a las masas de los cuerpos. Siempre es posible elegir un origen de coordenadas que coincida con uno de los cuerpos. Esto simplifica el problema sin disminuir el carácter general de su consideración. Por esta razón podemos suponer que el cuerpo de masa M está en reposo hasta que se produce el choque. En este caso, las dos leyes de conservación indicadas dan los siguientes resultados:

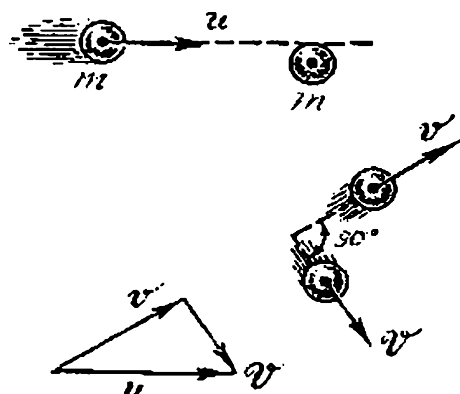


FIG. 21.

$$m\boldsymbol{u}=m\boldsymbol{v}+M\boldsymbol{V},\quad \frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2;$$

donde $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son respectivamente las velocidades del cuerpo de masa m antes del choque y después de él, y $\boldsymbol{V}$ la velocidad del cuerpo de masa M después del choque.

Veamos varios ejemplos de aplicación de estas ecuaciones. Ante todo estudiaremos el choque no central *) de dos esferas de igual masa (fig. 21). En este caso se simplifican las masas en las dos ecuaciones y obtenemos

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{V},\qquad u^2=v^2+V^2.$$

*) El choque se llama central si las esferas, antes de la colisión, se mueven siguiendo la recta que pasa por sus centros.

De la igualdad vectorial se deduce claramente que el vector $\boldsymbol{u}$ es el que cierra el triángulo construido sobre los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{V}$. Y de la ecuación de la derecha se desprende, que el triángulo en que $\boldsymbol{u}$ es la hipotenusa debe ser rectángulo; por consiguiente, después de chocar dos partículas de igual masa, sus velocidades deben estar dirigidas formando un ángulo recto entre sí. Esta deducción se puede comprobar fácilmente en el juego de billar: la dirección del movimiento de la bola que recibió la tacada y la de la bola «propia» forman un ángulo de 90°. En lo demás, el carácter de la variación del vector velocidad no se determina por nuestras ecuaciones, en las cuales no se tiene en cuenta la desviación de la linea de choque respecto de la linea que pasa por los centros de las esferas.

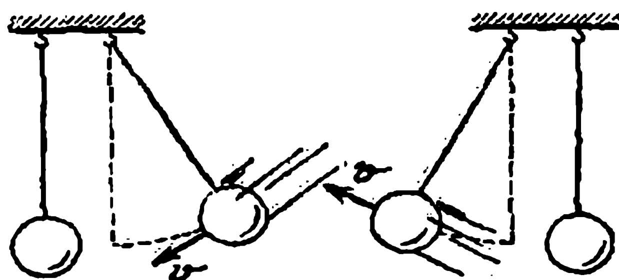


FIG. 22.

Los datos completos acerca del movimiento de las esferas después del choque los podemos obtener si nos limitamos al caso del choque central. El movimiento de las esferas después de la colisión se efectuará entonces a lo largo de la misma recta. Por esto se puede prescindir del uso de los símbolos vectoriales, pero teniendo en cuenta que el cambio de signo de la velocidad significará el cambio del sentido del movimiento. En estas condiciones no hace falta estudiar el caso simplificado de las masas iguales. Las ecuaciones del choque central tienen la forma

$$mu = mv + MV, \qquad mu^2 = mv^2 + MV^2.$$

Reduciendo estas ecuaciones a la forma

$$m(u - v) = MV, \qquad m(u^2 - v^2) = MV^2$$

y dividiendo la una por la otra, hallamos que $u+v=V$ o $u=-(v-V)$. Advertimos que la velocidad relativa de la esfera m, con respecto a la esfera M, antes del choque (que hemos designado por u) es igual, con signo contrario, a esta misma velocidad relativa después del choque.

Si en la fórmula de la ley de conservación del impulso se hace $V=u+v$, se obtiene una expresión interesante. Hallamos la expresión de la velocidad de la esfera m después de la colisión en

función de la velocidad de esta misma esfera antes del choque:

$$v = \frac{m - M}{m + M} u.$$

Si las masas de las esferas son iguales, la velocidad v se anula. Este fenómeno se puede demostrar claramente con bolas de acero o de marfil. Parece que las bolas se ceden las velocidades en este choque (fig. 22). En los demás casos, la esfera m se retarda. Cuanto más próximos son los valores de las masas de las esferas percusoras,



FIG. 23.

tanto más espectacular es el retardo. No es difícil calcular que un neutrón (masa 1) rebotará en el núcleo de un átomo de carbono (masa 12) perdiendo $\frac{2}{13}$ de su velocidad, y en el de un átomo de uranio (masa 235), perdiendo únicamente $\frac{2}{236}$ de la misma.

Entre los cuerpos macroscópicos cumplen bien las leyes del choque elástico materiales como el marfil, el acero, la goma y otros. Estos materiales tienen la propiedad de recuperar perfectamente su forma, como puede verse en la interesante fotografía que reproduce la fig. 23, en la que por medio de la llamada «cámara lenta» se ha logrado filmar el instante en que una pelota de hockey choca contra un obstáculo. En $\frac{1}{5000}$ de segundo la pelota se contrae en casi un centímetro, y el mismo tiempo se invierte en

la fase de recuperación del golpe. En la primera fase la energía cinética del choque se transforma en energía potencial de compresión elástica. En la segunda fase la energía potencial se transforma en cinética. Si el choque es perfectamente elástico, esta transformación inversa debe restablecer completamente el valor de la energía cinética consumida en la primera fase del choque.

Nuestras fórmulas no abarcan el caso importante del choque elástico de una esfera con una pared (fig. 24). Como la energía cinética debe conservarse, la velocidad de la esfera no puede cambiar de valor. Y en cuanto se refiere a la dirección del movimiento después del choque, ésta debe formar con la normal un ángulo de $(90° - \alpha)$ igual al que formaba el vector velocidad antes del choque. En efecto, en el caso del choque con una pared lisa, la componente tangencial de la velocidad permanece invariable, ya que no existen fuerzas tangenciales de adhesión a la pared. Como puede verse en la figura, el incremento del impulso es numéricamente igual a $2mv$ sen α y está dirigido a lo largo de la normal a la pared. De acuerdo con la ley fundamental de la mecánica, en el instante del choque, la fuerza que actúa sobre la esfera por parte de la pared debe tener la misma dirección que el vector variación del impulso. Por esto, el ángulo de incidencia de la esfera también debe ser igual a su ángulo de reflexión.

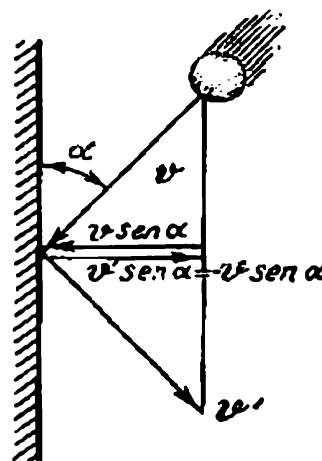


FIG. 24.

Examinemos el choque inelástico basándonos en el ejemplo de un péndulo balístico (aparato para medir la velocidad de las balas). Este péndulo consiste en una caja llena de arena, cuya masa es M, que pende de una cuerda. La bala disparada entra en la caja y se atasca en la arena. El impulso de la bala antes del choque es mu, el del sistema después del choque, $(M+m)v$. Tenemos que

$$v = \frac{m}{m+M} u.$$

La caja adquiere la energía cinética $Mv^2/2$ y la invierte en elevarse a una altura h que satisface la condición

$$Mgh = \frac{Mv^2}{2}, \text{ es decir, } h = \frac{u^2}{2g}\left(\frac{m}{M}\right)^2 (m \ll M).$$

Sean $M = 10$ kg, $m = 10$ g y $u = 900$ m/s; entonces $h = 4$ cm.

Si en vez de aplicar la ley de conservación del impulso determinásemos h basándonos en la transformación completa de la energía cinética de la bala en energía potencial del péndulo, obtendríamos que $h = 40$ m (!). Esto significa que, en nuestro ejemplo, 3920 J de energía mecánica (el 99,9% de la reserva total) «desaparecieron» (se gastaron en calentar el sistema). Como cuerpos perfectamente

elásticos no existen, en todo choque «elástico» no se conserva la energía mecánica, sino que una parte de ella se transforma en energía del movimiento térmico de las moléculas y se dispersa. De esto volveremos a tratar en el cap. 11 (pág. 190).

Ahora, partiendo del ejemplo de las colisiones, demostraremos las ventajas que tiene el sistema de coordenadas asociado al centro de inercia.

Supongamos que hacia una bola de masa m, que se halla en reposo en un sistema de coordenadas de laboratorio, se lanza otra bola igual con la velocidad v. Si el choque es inelástico, una parte de la energía cinética del sistema $mv^2/2$ se transformará en calor. En otros sistemas de coordenadas la energía cinética de este par de bolas se expresará con otros números. En cuanto al calor desprendido se refiere, éste será siempre el mismo para el par de bolas dado y vendrá determinado por la velocidad de su movimiento *relativo*. Por esto, en vez de buscar, aplicando la ley de conservación del impulso, la fracción de energía cinética que se transforma en calor, calculada respecto al sistema de coordenadas de laboratorio, basta calcular la energía cinética con relación al sistema asociado al centro de inercia. Como en este sistema de coordenadas el impulso total de los cuerpos es nulo, después de la colisión inelástica se detienen las esferas: toda la energía cinética se transforma en calor. La energía cinética referida al sistema asociado al centro de inercia tendrá su valor mínimo.

En el sistema de coordenadas asociado al centro de inercia las bolas se mueven, una al encuentro de la otra, con la velocidad $\frac{1}{2}v$. La energía cinética de cada bola es igual a $\frac{1}{4}mv^2$, y la energía total del sistema es $\frac{1}{2}mv^2$. Esta será la cantidad de calor que se desprenderá en el choque inelástico. Cualquiera que sea la colisión, el desprendimiento de calor (o de otra forma de la energía) a costa de la energía cinética de los cuerpos sólo puede producirse en una cantidad que no exceda de la energía cinética calculada respecto al sistema asociado al centro de inercia. Y viceversa, para que se desprenda una cantidad de calor dada hace falta una cantidad de energía cinética equivalente a la calculada con respecto al sistema del centro de inercia.

Ejemplo. La reacción nuclear de bombardeo del nitrógeno N^{14} con partículas α transcurre según la ecuación



$$N^{14} + He^{4} \longrightarrow O^{17} + H^{1}$$

y se desarrolla con absorción de 1,13 MeV de energía. ¿Qué energía cinética deberá tener la partícula α, en el sistema de coordenadas de laboratorio, para que la reacción comience? A primera vista parece que para esto es suficiente la energía de 1,13 MeV. Pero ya sabemos que esto no es así. En el sistema de coordenadas

asociado al centro de inercia se necesita la energía de 1,13 MeV, pero en el de laboratorio la energía debe ser mayor.

En efecto, la velocidad del centro de inercia $\boldsymbol{v}_c=\frac{m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2}$, donde $m_1\boldsymbol{v}_1$ es el impulso de la primera partícula y $m_2\boldsymbol{v}_2$, el de la segunda. La velocidad de la primera partícula en el sistema de coordenadas del centro de inercia es $\boldsymbol{v}'_1=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_c=$ $=\frac{m_2}{m_1+m_2}(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)$; para la segunda partícula podemos escribir

$$\boldsymbol{v}'_2=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_c=\frac{m_1}{m_1+m_2}(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1).$$

De aquí se deduce que la energía cinética del sistema (α, N^{14}) en el sistema de coordenadas del centro de inercia será

$$K_{c.i}=\frac{1}{2}\mu(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)^2,\quad \text{donde}\quad \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

es la llamada masa reducida de ambas partículas. Vamos a suponer que el núcleo N^{14} está en reposo ($v_2=0$). Esta suposición es correcta, puesto que siempre se puede despreciar el movimiento térmico de los núcleos bombardeados (blancos) que, comparado con las enormes velocidades de las partículas incidentes, es lento. Entonces la energía cinética en el sistema de coordenadas de laboratorio será $K_l=\frac{1}{2}mv_1^2$ y, por consiguiente,

$$K_l=K_{c.i}\frac{m_1+m_2}{m_2}.$$

La reacción se desarrolla si $K_{c.i}=1{,}13$ MeV. Teniendo en cuenta que $m_1=4$ y $m_2=14$, tenemos que

$$K_l=1{,}13\cdot\frac{18}{4}=1{,}45\ \text{MeV}.$$

§ 17. *Fenómenos de rechazo*

La ley de conservación del impulso ayuda a comprender fácilmente los rasgos fundamentales de los efectos de rechazo en los disparos, en el movimiento de reacción y al estudiar otros problemas análogos.

Consideraremos primeramente el efecto de rechazo que tiene lugar en un sistema de referencia con respecto al cual, en el instante inicial, los cuerpos estén en reposo. En el caso de un disparo de cañón esta consideración es completamente natural. Si en el momento inicial un sistema, formado por dos o más cuerpos, está en reposo, su impulso total es nulo. Cualesquiera que sean los sucesos que ocurran después, el impulso total continuará siendo nulo. Por esto, si en un instante cualquiera se produce una explosión que hace que el sistema se divida en partes cuyas masas m_1, m_2, m_3, ..., se separen con las velocidades $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, ..., la suma de los impul-

sos $m_1v_1+m_2v_2+m_3v_3$, ... de las partes lanzadas deberá ser, lo mismo que antes, igual a cero.

Si se trata de un disparo de cañón (el sistema se divide en dos partes), la condición de igualdad a cero del impulso de este sistema de dos cuerpos tendrá la forma $mv+MV=0$; aquí las letras minúsculas se refieren a un cuerpo, por ejemplo, el proyectil, y las mayúsculas, al otro, es decir, al cañón. La división del sistema en dos partes sólo puede ocurrir al separarse éstas siguiendo una línea recta común. Por esta razón se puede prescindir de los signos vectoriales y escribir la condición anterior en la forma $mv=-MV$. Las velocidades del cañón y del proyectil deben ser inversamente proporcionales a sus masas. Por lo tanto, el efecto de rechazo será tanto más sensible cuanto mayor sea la masa del proyectil con respecto a la del cañón.

Son extraordinariamente interesantes los efectos de «rechazo continuo», que se producen en el movimiento de reacción. Estos fenómenos constituyen un capítulo peculiar de la mecánica que puede llamarse mecánica de la masa variable. Dichos fenómenos tienen lugar no sólo en los aviones reactores. Al contrario, puede señalarse toda una serie de fenómenos habituales en que nos encontramos con un movimiento semejante. Como ejemplo bastará citar el caso de un rollo de papel al desenrollarse o el de la caída de gotas que se condensan continuamente en la atmósfera (véase el ejemplo al final de este párrafo). Los fundamentos de la mecánica de la masa variable fueron sentados a finales del siglo XIX por el profesor I. V. Meschcherski. Como no tenemos posibilidad de detenernos en su obra, nos limitaremos a examinar un solo problema de esta rama, el concerniente a la velocidad posible del movimiento de los cohetes.

Un cohete se mueve con la velocidad v y en un instante determinado arroja cierta porción de gas combustible de masa dM. Como es natural, la masa del cohete disminuye en esta cantidad. Si la velocidad de salida de los gases se designa por u (velocidad no con respecto al cohete, sino al sistema inercial de referencia en que se define la velocidad de éste), el impulso de la materia que se separa del cohete será igual a $u\,dM$. La masa del cohete disminuye y su velocidad aumenta en la cantidad dv. El impulso de dicho cohete después de arrojado el combustible será igual a $(M-dM)\,(v+dv)$. De acuerdo con la ley de la conservación del impulso, podemos igualar el impulso Mv del cohete antes de arrojar la porción de combustible y el impulso del sistema después de salir el gas. Este último será igual a la diferencia entre el impulso del cohete y el de la masa de combustible. Así pues,

$$Mv=(M-dM)\,(v+dv)-u\,dM,$$

de donde, salvo infinitésimos de segundo orden,

$$dv = (u + v)\frac{dM}{M}.$$

Pero $u+v$ es la velocidad relativa de salida de los gases combustibles (con respecto al cohete). Llamando c a esta velocidad, llegamos a la siguiente ecuación del incremento de la velocidad del cohete: $dv = -c\frac{dM}{M}$. El signo menos se pone para tener en cuenta el aumento de la velocidad al disminuir la masa. Vemos que el incremento de la velocidad es igual a una fracción de la masa perdida, multiplicada por la velocidad relativa de salida del combustible.

Considerando que esta velocidad de salida es una cantidad constante, podemos integrar con facilidad la ecuación escrita. Si la masa del cohete era M_0, cuando su velocidad era v_0, y se hizo M, cuando esta velocidad se redujo a v, la integración da

$$\int_{v_0}^{v} dv = -c\int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M},$$

es decir,

$$v - v_0 = c\ln\frac{M_0}{M}.$$

Esta última fórmula fue deducida la primera vez por el creador de estructuras de cohetes e investigador de la teoría de las comunicaciones interplanetarias K. E. Tsiolkovski.

Tomando logaritmos decimales y llamando $m = M_0 - M$ a la diferencia de masas del cohete, o sea, a la masa del combustible arrojado, obtenemos la fórmula de Tsiolkovski en la forma

$$v = c\cdot 2{,}3\cdot \lg\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

(la velocidad inicial v_0 se supone igual a cero).

Si la velocidad de salida de los gases es de 2000 m/s, el cálculo por esta fórmula da las siguientes cifras características:

m/M	0,25	1,0	4,0	10,0	32,3	54	999
v, m/s	446	1386	3218	4817	7013	8000	13 815

Como puede verse en esta tabla, al aumentar la cantidad de combustible arrojado, la velocidad del cohete aumenta mucho más lentamente que fuera de desear. Para comunicarle al cohete una velocidad considerable hay que arrojar una cantidad de combustible enorme en comparación con la masa inicial del cohete.

Por ejemplo, para comunicarle la velocidad de 7 km/s, de la masa del cohete deberá quedar menos de $\frac{1}{30}$ parte.

Para que un cohete escape a la atracción de la Tierra hay que hacer que su velocidad sea aproximadamente igual a 11 km/s. Esta cifra se obtiene mediante los simples razonamientos que siguen. Para poder alejarse de la Tierra el cohete debe tener la energía cinética suficiente para realizar el trabajo de transporte del cuerpo desde la superficie del planeta hasta el infinito. Pero este trabajo contra las fuerzas de gravedad es igual a la diferencia entre la energía potencial del cohete en la superficie de la Tierra y la que tendría en el infinito. Como en el infinito la energía potencial es nula, la condición para alejarse de la Tierra tiene la simple forma siguiente

$$\frac{mv^2}{2}=\gamma\frac{mM}{R},$$

donde M y R son, respectivamente, la masa y el radio de la Tierra. Multiplicando por R el numerador y el denominador del segundo miembro de esta igualdad, recordando la fórmula de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra $g=\gamma\frac{M}{R^2}$, y simplificando la masa del cohete, hallamos la condición buscada: $v=\sqrt{2gR}$, que da la cifra de cerca de 11 km/s.

Suponiendo que la velocidad de salida de los gases es de 2000m/s*) se puede hallar por la fórmula de Tsiolkovski la relación m/M. Esta relación será igual a 244. Si queremos que un cohete se aleje de la Tierra tenemos que dotarlo de una estructura tal, que el viaje interplanetario lo emprenda tan sólo $\frac{1}{245}$ parte de la masa que tenga el cohete en reposo. Si se consiguiera que la velocidad de salida de los gases fuera tres veces mayor, es decir, hacerla llegar hasta 6 km/s, la relación m/M disminuiría hasta 5,3. Pero, al parecer, no es posible por ahora, por lo menos si juzga por el comunicado de prensa de 1968, acerca del viaje del «Apolo — 8» alrededor de la Luna, que decía: «a la atmósfera terrestre retornará un módulo de 5,3 toneladas de peso, que es lo único que queda de una nave de 3100 toneladas».

Las dificultades que hay que vencer para poner en órbita un satélite artificial de la tierra son menores. Para crear un satélite de este tipo se necesita una velocidad inicial menor. Si suponemos que la aceleración de la gravedad en las alturas a que deseamos establecer la órbita del satélite es aproximadamente igual a la que

*) La literatura soviética ha dado a conocer que los motores de combustible líquido pueden proporcionar velocidades de salida de los gases de hasta 4500 m/s.

existe en la superficie de la Tierra, la ley de la mecánica, escrita para dicho satélite, tendrá la forma $mg=ma$, y como el satélite se mueve por una circunferencia, la aceleración centrípeta $a=v^2/R$. De aquí hallamos la velocidad de rotación del satélite $v=\sqrt{gR}$, es decir, 8 km/s. Si a un cohete se le comunica esta velocidad, se convierte en satélite de la Tierra. Por la tabla que hemos dado, calculada para 2000 m/s de velocidad de salida de los gases, vemos que el valor de m/M, necesario para que el cohete adquiera la velocidad de 8 km/s, es igual a 54.

Ejemplo de movimiento de un cuerpo de masa variable. Supongamos que una gota de agua cae en una atmósfera saturada de vapor de agua. En un instante t, la gota tiene la masa m y el radio r. Durante el tiempo dt el volumen de la gota y, por consiguiente, su masa (considerando la densidad igual a 1), aumenta en la cantidad $4\pi r^2 dr$. Por lo tanto, la velocidad con que aumenta la masa $\frac{dm}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$. Al mismo tiempo, por razonamientos físicos, está claro que la velocidad de condensación $\frac{dm}{dt}$ del vapor de agua debe ser proporcional a la superficie de condensación ($4\pi r^2$). De aquí se deduce que $\frac{dr}{dt}=\text{const}$ y $r=kt$, donde k es un coeficiente de proporcionalidad.

Planteemos la ecuación del movimiento de esta gota en el campo de atracción de la Tierra. Nos interesa la variación del impulso $d(mv)$, que por la ley fundamental de la mecánica es igual a Fdt, siendo $F=mg$. Tenemos que $F=\frac{d}{dt}(mv)$, es decir, $mg=m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}$. Sustituyendo aquí m y r por sus respectivas expresiones, obtenemos $\frac{dv}{dt}=g-\frac{3v}{t}$. La integración de esta ecuación demuestra que $v=\frac{g}{4}t$, es decir, la gota cae con la aceleración constante $\frac{1}{4}g=2,45$ m/s². La resistencia del aire no se ha tenido en cuenta al hacer el cálculo.

4

ROTACIÓN DE UN SÓLIDO

§ 18. Energía cinética de rotación

En este capítulo se estudiarán cuerpos «absolutamente rígidos». Esto significa que todas las deformaciones de todo género que pueden ocurrir al moverse el cuerpo se pueden despreciar y suponer que las distancias entre las partículas de dicho cuerpo permanecen invariables.

Consideremos un sólido que gira alrededor de un eje fijo que pasa por él (fig. 25). Dividimos mentalmente este cuerpo en pequeños volúmenes cuyas masas Δm_1, Δm_2, ... se encuentren respectivamente a las distancias r_1, r_2, ... del eje de rotación. A los distintos valores de las distancias corresponderán diferentes velocidades de movimiento v_1, v_2, ... Nos interesa la energía cinética de rotación de todo el sólido. Esta energía se compone de las energías cinéticas de las partículas Δm_1, Δm_2, ..., etc.

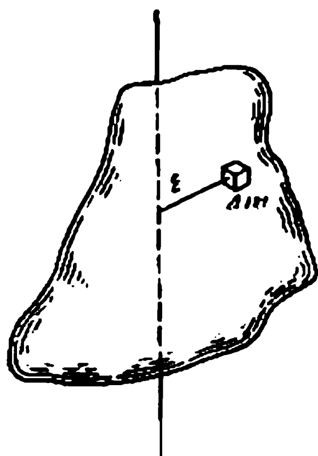


FIG. 25.

$$K_{rot} = \frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} + \frac{\Delta m_2 v_2^2}{2} + \frac{\Delta m_3 v_3^2}{2} + \ldots$$

La velocidad del movimiento circular de un punto cualquiera del cuerpo puede expresarse sin dificultad en función de la velocidad angular ω de rotación de este último. Si el cuerpo gira en el tiempo dt un ángulo $d\varphi$, la derivada $d\varphi/dt$ recibe el nombre de *velocidad angular*:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

En el caso del movimiento uniforme esta fórmula se transforma en la relación $\omega = 2\pi/T$ que ya conocía el lector. La magnitud ω se mide generalmente en radianes por segundo. Si el cuerpo da 1 vuelta por segundo, su velocidad angular será igual a 2π rad/s.

Todos los puntos de un cuerpo en rotación tienen distintas velocidades v (que llamaremos *lineales*), pero la misma velocidad angular ω. Cuando el cuerpo gira un ángulo φ el punto recorre un arco $ds = rd\varphi$. Dividiendo ambas partes de esta igualdad por el tiempo que dura el movimiento dt, hallamos la relación entre la velocidad lineal y la angular:

$$v = \omega r.$$

De este modo, la fórmula que ya conocíamos del movimiento uniforme es correcta en el caso general.

Por medio de esta relación se puede transformar la expresión de K_{rot} del modo siguiente:

$$K_{rot} = \frac{\omega^2}{2}(r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \ldots).$$

La cantidad que figura entre paréntesis no depende de la velocidad del movimiento, pero caracteriza las propiedades inerciales del cuerpo en rotación: cuanto mayor sea la cantidad comprendida

entre paréntesis, tanto mayor será la energía que hay que gastar para conseguir la velocidad dada. Por esto, la magnitud

$$I = r_1^2\Delta m_1 + r_2^2\Delta m_2 + \ldots$$

se llama *momento de inercia* del cuerpo, y la expresión $r^2\Delta m$ es el *momento de inercia* del punto. El valor de I puede escribirse de un modo más reducido

$$I = \int r^2 dm;$$

en este caso la integración (suma) se extiende a todos los puntos del cuerpo.

La fórmula de la energía cinética del cuerpo que gira toma entonces la forma

$$K_{rot} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Esta fórmula es correcta para un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo. Si se trata de un cuerpo que rueda, como, por ejemplo, una esfera, una rueda, etc., la energía del movimiento se compondrá de la energía de rotación y de la energía del movimiento de traslación. Si el cuerpo que rueda tiene la masa M, el momento de inercia I, la velocidad de traslación v y la de rotación ω, su energía cinética será

$$K_{rod} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Esta fórmula resulta ser válida para cualquier movimiento arbitrario de un sólido. En la mecánica teórica se demuestra que el movimiento arbitrario puede descomponerse en un conjunto de movimiento de traslación y de rotación. En este caso la rotación debe considerarse con respecto al eje que pasa por el centro de inercia.

§ 19. Momento de inercia

Observando atentamente la fórmula del momento de inercia vemos, que el valor de I depende del carácter de la distribución de la masa con respecto al eje de rotación. Los puntos que se encuentran lejos del eje de rotación hacen una aportación considerablemente mayor a la suma que los que están cerca.

Calculemos el momento de inercia de un disco plano, de radio r, con respecto al eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano del disco (fig. 26). La masa de un anillo elemental de radio x será $dm=\rho\cdot 2\pi x dx$, donde ρ es la densidad del material del disco. El momento de inercia de este anillo $dI_1=dm\cdot x^2$, y el momento

de inercia de todo el disco

$$I_1 = \int_0^r dI_1 = \int_0^r \rho \cdot 2\pi x^3 \, dx = 2\pi\rho \frac{r^4}{4} = \frac{mr^2}{2}.$$

Es evidente que, con respecto a este mismo eje, el momento de inercia del anillo que tiene toda su masa concentrada en la circunferencia exterior, de radio r, será $I_2 = mr^2$, es decir, $I_2 = 2I_1$.

El momento de inercia de un mismo cuerpo puede ser distinto, según cual sea la posición del eje de rotación. Si una aguja fina de hacer punto gira alrededor de su eje longitudinal, su momento

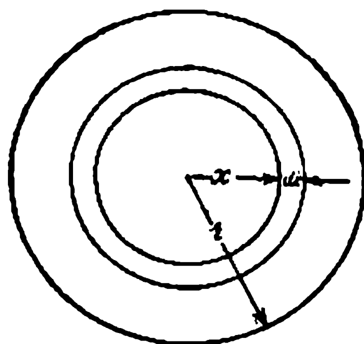


FIG. 26.

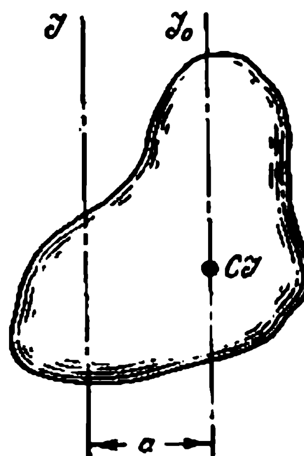


FIG. 27

de inercia será muy pequeño, porque todos los puntos se encuentran muy cerca del eje de rotación y, por consiguiente, todas las cantidades r_1^2, r_2^2, ... que figuran en la fórmula de I serán totalmente insignificantes. El momento de inercia será mucho mayor si la aguja gira alrededor de una recta perpendicular a su eje.

El momento de inercia depende de la dirección del eje y del sitio en que se encuentra. Si no se hace una advertencia especial, se supone que el eje de rotación pasa por el centro de inercia del cuerpo.

Si el eje de rotación está desplazado una distancia a respecto del centro de inercia (fig. 27), el nuevo momento de inercia I será distinto del momento de inercia I_0, tomado con respecto al eje paralelo que pasa por el centro de inercia.

Teniendo en cuenta la observación hecha al final del párrafo anterior, podemos representar la energía cinética del cuerpo, que gira alrededor del eje desplazado, como una suma

$$K = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2};$$

aquí v es la velocidad del movimiento del centro de inercia, que será igual a $a\omega$. De este modo,

$$K=\frac{Ma^2\omega^2}{2}+\frac{I_0\omega^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}(I_0+Ma^2).$$

Por consiguiente, el momento de inercia I con relación a un eje paralelo, desplazado una distancia a del centro de inercia, será

$$I=I_0+Ma^2.$$

De aquí se deduce que el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de inercia es siempre el más pequeño para esta dirección. En dependencia de su simetría, el cuerpo se caracteriza por uno, dos o tres momentos de inercia respecto de los ejes principales que pasan por su centro de inercia.

Así, para un disco son característicos dos ejes que pasan por su centro: uno, situado en el plano del disco, y otro, perpendicular a él; estos momentos de inercia son, respectivamente, iguales (suponiendo que la masa está distribuida uniformemente por el disco) a $mr^2/4$ y $mr^2/2$. Para un anillo, los momentos de inercia en torno a dos ejes trazados como en el caso anterior serán $mr^2/2$ y mr^2.

Para todos los cuerpos de revolución basta conocer los momentos de inercia con respecto a dos ejes. En el caso de cuerpos de forma arbitraria, para dar una característica completa de las propiedades inerciales del cuerpo cuando gira basta conocer tres momentos de inercia referidos a ejes que pasen por su centro de inercia, a saber: el momento de inercia máximo $I_{máx}$, el momento de inercia mínimo $I_{mín}$ y el momento de inercia con relación al eje perpendicular a los dos primeros (I_{med}).

El único cuerpo cuyos momentos de inercia en torno a todos sus ejes son iguales es la esfera. Para la esfera $I=\frac{2}{5}mr^2$.

Las fórmulas que hemos dado de los momentos de inercia han sido calculados partiendo de

$$I=\int r^2\,dm.$$

La aplicación de esta fórmula exige, en el caso general, saber operar con integrales múltiples. Ejemplos de cálculos de este tipo se dan en el curso de mecánica teórica.

Como veremos más adelante, al físico le interesan a veces los valores de los momentos de inercia de las moléculas. La masa de los átomos se halla concentrada en los núcleos, cuyas dimensiones son extremadamente pequeñas, por lo cual el cálculo de dichos momentos de inercia se hace sin dificultad: los átomos pueden considerarse como puntos materiales.

El momento de inercia de una molécula diatómica con relación al eje que pasa por los átomos es igual a cero. Para el eje perpendicular a la recta que los une, tenemos

$$I = m_A r_A^2 + m_B r_B^2,$$

donde r_A y r_B son las respectivas distancias de los átomos A y B de la molécula diatómica al centro de inercia. Si l es la distancia entre los átomos, $r_A + r_B = l$ y $\frac{r_A}{r_B} = \frac{m_B}{m_A}$. Por consiguiente,

$$I = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} l^2.$$

Los momentos de inercia de las moléculas más complejas también se pueden calcular como suma de los momentos de inercia de los átomos puntuales.

Ejemplos. 1. Un volante de motor de barco, de 1 t, aproximadamente, de masa y 2m de diámetro, posee un momento de inercia $I \sim 1000$ kg·m². A 300 r.p. m., la energía cinética de rotación de este volante es

$$K = \frac{I\omega^2}{2} \approx 500\,000 \text{ J} \approx 50\,000 \text{ kgf·m.},$$

2. El momento de inercia de la esfera terrestre es del orden de 10^{45} g·cm² = 10^{38} kg·m². La energía cinética de rotación de la Tierra alrededor de su eje es de $2{,}5 \cdot 10^{29}$ J.

3. En la molécula de hidrógeno H_2 la distancia $l = 0{,}753 \cdot 10^{-8}$ cm y la masa del átomo de hidrógeno $m_H = 1{,}6598 \cdot 10^{-24}$ g, por lo tanto, el momento de inercia de la molécula con respecto al eje perpendicular a l, será

$$I = \frac{m_H l^2}{2} = 0{,}46 \cdot 10^{-40} \text{ g·cm}^2.$$

§ 20. *Trabajo de rotación y ecuación fundamental de la rotación*

Si un cuerpo, sujeto a un eje, se hace girar aplicándole una fuerza F o, al contrario, si un cuerpo en rotación es frenado por una fuerza, su energía cinética de rotación aumenta, o disminuye, en una cantidad igual al trabajo invertido. Lo mismo que en el caso del movimiento de traslación, este trabajo depende de la fuerza actuante y de la traslación efectuada por ella. Pero ahora la traslación es angular y la expresión que conocemos del trabajo para trasladar un punto material a cierta distancia ya no es aplicable.

Para hallar la fórmula que nos interesa recurriremos a la fig. 28. La fuerza $\boldsymbol{F}$ está aplicada a un punto que se encuentra a la distancia r del eje de rotación. El ángulo comprendido entre la dirección

de la fuerza y el radio vector del punto lo designaremos por θ. Como el cuerpo es absolutamente rígido, el trabajo de esta fuerza (aunque esté aplicada a un punto) es igual al trabajo que se gasta en hacer girar todo el cuerpo. Si el cuerpo gira un ángulo $d\varphi$, el punto de aplicación recorrerá un espacio $r\,d\varphi$ y el trabajo dA, igual

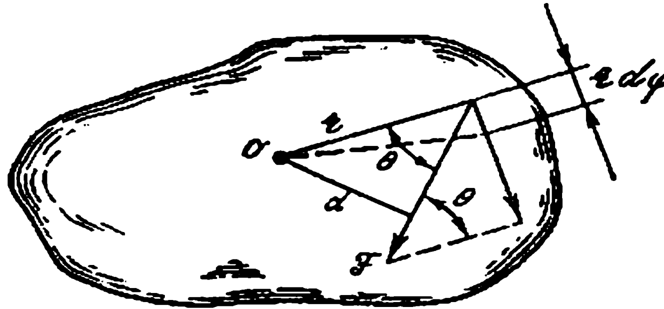


FIG. 28.

al producto de la proyección de la fuerza sobre la dirección del desplazamiento por la magnitud de dicho desplazamiento, será

$$dA = Fr \operatorname{sen} \theta \, d\varphi.$$

La expresión Fr sen θ se conoce con el nombre de *momento de la fuerza*,

$$M = Fr \operatorname{sen} \theta.$$

Del dibujo se deduce que r sen$\theta = d$, siendo d la distancia más corta entre la línea de acción de la fuerza y el eje de rotación. Por esto

$$M = Fd,$$

es decir, el momento de una fuerza es igual a dicha fuerza multiplicada por el brazo.

La fórmula del trabajo que buscábamos es, pues,

$$dA = M d\varphi.$$

El trabajo de rotación de un cuerpo es igual al producto del momento de la fuerza que actúa por el ángulo girado.

Estrictamente hablando, esta fórmula es correcta cuando el ángulo de giro $d\varphi$ es infinitesimal. Pero podemos utilizarla en cualquier caso si entendemos por M el valor medio del momento de la fuerza en el tiempo que dura el giro. En este caso

$$\Delta A = M_{med} \Delta\varphi.$$

El trabajo de rotación se invierte en aumentar la energía cinética de rotación. Por esto debe cumplirse la igualdad

$$M\,d\varphi = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right).$$

Si el momento de inercia es constante durante el movimiento,

$$M\,d\varphi = I\omega\,d\omega$$

o, como $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$,

$$M = I\,\frac{d\omega}{dt}.$$

Esta es la ecuación fundamental del movimiento de un cuerpo que gira. El momento de la fuerza que actúa sobre el cuerpo es igual al producto del momento de inercia por la aceleración angular $\frac{d\omega}{dt}$.

Ejemplos. 1. El momento de la fuerza correspondiente a la rueda de una locomotora que desarrolla un esfuerzo de tracción del orden de 10^5 N es del orden de ≈ 3000 N·m.

El momento de rotación que un ciclista crea sobre el pedal es del orden de 100 N·m.

2. Con este ejemplo demostraremos la relación que existe entre la expresión de la energía cinética de un sólido en movimiento (véase la pág. 79) y la ley fundamental de la mecánica.

Supongamos que a un carrete de masa m y radio r, que posee un momento de inercia I respecto a su eje, está arrollado un hilo exento de peso (fig. 29). El extremo del hilo está sujeto a cierta altura sobre el nivel de la Tierra. El carrete cae por la acción de su propio peso mg. Planteemos las ecuaciones del movimiento del carrete:

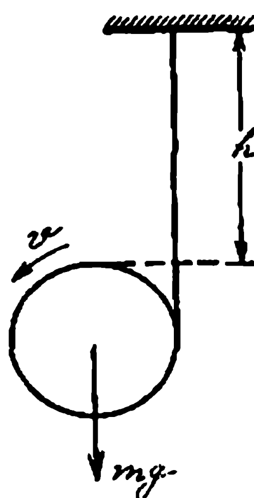


FIG. 29.

$$mg - T = m\,\frac{dv}{dt},$$

$$Tr = I\,\frac{d\omega}{dt},$$

donde T es la tensión del hilo y ω, la velocidad angular de rotación del carrete. Eliminando T, obtenemos la aceleración

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{g}{1 + \frac{I}{mr^2}}.$$

Si se empieza a medir el tiempo desde el instante en que se suelta el carrete, en t segundos caerá una altura $h = v^2 : 2a$. Es evidente que la energía cinética total del carrete en este instante deberá ser igual a la variación de su energía potencial:

$$K = mgh = mg\,\frac{v^2}{2a}.$$

Sustituyendo aquí a por su expresión, obtenemos

$$K = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

§ 21. *Momento de impulsión* *)

Salta a la vista la analogía entre las fórmulas del movimiento de un punto material y las leyes deducidas de la rotación de un sólido. Esto queda claro aunque no se haga más que la siguiente comparación:

Punto	Cuerpo en rotación
$F = m\frac{dv}{dt}$,	$M = I\frac{d\omega}{dt}$,
$K = \frac{mv^2}{2}$,	$K = \frac{I\omega^2}{2}$.

También es evidente el sentido físico de esta analogía: de un modo semejante a cómo en la mecánica del punto las aceleraciones pueden calcularse por la fuerza dada, en el movimiento de rotación se calcula la aceleración angular por el momento de la fuerza dado. El papel de la masa lo desempeña el momento de inercia, que caracteriza en la rotación el grado de inercia del cuerpo (la masa sola ya es insuficiente para esto). Esta analogía nos anima a dar un nuevo paso y suponer que en relación con las magnitudes físicas análogas deben existir leyes análogas.

En el capítulo anterior se estableció que el impulso $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ es una magnitud física que satisface la ley de conservación en un sistema aislado. La magnitud análoga a $\boldsymbol{p}$ es el *momento de impulsión* (o *impulso de rotación*)

$$N = I\omega.$$

Puede demostrarse rigurosamente que el impulso de rotación satisface la ley de conservación siguiente: en un sistema aislado, el impulso de rotación total de los cuerpos que integran dicho sistema no varía. El aumento del impulso de rotación de uno de los cuerpos debe ser compensado por una disminución igual de los demás.

La ley

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + I_3\omega_3 + \ldots = \text{const}$$

tiene muchas aplicaciones de interés en problemas muy semejantes a los que estudiamos en el capítulo anterior.

La ley de conservación del impulso, si se aplica a un cuerpo, tiene la forma $mv = \text{const}$ y, de este modo, coincide con la ley de la inercia. La ley de conservación del impulso de rotación nos conduce a un resultado interesante incluso en el caso elemental

*) Los autores de habla española le llaman preferentemente *momento cinético* o *momento de la cantidad de movimiento* (*N. del T.*).

que sigue. Un cuerpo solo, si no existe interacción con el medio ambiente, debe satisfacer la condición.

$$I\omega = \text{const.}$$

Pero el momento de inercia puede variar durante el movimiento. Como puede verse, el aumento de I debe ir acompañado de la disminución de ω, y viceversa.

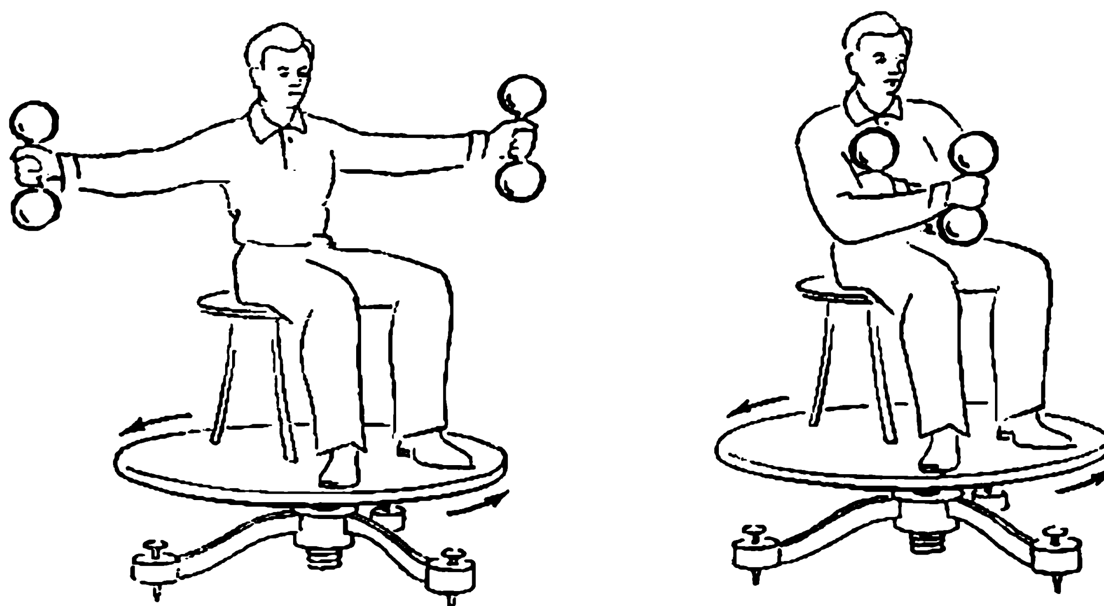


FIG. 30.

A esto se pueden poner multitud de ejemplos y, si se dispone de un taburete giratorio, pueden hacerse experimentos aclaratorios que llaman mucho la atención. Siéntese en el citado taburete y coja unas pesas de hacer gimnasia (fig. 30). Abra los brazos y pídale a alguien que le dé cierto impulso de rotación. Comenzará a moverse con un determinado momento de inercia I y una velocidad angular ω. Ahora cruce los brazos delante del pecho: el momento de inercia disminuye considerablemente hasta I'. Y como el producto $I\omega$ debe permanecer invariable, $I\omega = I'\omega'$. Esto significa, que el movimiento hecho con los brazos debe ocasionar un aumento considerable de la velocidad de rotación. Si vuelve a abrir los brazos, el movimiento se retardará; si los cruza de nuevo, se acelerará.

La disminución del momento de inercia como medio para aumentar la velocidad de rotación, es bien conocida por los gimnastas y bailarines. Este procedimiento se utiliza en todo género de saltos,



FIG. 31.

cabriolas, virajes y volteretas. La fig. 31 recuerda cómo este procedimiento se utiliza en el baile para aumentar la velocidad de rotación a expensas de cambiar de postura y de disminuir así el momento de inercia.

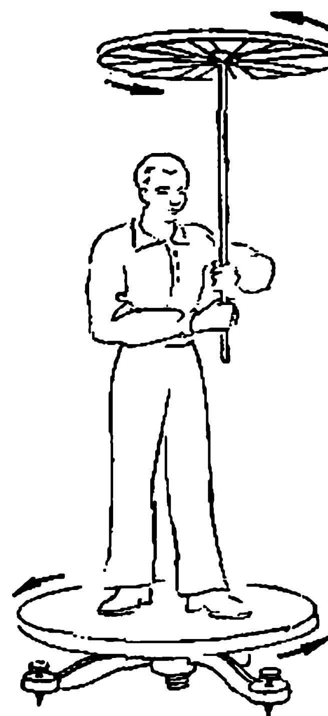


FIG. 32.

Con el mismo taburete giratorio y una rueda de bicicleta montada en un eje largo, se suele demostrar el efecto de rechazo en la rotación (fig. 32).

Puesto de pie sobre el taburete y manteniendo la rueda más arriba de la cabeza, haga girar la rueda con un movimiento brusco; el taburete girará entonces en sentido contrario. Este es el efecto de rechazo: el impulso de rotación $I_1\omega_1$ de la rueda es equilibrado por el de signo contrario $I_2\omega_2$ del taburete con el hombre encima, ya que en el estado inicial tanto el taburete como la rueda no giraban y el impulso de rotación total era igual a cero.

A su debido tiempo llamamos choque inelástico al encuentro de dos cuerpos después del cual ambos se mueven juntos. Algo semejante se puede conseguir también en el caso del movimiento de rotación si

se dispone de los mismos objetos que acabamos de utilizar. Haga que gire la rueda y déseIa a una persona que esté sentada en el taburete. Estado inicial: el taburete y la persona están en reposo, la rueda de bicicleta gira con el impulso $I_1\omega_1$. Si ahora el hombre coge la rueda con la mano, el impulso de rotación $I_1\omega_1$ no puede desaparecer, pero como ya pertenece a todo el sistema, el hombre que está sentado en el taburete y la rueda giran al mismo tiempo y, naturalmente, en el mismo sentido que antes giraba la rueda. Es evidente que $I_1\omega_1=(I_1+I_2)\omega$. Si antes de la «unificación» el hombre gira con la velocidad ω_2, debe conservarse el impulso de rotación $I_1\omega_1+I_2\omega_2$ y, por consiguiente,

$$I_1\omega_1+I_2\omega_2=(I_1+I_2)\,\omega,\quad \omega=\frac{I_1\omega_1+I_2\omega_2}{I_1+I_2},$$

lo que, tanto por su forma como por su sentido, se asemeja mucho a la expresión para el choque inelástico.

Ejemplos. 1. Un volante de motor de barco cuyo momento de inercia es de 1000 kg·m² a 300 r. p. m. tiene un impulso de rotación de ~30 000 kg·m²/s.

2. Una bola de billar de 2,5 cm de diámetro tiene un momento de inercia $I=$ $=250$ g·cm² y se mueve, sin resbalar por la mesa, con una velocidad de 5 m/s. En estas condiciones su impulso de rotación es de ~50 000 g·cm²/s$=5\cdot10^{-3}$ kg$\times$$\times$m²/s.

3. El impulso de rotación de la Tierra al girar alrededor de su eje es de $\sim10^{34}$ kg·m²/s.

§ 22. *Ejes de rotación libres*

Supongamos que un cuerpo recibió un impulso de rotación alrededor de un eje fijo cualquiera. Figurémonos ahora que se suprime la sujeción del eje. Aunque el impulso de rotación debe conservarse (si se desprecia el rozamiento), la posición del cuerpo en el espacio puede, en cambio, variar; si en este caso cambia el momento de inercia, esto se compensará con la variación correspondiente de la velocidad angular.

Pero en una serie de casos el carácter de la rotación no cambia; el cuerpo continúa girando establemente, alrededor de la dirección inicial, lo mismo que si el eje de rotación estuviera fijo como antes. La teoría y la experiencia demuestran que los ejes de rotación libres y estables que pasan por el centro de inercia, pueden ser dos: el eje del momento de inercia máximo y el eje del momento de inercia mínimo.

Si el eje de rotación fijo pasaba por el centro de inercia (fig. 33) pero estaba inclinado con relación a los ejes de simetría y, por lo tanto, con respecto a las direcciones que hemos citado antes, una vez que el eje se libera, el cuerpo comienza a cambiar de posición

respecto del eje de rotación. En el dibujo puede verse que la causa de que varíe la posición es el par de fuerzas que originan las fuerzas centrífugas. El cuerpo seguirá cambiando de posición hasta que el eje libre se convierta en eje de rotación.

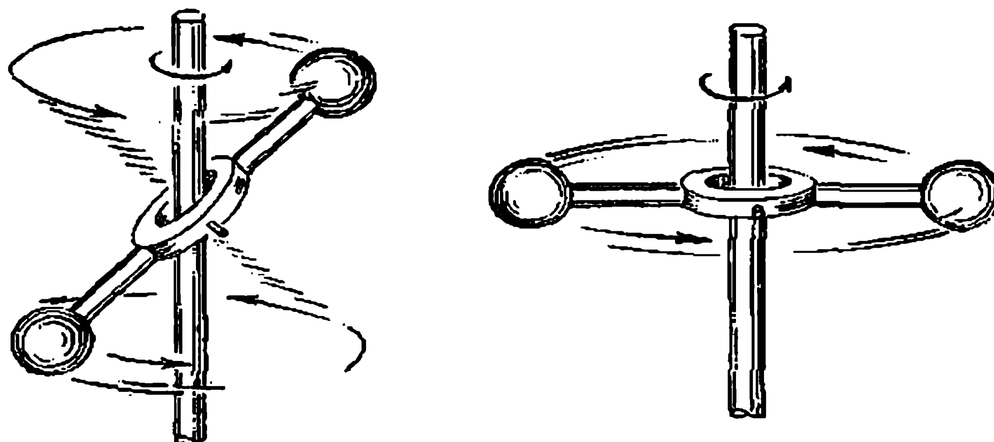


FIG. 33.

Por una serie de procedimientos puede demostrarse, que un cuerpo en libre rotación estará cambiando de eje de giro mientras la rotación no se efectúe alrededor del eje libre. Atando a un hilo cuerpos de diversa configuración y sujetando el otro extremo de dicho hilo al eje de un motor rápido, podemos transmitir a cada

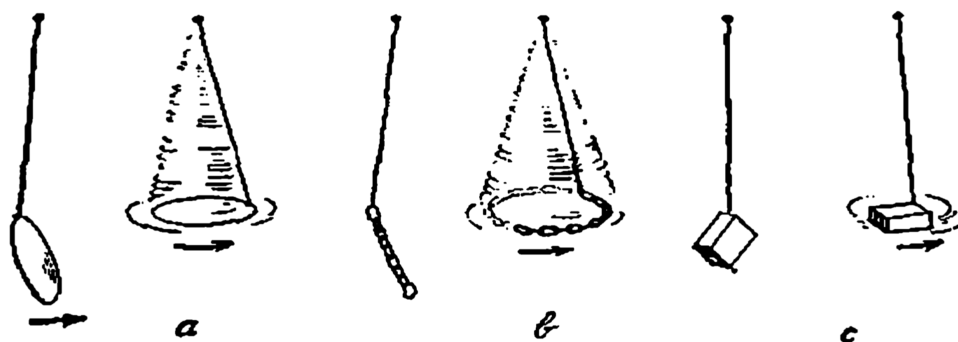


FIG. 34.

cuerpo un movimiento de rotación sin fijar el eje de ésta. En la fig. 34 se muestran las sucesivas posiciones de un disco, una cadena y una caja de cerillas al girar. La caja de cerillas comienza a girar alrededor de un eje paralelo a la arista más corta o a la arista más larga. La teoría demuestra que la rotación alrededor de un eje con momento de inercia medio no será estable incluso si dicho eje lo es de simetría.

Al construir una de las primeras turbinas, cuya velocidad era de 30 000 r. p. m., no supieron establecer la posición del eje fijo con la exactitud necesaria para anular los pares de fuerzas centrífugas que actúan sobre los cojinetes. A velocidades tan grandes estas fuerzas alcanzan valores intolerables. Se salvó la dificultad utilizando para eje del disco de la turbina un árbol flexible. La rotación tenía lugar alrededor del eje libre, y el árbol flexible se adaptaba a él.

Estudiemos este fenómeno con un poco de más detenimiento. Llamemos a al desplazamiento del centro de gravedad de la rueda de la turbina, debido a su asimetría, y Δ a la magnitud de la flexión del árbol por la acción de la fuerza centrífuga. El árbol se cimbra hacia el lado de la asimetría, por lo tanto la expresión de la fuerza centrífuga se puede escribir de la forma $4\pi^2n^2M\ (a+\Delta)$. Esta fuerza es equilibrada por la fuerza elástica $k\Delta$, donde k es la rigidez del árbol. De este modo,

$$\Delta = a\frac{1}{\dfrac{k}{4\pi^2n^2M}-1}.$$

De la fórmula se deduce que, cuando el número de revoluciones n es grande, la flexión del árbol Δ no aumenta, sino que tiende a hacerse igual a la magnitud de la asimetría de la rueda con signo contrario. Esto significa que, al aumentar la velocidad de rotación de la turbina, el desplazamiento total de la rueda con el árbol respecto del eje es nulo. En esto consiste la capacidad de adaptación del árbol flexible: en que puede combarse lo necesario para anular la fuerza centrífuga, sin romperse.

De la fórmula dada se deduce también que la condición $k/4\pi^2\ n^2\ M=1$ es crítica. Con esta relación, la flexión del árbol se hace igual a una magnitud infinitamente grande. Este es el instante de resonancia (la frecuencia externa $n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$, es decir, coincide con la frecuencia propia de la rueda de la turbina, que tiene la masa M y va montada en un árbol cuya rigidez es k; véase el cap. 5), que debe pasarse rápidamente al acelerar la marcha de la turbina.

§ 23. *Giroscopios*

Se entiende generalmente por giroscopio o trompo, un aparato que puede girar alrededor de un eje orientado de cualquier forma. Si un trompo se hace girar y se abandona a sí mismo, conserva invariable su eje de rotación mientras sobre él no actúen fuerzas ($I\omega$ no debe variar en este caso).

La acción de una fuerza sobre el eje de rotación de un trompo se pone de manifiesto de un modo bastante inesperado. Esto se demuestra por medio de un giroscopio (fig. 35) equilibrado con una pesa de tal manera, que el eje del aparato sea horizontal. Hagamos girar el giroscopio en el plano vertical y colguemos del eje una carga G. Al parecer toda la parte derecha, es decir, el giroscopio, debería subir. Así ocurriría en realidad si el giroscopio no girara. Pero el giroscopio en rotación comienza a girar a velocidad constante, alrededor del eje vertical, en el sentido que indica la línea de trazos y la flecha. El movimiento tiene lugar en una dirección que forma un ángulo recto con la de la fuerza que actúa.

El fenómeno descrito, en el cual el eje de rotación comienza a girar alrededor de la dirección de la fuerza, se llama *precesión*. El movimiento de precesión de un trompo es bien conocido por todos. En cuanto el eje del trompo se desvía un poco de la vertical, sobre el trompo comienza a actuar el momento de vuelco de la fuerza de gravedad. Si el trompo estuviera quieto, se caería, pero el trompo que está girando entra en precesión alrededor de la ver-

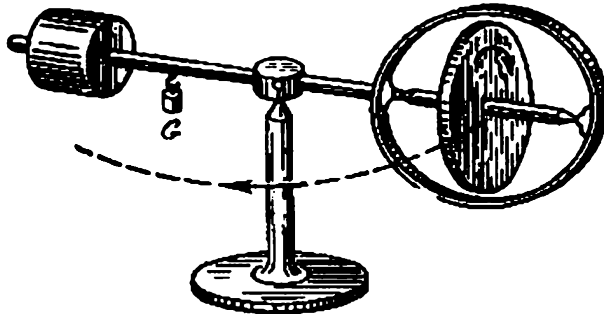


FIG. 35.

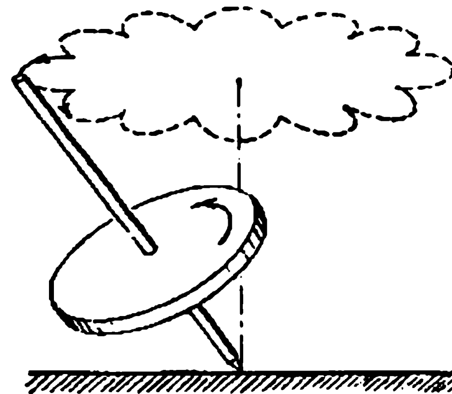


FIG. 36

tical y su eje describe un cono cuyo vértice se encuentra en el punto de apoyo del trompo.

La rotación de un trompo tiene generalmente un carácter todavía más complejo. Al movimiento de precesión se añade la nutación. Resulta que una pequeña sacudida (siempre posible) puede hacer que el eje del trompo oscile (fig. 36). A consecuencia del fenómeno llamado nutación, el eje del trompo describe, en este caso, no una circunferencia, sino la línea cicloidal que se ve en la figura. Sin embargo, los fenómenos de nutación suelen notarse poco.

5

OSCILACIONES

§ 24. Desviaciones pequeñas de la posición de equilibrio

En la naturaleza se encuentran con frecuencia movimientos realizados por un cuerpo o una partícula en torno a su posición de equilibrio. Se balancea un cuerpo colgado de un hilo, tiembla un muelle, oscila el átomo que forma parte de una red cristalina.

Si un cuerpo o punto material sobre el cual actúan fuerzas se encuentra en la posición de equilibrio, su energía potencial es mínima, el sistema se halla en un pozo de potencial (fig. 37). Si las desviaciones de la posición de equilibrio (elongación) no son grandes, hay que considerar una parte pequeña del pozo de potencial. La marcha de las curvas de potencial en las cercanías de la posición de equilibrio pueden representarse siempre como una función parabólica, es decir, de la forma $U=1/2\ kx^2$. Aquí $\frac{1}{2}k$ es un coeficiente de proporcionalidad; la mitad se toma con fines de comodidad que ahora se harán evidentes.

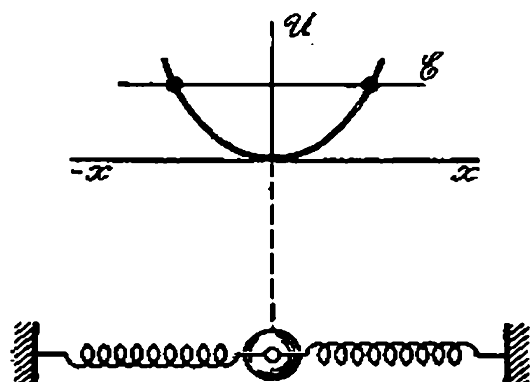


FIG. 37.

El fundamento de la dependencia que hemos escrito consiste en lo siguiente. La energía potencial es función de la elongación. Como es sabido, haciendo suposiciones suficientemente amplias, cualquier función, si los valores de x son pequeños, se puede desarrollar en serie de Taylor según las potencias crecientes de x:

$$U = ax + \frac{1}{2}kx^2 + bx^3 + cx^4 + \dots$$

Pero si x es pequeña, los términos con potencias elevadas se pueden desechar, el primer término desaparece si el pozo de potencial es simétrico, y los valores de la energía potencial a iguales distancias, a derecha e izquierda, de la posición de equilibrio deben ser iguales.

La fuerza que actúa sobre el punto que se desvía de la posición de equilibrio será igual a la derivada de la energía potencial con signo contrario. Por lo tanto, si la energía se expresa por medio de la fórmula $U=\frac{1}{2}kx^2$, $F=-kx$. La significación del signo menos es evidente: la fuerza hallada restituye siempre el cuerpo a su posición de equilibrio y está dirigida siempre en sentido contrario a la desviación. La fuerza $F=-kx$ se llama por esto *fuerza restauradora*, y el coeficiente k se denomina a veces coeficiente de la fuerza restauradora.

¿Qué carácter tendrá el movimiento producido por la acción de la fuerza restauradora? A esta pregunta debe responder la ley de Newton, que para el movimiento cerca de la posición de equilibrio se escribe de la forma $ma=-kx$.

Esta ecuación será satisfecha si el punto realiza oscilaciones armónicas en torno a la posición de equilibrio, es decir, oscilaciones según la ley

$$x = A\cos\frac{2\pi}{T}t,$$

donde T es el período de las oscilaciones.

Comprobemos esta afirmación. La velocidad del movimiento del punto, para la dependencia que hemos escrito de la elongación respecto del tiempo, será

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi A}{T}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{T}t.$$

Recordamos que el valor máximo de la velocidad de un movimiento oscilatorio, es decir, de la amplitud de la velocidad, es igual a $v_{máx} = 2\pi A/T$. Ahora podemos hallar la aceleración como derivada de la velocidad. Obtenemos que

$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2}A\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

Sustituyendo en la ley de Newton $ma = -kx$ las expresiones de la velocidad y de la elongación, tenemos

$$-m\frac{4\pi^2}{T^2}A\cos\frac{2\pi}{T}t = -kA\cos\frac{2\pi}{T}t;$$

donde vemos que los factores en que figura el tiempo se simplifican. Es decir, la ecuación de las oscilaciones armónicas satisface la ley de Newton para pequeñas desviaciones de la posición de equilibrio.

Es notable el hecho de que la ley de Newton impone una restricción al período de las oscilaciones posibles. Como se deduce de la última fórmula, el período de las oscilaciones libres en torno a la posición de equilibrio $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. El período de las oscilaciones viene determinado por las propiedades del sistema que oscila, o sea, por el coeficiente de la fuerza restauradora k y por la masa del punto. Por esta razón dicho período se llama *período propio* o *característico* del sistema oscilante.

A la amplitud de las oscilaciones A no se le imponen condiciones, a excepción, claro está, de que las oscilaciones deben ser desviaciones *pequeñas* de la posición de equilibrio.

§ 25. *Casos particulares de oscilaciones*

De acuerdo con el hecho de que en la mecánica operamos con dos formas de energía potencial —la de elasticidad y la de gravitación—, las oscilaciones mecánicas también se pueden dividir en estos dos casos.

Los cuerpos que oscilan por la acción de fuerzas de elasticidad realizan de ordinario oscilaciones lineales de compresión y alargamiento; también son corrientes las oscilaciones de torsión.

Si un cuerpo colgado de un cordón de goma, de un muelle, o de un alambre, se desvía de su posición de equilibrio en la dirección del cordón, del eje del muelle o del alambre, se producen oscilaciones lineales por la acción de la fuerza restauradora de la elasticidad. El coeficiente k es, en este caso, la rigidez del cuerpo oscilante.

En qué medida determina este coeficiente el período y la frecuencia de la oscilación que se produce, puede verse en el siguiente ejemplo. Tres pesas iguales, de 1 kg de masa, se cuelgan de tres muelles de diferente rigidez. Por la acción de estas cargas los muelles se alargan respectivamente 1 mm, 1 cm y 1 m. En este caso los coeficientes de rigidez tendrán respectivamente los valores:

$$k_1 = \frac{981 \cdot 10^3}{0,1} = 0,981 \cdot 10^7 \text{ din/cm}; \quad k_2 = 0,981 \cdot 10^6 \text{ din/cm};$$
$$k_3 = 0,981 \cdot 10^4 \text{ din/cm}.$$

Los períodos y las frecuencias de estos péndulos serán

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{10^3}{0,981 \cdot 10^7}} = 6,34 \cdot 10^{-2} \text{ s}, \quad \nu_1 = 15,8 \text{ Hz};$$
$$T_2 = 0,2 \text{ s}, \qquad \nu_2 = 5 \text{ Hz};$$
$$T_3 = 2 \text{ s}, \qquad \nu_3 = 0,5 \text{ Hz}.$$

En las oscilaciones torsionales el retorno al equilibrio se efectúa por la acción de un momento de torsión que, si las desviaciones de la posición de equilibrio son pequeñas, es directamente proporcional a la elongación angular. Si, por ejemplo, de un alambre pende una arandela pesada de momento de inercia I y el alambre está torcido cierto ángulo, la ecuación de las oscilaciones torsionales de la arandela tendrá la forma $I\frac{d\omega}{dt} = -D\varphi$. El papel de coeficiente de la fuerza restauradora D lo desempeña aquí el momento de torsión referido a la unidad de elongación angular, y el papel de la masa lo desempeña el momento de inercia. Por lo tanto, el período de las oscilaciones torsionales libres está dado por la fórmula

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}.$$

Cuanto mayor sea el momento de inercia, tanto menor será la frecuencia de las oscilaciones.

Ejemplo. Sea un disco, de 100 g de masa y 5 cm de radio, que está colgado de un hilo de acero y oscila torsionalmente con un período de 1 s. El momento de inercia del disco $I_1 = mr^2/2 = 1250$ g·cm². En estas condiciones el coeficiente de la fuerza restauradora $D = 4\pi^2 I_1/T^2 = 49\,400$ din·cm/rad. Si a este mismo hilo se

cuelga un disco de la misma masa que antes, pero de 1 cm de radio, el período de las oscilaciones torsionales no será ya 1 s, sino $T_2=2\pi\sqrt{I_2/D}\approx 0.2$ s.

Los cuerpos que oscilan por la acción de las fuerzas de gravitación son péndulos. Si un péndulo se puede representar, aproximadamente, como un punto material colgado de un hilo exento de peso, se dice que es un *péndulo matemático* o *simple* (fig. 38).

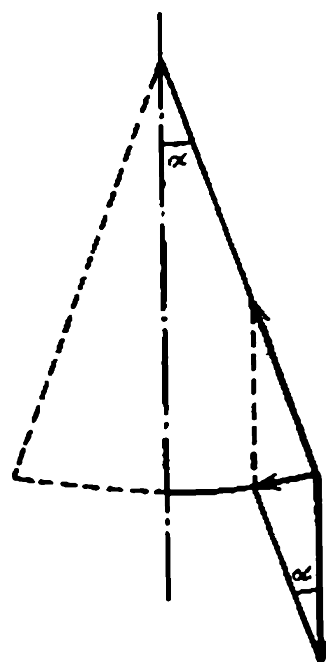


FIG. 38.

Por la figura podemos hallar fácilmente que la expresión de la fuerza restauradora mg sen α es la componente del peso tangencial a la trayectoria. Si las elongaciones son pequeñas, el seno se puede sustituir por el valor del ángulo α y después, por el cociente de dividir la elongación x por la longitud del hilo l. En esta aproximación las elongaciones según la cuerda y según el arco coinciden por su magnitud. De este modo, la fuerza restauradora es igual a $mg\,\frac{x}{l}$ y su coeficiente, igual a mg/l. En la expresión del período de las oscilaciones se simplifica la masa del punto oscilante $T=2\pi\sqrt{l/g}$.

La independencia del período de las oscilaciones del péndulo respecto de la masa es ejemplo de una peculiaridad general del movimiento de los puntos materiales en el campo de la gravedad. En efecto, la fuerza que actúa, en este caso, sobre un punto material, según la ley de gravitación será proporcional a la masa, por lo cual en la ecuación del movimiento se simplifica la masa. Así, pues, llegamos a la conocida conclusión que consiste en que, en un punto dado del campo de gravitación, el período de las oscilaciones de un péndulo matemático dependerá únicamente de su longitud.

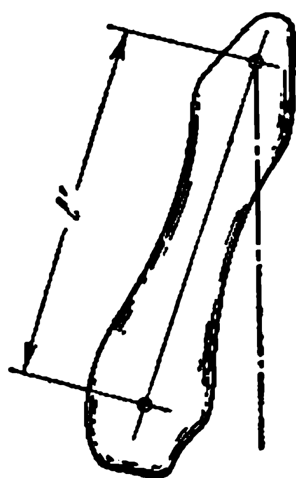


FIG. 39.

Las medidas del período de las oscilaciones de un péndulo pueden servir para determinar g. Estas mediciones son extraordinariamente exactas, por lo que hasta las variaciones más pequeñas de la magnitud g pueden ser descubiertas. En esto se basan los métodos para determinar la figura de la Tierra y la prospección gravimétrica (variaciones del valor de g pequeñas, pero que

exceden en mucho los límites de los errores posibles del experimento; pueden ocurrir debido a la existencia de yacimientos subterráneos de minerales más o menos densos).

Si se trata de las pequeñas oscilaciones de un cuerpo físico imposible de sustituir aproximadamente por un punto se dice que este cuerpo es un *péndulo físico* o *compuesto*. En la fig. 39 se muestra un cuerpo sólido: un eje de rotación (oscilación) pasa por él. El período de oscilación de un péndulo físico se calcula por la misma fórmula que el periodo de las oscilaciones torsionales:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}},$$

puesto que la ecuación

$$I \frac{d\omega}{dt} = -D\varphi$$

es correcta para cualquier movimiento de un cuerpo que gire alrededor de un eje. Pero en el caso de un campo gravitario podemos expresar fácilmente el momento de rotación, referido a la unidad de desplazamiento angular, por medio de unas características más directas del péndulo. En la fig. 39 vemos que el momento de rotación es igual al producto del peso del cuerpo por la distancia r, desde el centro de gravedad al punto de suspensión, y por el seno del ángulo de elongación, es decir, mgr sen α. Considerando, como hacemos siempre en este capítulo, que las elongaciones son pequeñas obtenemos para el momento de rotación la expresión $mgr\alpha$, de donde $D = \frac{mgr\,\alpha}{\alpha} = mgr$. De este modo, el período de las oscilaciones de un péndulo físico viene dado por la expresión

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr}} = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}}.$$

La magnitud $l' = I/mr$ se llama *longitud reducida* del péndulo físico. Esta es la longitud que tendría un péndulo matemático de igual período.

§ 26. *Transformaciones de la energía. Oscilaciones amortiguadas*

En las oscilaciones en torno a una posición de equilibrio, si no existe rozamiento, la energía total $\mathscr{E}$ del cuerpo permanece, como es natural, invariable. Como la energía potencial se da generalmente con exactitud de hasta una constante arbitraria, en la posición de equilibrio (elongación $x=0$) podemos suponer que

dicha energía es nula. En cualquier instante del movimiento

$$\mathscr{E}=\frac{mv^2}{2}+\frac{kx^2}{2}.$$

En la posición de equilibrio la energía cinética es máxima. En las posiciones extremas el cuerpo se para ($v=0$, $x=A$) y la energía potencial es máxima. De aquí resulta evidente que

$$\mathscr{E}=\frac{kA^2}{2},$$

o sea, que la energía de oscilación es proporcional al cuadrado de la amplitud.

Para los tres péndulos de resorte que consideramos en el ejemplo de la pág. 94, si las amplitudes de sus oscilaciones son idénticas e iguales a $A=0{,}1$ cm, las energías totales de estas oscilaciones tendrán, respectivamente, los valores

$$\mathscr{E}_1=0{,}49\cdot 10^5 \text{ erg}; \quad \mathscr{E}_2=0{,}49\cdot 10^4 \text{ erg y } \mathscr{E}_3=49 \text{ erg}.$$

Estos razonamientos no tienen en cuenta las fuerzas de rozamiento que experimenta, por lo general, todo cuerpo oscilante. Estas son oscilaciones ideales que pueden continuar eternamente sin que varíe su amplitud. Sin embargo, la existencia del rozamiento hace que las oscilaciones sean amortiguadas. En este caso también se puede escribir, desde un punto de vista formal, la ecuación de la elongación de la forma

$$x=A\cos\omega t,$$

pero A disminuirá con el tiempo (fig. 40). Para determinar cómo A debe depender del tiempo, hay que conocer las fuerzas de rozamiento, es decir, f_{roz} en cada instante de las oscilaciones. La aproximación más simple, y que más o menos satisfactoriamente se cumple en la práctica, consiste en suponer que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad del movimiento:

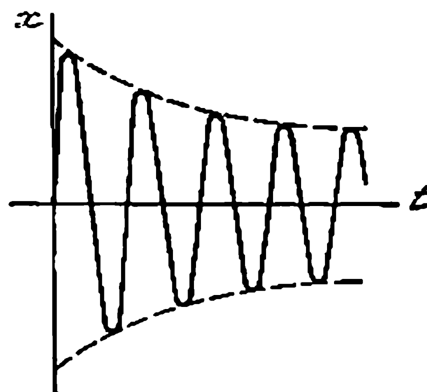


FIG. 40.

$$f_{roz}=\alpha v;$$

α es una constante que se llama *coeficiente de resistencia*.

Para una bola de 0,53 mm de radio, el coeficiente de resistencia α a la temperatura de 15°C será igual en la glicerina a 13,93 g/s, en el ácido sulfúrico, a 0,35 g/s, y en el agua, a 0,01 g/s.

La ecuación de la energía tiene ahora la forma

$$d\mathscr{E}=-\alpha v\,dx;$$

el punto oscilante pierde continuamente una cantidad de energía igual al trabajo de las fuerzas de resistencia. La ecuación del movimiento se escribe, en este caso, así:

$$ma = -kx - \alpha v.$$

No es difícil demostrar, haciendo una sustitución, que la solución $x = A \cos \omega t$ satisface esta ecuación si la amplitud de las oscilaciones A disminuye con el tiempo según la ley exponencial

$$A = A_0 e^{-\frac{\alpha}{2m} t},$$

donde A_0 es la amplitud en el instante $t=0$.

Llamamos la atención sobre el hecho de que la relación de dos amplitudes sucesivas se conservará. En efecto, escribamos las expresiones de las amplitudes al cabo de $(n-1)$ períodos y al cabo de n períodos:

$$A_{n-1} = A_0 e^{-\frac{\alpha}{2m}(n-1)T}, \quad A_n = A_0 e^{-\frac{\alpha}{2m} nT}.$$

Dividamos estas expresiones entre sí. La relación

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} = e^{\frac{\alpha}{2m} T}$$

no depende en realidad de n. A veces la rapidez de la amortiguación se caracteriza por el *decremento logarítmico* δ:

$$\delta = \ln \frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{\alpha}{2m} T.$$

Así, pues, la amortiguación será tanto más rápida cuanto mayor sea el coeficiente de resistencia, menor sea la masa y mayor sea el período de las oscilaciones.

Conviene advertir que el período de las oscilaciones amortiguadas difiere del período de las oscilaciones libres. El mismo cálculo que conduce a la fórmula de la dependencia de la amplitud respecto del tiempo, da para el período la expresión

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4mk}}}.$$

Esto significa que, cuando la resistencia es pequeña, T se diferencia poco de $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$; al aumentar la resistencia, aumenta el período de las oscilaciones y, finalmente, cuando

$$\frac{\alpha^2}{4mk} = 1$$

las oscilaciones cesan. En este último caso se dice, que el cuerpo sacado de la posición de equilibrio vuelve a ella aperiódicamente.

Valores aproximados de los decrementos logarítmicos de las amortiguaciones de algunos sistemas oscilantes:

Sistemas oscilantes acústicos	0,1
Circuitos oscilantes eléctricos	0,02—0,05
Diapasón	10^{-3}
Lámina de cuarzo	10^{-4}—10^{-5}

Veamos algunos ejemplos de oscilaciones amortiguadas.

a) Oscilaciones de un diapasón. El decremento logarítmico $\delta=\frac{\alpha}{2m}T=10^{-3}$. Sea el período de las oscilaciones del diapasón $T=0{,}01$ s. Entonces $\alpha/2m=0{,}1\ s^{-1}$. Esto quiere decir que, en $2m/\alpha=10$ s, la amplitud de las oscilaciones disminuye e veces:

$$A_t=A_0e^{-\frac{\alpha}{2m}t};\qquad A_{t-10}=A_0e^{-1}.$$

La magnitud $2m/\alpha=\tau$ se llama *constante de tiempo* del sistema oscilante dado.

b) En los sistemas oscilantes acústicos, como puede verse en la tabla anterior, el decremento logarítmico de amortiguación es grande. Esto significa que las oscilaciones se amortiguan rápidamente. Si $\delta=\frac{\alpha}{2m}T=0{,}1$, la amplitud de la décima oscilación A_{10} será ya e veces menor que la amplitud inicial A_0. Efectivamente,

$$\frac{A_0}{A_1}\frac{A_1}{A_2}\cdots\frac{A_8}{A_9}\frac{A_9}{A_{10}}=e^{\frac{\alpha}{2m}T\cdot 10},\ \text{o sea,}\ \frac{A_0}{A_{10}}=e.$$

c) La variación del período de las oscilaciones amortiguadas puede ilustrarse con el ejemplo de las de un péndulo de resorte. Sea un peso, de masa $m=50$ g, colgado de un muelle al que alarga 2 cm. La rigidez del muelle será $k=24\,500$ din/cm. Si no existiera amortiguación

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=0{,}28\ \text{s}.$$

Supongamos que la amortiguación es tal, que la constante de tiempo $\tau_1=2\,m/\alpha=5$ s, es decir, el coeficiente de resistencia $\alpha=20$ g/s. En este caso el período de las oscilaciones será

$$T_1=\frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4mk}}}\approx T_0(1+4{,}08\cdot10^{-5}).$$

Sumerjamos este péndulo en un líquido. Sea ahora la constante de tiempo $\tau_2=1$ s (esto quiere decir, que la amplitud de la cuarta oscilación será ya, aproximadamente, e veces menor que la inicial, es decir, que la amortiguación es bastante intensa):

$$T_2\approx T_0(1+102\cdot10^{-5})=1{,}001T_0,$$

o sea, incluso en este caso, el período aumentó tan sólo en un 0,1%.

§ 27. Oscilaciones forzadas

Si un cuerpo se saca de su posición de equilibrio y después se suelta, sus oscilaciones tendrán una frecuencia propia, independiente del carácter de la excitación, y definida únicamente por las propiedades del sistema. Las oscilaciones de una cuerda pulsada tienen la misma frecuencia, independientemente de si se la hizo sonar por medio de un golpe o punteándola.

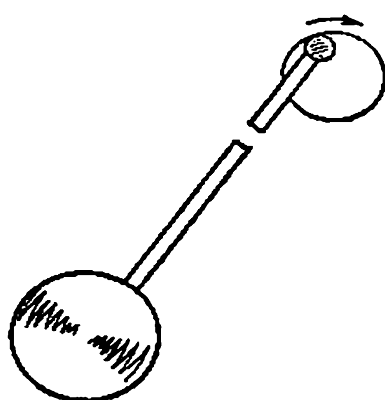


FIG. 41.

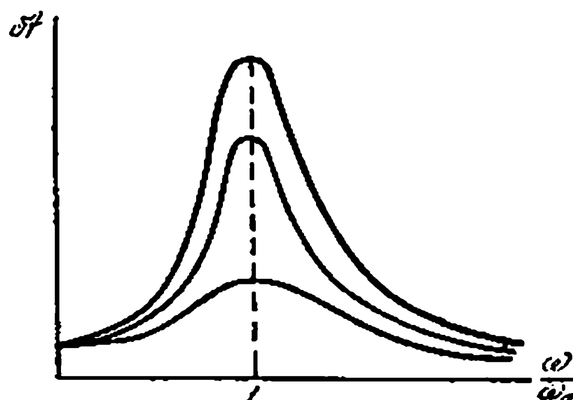


FIG. 42.

Sin embargo, existen una serie de procedimientos por media de los cuales se puede «obligar» a un cuerpo a que oscile con uno frecuencia externa. Estas oscilaciones forzadas se pueden conseguir si se crea una ligazón entre dos cuerpos capaces de oscilar. Uno de ellos obligará al otro a oscilar. Un motor mal equilibrado oscila, y estas oscilaciones se transmiten al cimiento; el cimiento efectuará, en este caso, oscilaciones forzadas. Puede hacerse el siguiente experimento: un reloj de bolsillo se coloca en una caja pequeña, la cual se cuelga a su vez de tres hilos; la caja entrará en un estado de oscilación forzada. La fig. 41 representa un dispositivo con ayuda del cual, haciendo girar la excéntrica, se consigue que el péndulo entre en el estado de oscilaciones forzadas. En todos estos casos actúa sobre el cuerpo una fuerza periódica, que varía con cierta frecuencia ω; a esta fuerza conviene llamarle *externa.*

Las oscilaciones forzadas no se establecen inmediatamente. Debe transcurrir algún tiempo hasta que el cuerpo ligado con el sistema oscilante empieza a oscilar. En fin de cuentas se establece cierta amplitud, y la frecuencia de las oscilaciones será exactamente igual a ω.

El hecho de que el cuerpo tenga una frecuencia propia de oscilación ω_0 influye, a pesar de todo, en el fenómeno de las oscilaciones forzadas. Más exactamente, como ahora veremos, es considerable la diferencia entre la frecuencia propia y la externa.

En la fig. 42 se muestra la dependencia de las amplitudes de las oscilaciones forzadas, respecto de la relación $\frac{\omega}{\omega_0}$, para tres sistemas que se diferencian por el rozamiento. Cuando la frecuencia externa coincide con la propia, la amplitud de la oscilación es máxima. Este fenómeno se conoce generalmente con el nombre de *resonancia*.

Las curvas representadas en la fig. 42 se pueden hallar teóricamente. La ecuación del movimiento de un cuerpo que efectúa oscilaciones forzadas por la acción de una fuerza periódica externa $F_0 \cos \omega t$, tiene la forma

$$ma = -kx - \alpha v + F_0 \cos \omega t.$$

No es difícil demostrar, haciendo una sustitución, que la elongación del punto oscilante satisfará la ecuación

$$x = A \cos(\omega t + \beta),$$

donde la amplitud

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}},$$

y el corrimiento de fase β satisface la ecuación

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\alpha \omega}{m(\omega_0^2 - \omega)}.$$

Teniendo en cuenta que $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ y $v = \frac{dx}{dt}$, sustituimos estos valores en la ecuación del movimiento. Después de unas transformaciones sencillas, agrupando los términos en que figuran $\cos \omega t$ y $\operatorname{sen} \omega t$, obtenemos

$$[(-m\omega^2 + k) A \cos \beta - \alpha \omega A \operatorname{sen} \beta - F_0] \cos \omega t -$$
$$-(-m\omega^2 + k) A \operatorname{sen} \beta + \alpha \omega A \cos \beta] \operatorname{sen} \omega t = 0.$$

Como el resultado obtenido debe cumplirse en cualquier instante, debemos imponer que los coeficientes de $\cos \omega t$ y $\operatorname{sen} \omega t$ sean nulos. De este modo obtenemos dos ecuaciones para determinar A y β.

$$[(-m\omega^2 + k) \cos \beta - \alpha \omega \operatorname{sen} \beta] A = F_0,$$
$$[(-m\omega^2 + k) \operatorname{sen} \beta + \alpha \omega \cos \beta] A = 0.$$

Elevando ambas ecuaciones al cuadrado y sumándolas, se obtiene

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}},$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia de las oscilaciones propias. De la segunda ecuación hallamos el corrimiento de fase β:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\alpha \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

De la primera fórmula se deduce que la amplitud A depende de ω del modo siguiente: cuando $\omega < \omega_0$, la amplitud crece al aumentar ω; cuando $\omega = \omega_0$, la amplitud alcanza el valor máximo y en adelante cae. El efecto (agudez de la resonancia) será tanto más brusco cuanto menor sea el coeficiente de resistencia α. Cuando el rozamiento es pequeño la resonancia destruye el sistema: para $\alpha=0$, la amplitud resonante se hace infinita. Esta posibilidad debe tenerse en cuenta por los constructores. Para asegurar la insensibilidad de una construcción a las oscilaciones del suelo hay que conocer la curva de resonancia, que es semejante a la de la fig. 43. La curva inferior representa las oscilaciones del suelo; la superior, las del edificio. En el caso de la resonancia, que se presenta cuando el período de las oscilaciones es de 0,32 s, la amplitud alcanza 20—25 micras. Esta cantidad, en general, no es pequeña.

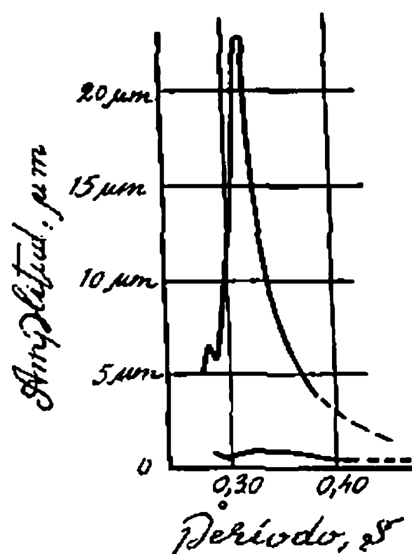


FIG. 43.

La agudez de la resonancia se refleja además en una circunstancia importante: cuanto más aguda sea la resonancia, tanto más lentamente se establecerán las oscilaciones de amplitud constante.

Otra peculiaridad de las oscilaciones forzadas es el corrimiento de fase. Hasta ahora hemos supuesto tácitamente que para medir el tiempo se tomaba como origen aquel en que, cuando $t=0$, la elongación es máxima en el sentido positivo. Está claro que si se estudia una oscilación determinada no hay por qué hacer otra elección del punto de referencia. Pero si comparamos dos oscilaciones y elegimos el origen de los tiempos de manera que para una de ellas $x=A$ cuando $t=0$, para la otra oscilación, en este mismo instante, la elongación podrá tener un valor arbitrario. Esta circunstancia se puede tener en cuenta introduciendo en el argumento del coseno el corrimiento de fase β: si $x=A\cos(\omega t+\beta)$, esto significa que en el instante $t=0$, $x=A\cos\beta$. Con ayuda del corrimiento de fases β, el desfasamiento se describe de manera completamente unívoca.

Retornemos ahora a los fenómenos de resonancia.

La magnitud β en la fórmula de una oscilación forzada significa que la fase de la oscilación forzada está desplazada con respecto a la fase de la oscilación impulsora. La magnitud de la diferencia de fases depende de la razón de la frecuencia externa a la frecuencia propia ω/ω_0 y también de la amortiguación. En la gráfica de la

fig. 44 se ve que cuando se produce la frecuencia de resonancia independientemente de la amortiguación, tiene lugar un desplazamiento de fase de 90°. Si nos apartamos un poco de las condi-

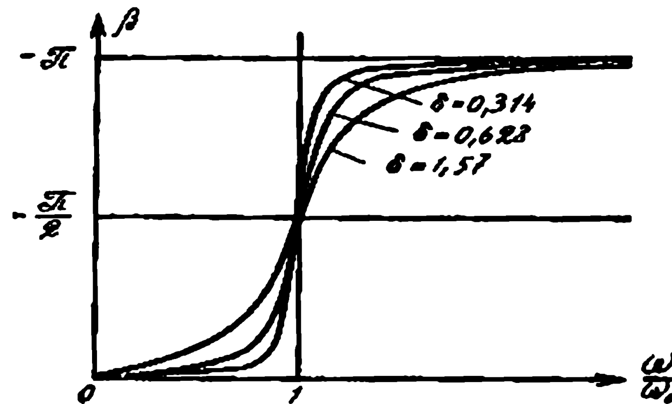


FIG. 44.

ciones de resonancia, la influencia de la amortiguación se hace evidente. Cuando la amortiguación es débil (pequeños valores del decremento logarítmico δ) y las frecuencias algo menores que la

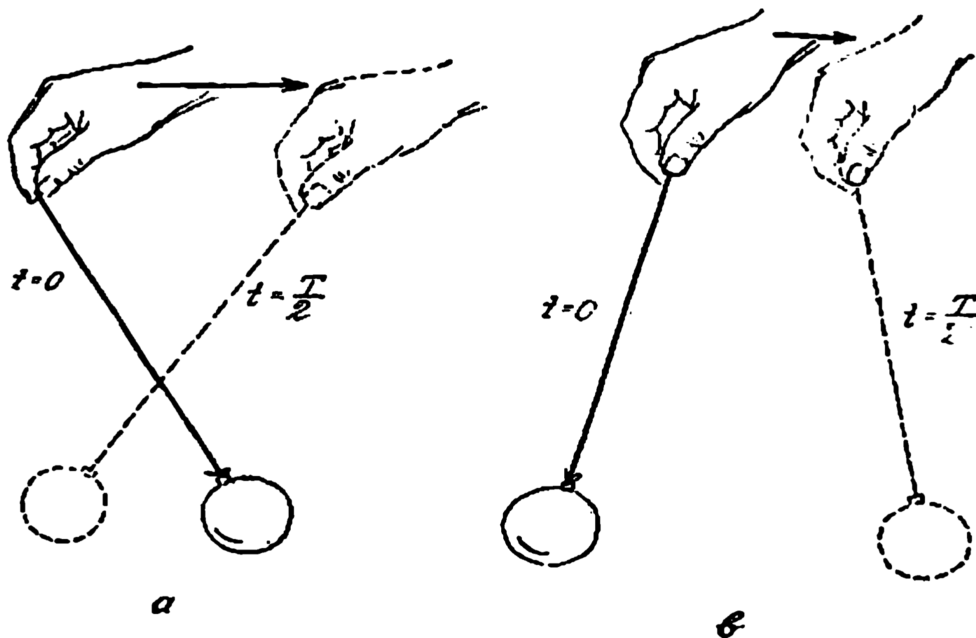


FIG. 45.

resonancia, la diferencia de fases es próxima a cero, y cuando las frecuencias son algo mayores, dicha diferencia se aproxima a 180°. Esta misma tendencia, aunque no tan claramente expresada, se

observa también si la amortiguación es intensa. En el caso de un rozamiento insignificante se puede hablar del salto de 180° que sufre la diferencia de fases al pasar la frecuencia por la condición de resonancia.

Para asimilar la esencia de estas interesantes regularidades se puede hacer un experimento elemental (fig. 45). Colguemos un peso de un hilo y dejemos que se balancee libremente. Cuando se ponga de manifiesto el período de las oscilaciones libres de este péndulo, detengámoslo y moviendo periódicamente la mano hagámosle entrar en un estado de oscilaciones forzadas. Al principio moveremos la mano con rapidez para que el período de las oscilaciones propias sea mayor que el de las forzadas, y después lentamente, de manera que el período de las oscilaciones propias sea menor que el de las forzadas. Nos convenceremos de que, en el primer caso, el péndulo y la mano se mueven en oposición de fase o antifase, y, en el segundo, en concordancia de fase o fase.

Volvamos a ocuparnos del péndulo de resorte que consideramos en la pág. 99, que tenía el coeficiente de amortiguación $\alpha=20$ g/s, la masa de 50 g y el período $T_0=0{,}28$ s ($\omega_0=22{,}4$ s^{-1}). Si sobre este péndulo actúa una fuerza sinusoidal externa de frecuencia ω, la amplitud de las oscilaciones forzadas resultará ser ya $A=4$ cm cuando la amplitud de fuerza impulsora $F_0=1790$ din$\approx 1{,}8$ gf. La discrepancia de la frecuencia de la fuerza impulsora respecto de ω_0 provoca la variación de la amplitud de las oscilaciones forzadas y del ángulo de fase β entre las oscilaciones del péndulo y la fuerza exterior. En la tabla que sigue se dan los datos correspondientes obtenidos por las fórmulas de este párrafo.

Frecuencia de la fuerza externa ω, Hz	Amplitud de las oscilaciones forzadas A, cm	Angulo de fase β
2	3,58	0°05′
10	3,95	0°35′
15	4,48	0°15′
22,4	4,04	90°
30	2,48	188°50′
40	1,31	189°10′

Se ve que, cuando existe amortiguación, la amplitud máxima de las oscilaciones forzadas se alcanza cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es algo menor que la frecuencia propia de las oscilaciones. Cuanto menor sea la amortiguación, tanto menos se notará este corrimiento.

§ 28. *Autooscilaciones*

La fig. 46, *a* representa un baño, de sección triangular, sujeto a un eje alrededor del cual puede balancearse. Este baño tiene cierto período de oscilaciones libres propias y, desviándolo de su

posición de equilibrio, podemos observar estas oscilaciones propias hasta que el rozamiento y la resistencia del aire no las paran. Coloquemos este baño debajo de un grifo de agua y dejemos salir un chorro uniforme de modo que caiga sobre la pared del baño en un punto lo más alejado posible de su línea central. No es difícil imaginarse lo que ocurrirá en este caso. A medida que el baño se vaya llenando de agua, su centro de gravedad se irá elevando y llegará un instante en que se encuentre más alto que el eje que sostiene al baño. Una presión pequeña del chorro bastará entonces para que el baño se vuelque, se derrame el agua y el baño vuelva a su antigua posición. Este fenómeno se repetirá mientras que el chorro de agua caiga en el baño. Este último oscilará. Pero el carácter de estas oscilaciones y la esencia del fenómeno son muy distintos del de las oscilaciones que hemos estudiado antes.

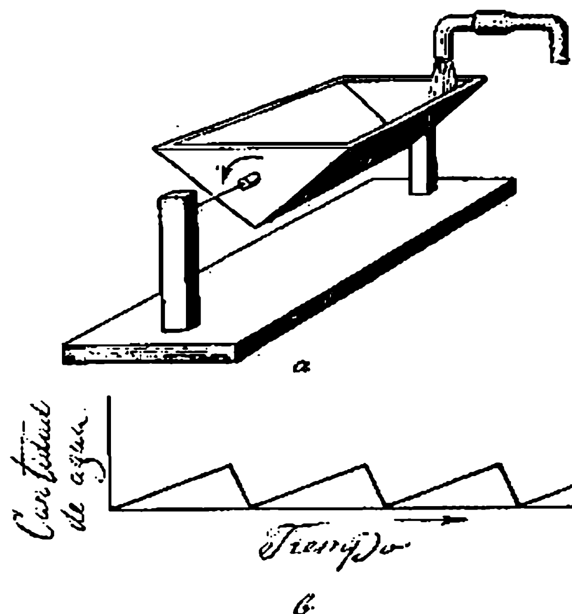


FIG. 46.

En primer lugar es importante advertir que la acción exterior no tiene carácter de oscilación. Esta acción exterior (presión del chorro de agua) da una fuerza constante. La segunda circunstancia es que un sistema real, sometido a la acción del rozamiento o de otras resistencias, realiza oscilaciones no amortiguadas. Y, finalmente, otra circunstancia importante: las oscilaciones que se producen no son armónicas, y no se pueden representar por medio de una sinusoide. En el ejemplo que hemos puesto hay un poco de común con la sinusoide. Haciendo este experimento podemos cerciorarnos de que la cantidad de agua que hay en el baño se puede representar, en función de tiempo, por una curva serriforme como la que se muestra en la fig. 46, *b*.

Las oscilaciones que acabamos de describir pertenecen a las llamadas *autooscilaciones*. Las autooscilaciones son un fenómeno peculiar, diferente en esencia de las oscilaciones libres mantenidas originadas sin la acción de fuerzas, así como de las oscilaciones forzadas que se producen por la acción de una fuerza periódica. El ejemplo elegido anteriormente puede parecer artificial. Sin embargo, los sistemas autooscilantes están muy difundidos y nos

encontramos con ellos frecuentemente en todas partes donde tienen lugar oscilaciones mecánicas o de otro tipo.

A los sistemas autooscilantes pertenecen los relojes de péndulo más simples (fig. 47). Como es sabido, a estos relojes se les da cuerda subiendo una pesa pendiente de una cadena que pasa por una rueda dentada. Esta rueda, por medio de un engranaje, transmite la rotación a la rueda de escape, cuyos dientes actúan sobre una palanca angular de brazos iguales llamada áncora. Al áncora va rígidamente sujeto un péndulo. En los instantes en que la rueda de escape toca con sus dientes los del áncora, el péndulo experimenta un impulso y la rueda citada gira en un diente. El tiempo restante el péndulo con el áncora se balancea libremente asegurando la exactitud de la marcha del reloj. El áncora y la rueda de escape se construyen de tal forma, que el péndulo recibe dos impulsiones en el sentido de su movimiento: una, cuando va de izquierda a derecha, y otra, cuando va de derecha a izquierda.

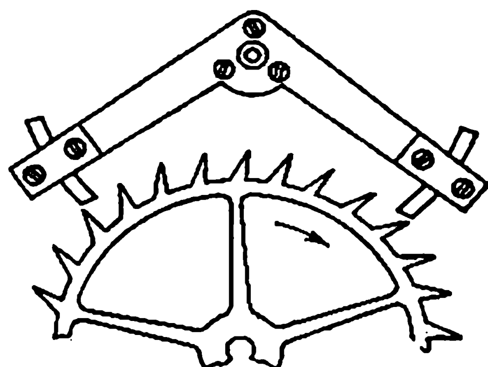


FIG. 47.

En estos relojes encontramos los mismos indicios de sistema autooscilante que vimos en el baño de sección triangular. Las oscilaciones se producen por la acción de una fuerza constante (no periódica), y las oscilaciones no son amortiguadas, a pesar de la existencia de rozamiento, ni tienen carácter armónico.

En los ejemplos que hemos puesto se ve una propiedad general de las autooscilaciones, la *reacción*. El péndulo efectúa oscilaciones mantenidas obligando al mecanismo a empujarle en los instantes convenientes. El mecanismo le empuja al péndulo y éste opone su reacción al mecanismo. Si el péndulo no se mueve, cesan las impulsiones. Las oscilaciones del péndulo las rige el propio péndulo.

Del mismo modo, el balanceo del baño triangular lo rige el propio baño. El agua que llega regula las oscilaciones del baño, y la propia estructura de éste regula la entrada del agua.

Una cuerda tocada con los dedos y soltada se halla en estado de oscilaciones libres. Pero si por la cuerda pasa el arco un músico, la situación cambia; ahora realiza oscilaciones de tipo serriforme. El arco arrastra a la cuerda; cuando el desplazamiento de la última alcanza cierto límite, la cuerda se desprende del arco y retorna a la posición inicial. El arco vuelve a arrastrarla y el proceso se repite. Durante un segundo, mientras el músico pasa el arco, este fenómeno se reitera periódicamente centenares de veces. Esto es

una autooscilación típica, puesto que la provoca una fuerza que actúa constantemente. La propia cuerda con su elasticidad rige las oscilaciones.

Los chirridos de los goznes mal engrasados de las puertas son un fenómeno que tiene el mismo origen.

Hablaremos de reacción en todos aquellos casos en que un aparato o máquina introduce automáticamente correcciones en su comportamiento cuando varían las condiciones de trabajo. El principio de reacción es una de las ideas fundamentales que se utilizan en la automática moderna.

§ 29. Composición de oscilaciones de una misma dirección

En una serie de casos puede plantearse el problema del movimiento de un cuerpo que toma parte simultáneamente en dos procesos oscilatorios. Por ejemplo, un péndulo oscilante puede hallarse sobre una plataforma o sobre un barco que se balancee.

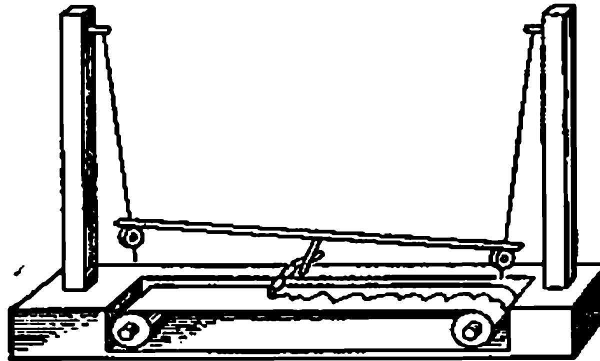


FIG. 48.

Si se trata de oscilaciones de una misma dirección, esta composición se puede hacer valiéndose del modelo que reproduce la fig. 48. En ella se representan dos péndulos que oscilan en planos paralelos. Sobre ellos descansa libremente un palo liviano, a cuyo centro va sujeta una pluma registradora. Aproximadamente se puede considerar que, cualesquiera que sean los movimientos de los péndulos, la pluma se encontrará en un plano que diferirá poco de los de oscilación de aquéllos, y el desplazamiento de la pluma en un instante dado será igual a la suma algebraica de las elongaciones de dichos péndulos. También se puede utilizar otro dispositivo: una bola oscila en un muelle que está colgado de una tabla. La tabla, a su vez, va sujeta por medio de otro muelle a un soporte,

de modo que la bola toma parte simultáneamente en dos oscilaciones de una misma dirección.

Si x_1 es la elongación de la primera de las oscilaciones, en ausencia de la segunda, y x_2 es la elongación de la segunda, en ausencia de la primera, cuando los dos procesos oscilatorios se desarrollan al mismo tiempo, en cada instante,

$$x = x_1 + x_2.$$

En el caso más general las oscilaciones que se componen pueden tener diferentes amplitudes, frecuencias y fases.

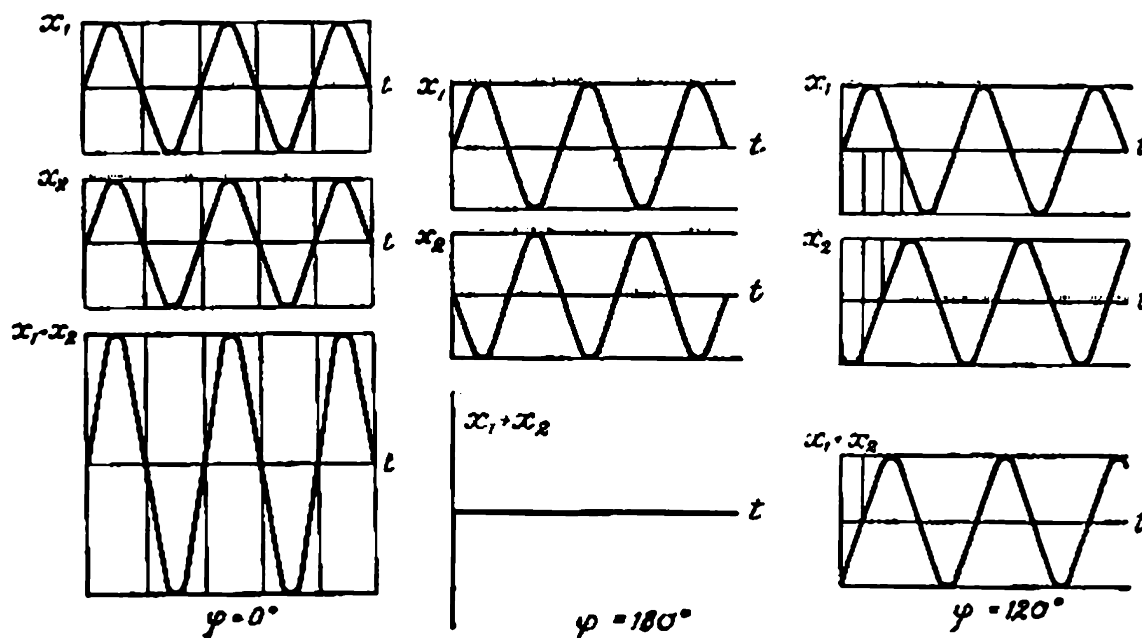


FIG. 49.

Consideremos primero el caso en que las oscilaciones tienen la misma amplitud y frecuencia, pero distintas fases. Entonces ($\omega = 2\pi/T$)

$$x_1 = A\cos\omega t, \qquad x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

y

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Esto significa que la oscilación resultante también será armónica y tendrá la amplitud

$$2A\cos\frac{\varphi}{2}.$$

De aquí se deduce que las amplitudes se suman aritméticamente, si las oscilaciones están en fase, y se restan, si las oscilaciones

están en oposición de fase ($\varphi=180°$). En los casos intermedios la amplitud toma valores comprendidos entre cero y $2A$. En particular, cuando $\varphi=120°$ la amplitud de la oscilación resultante es igual a A. La fig. 49 sirve de ilustración a lo dicho.

Otro caso importante es la composición de oscilaciones de distintas frecuencias. Para simplificar suponemos $\varphi=0$ y que las amplitudes son iguales. Entonces

$$x_1 = A\cos\omega_1 t \quad \text{y} \quad x_2 A\cos\omega_2 t,$$

$$x = 2A\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t.$$

En el caso general, al componer estas oscilaciones, se produce cierto movimiento oscilatorio, pero no se consigue notar una

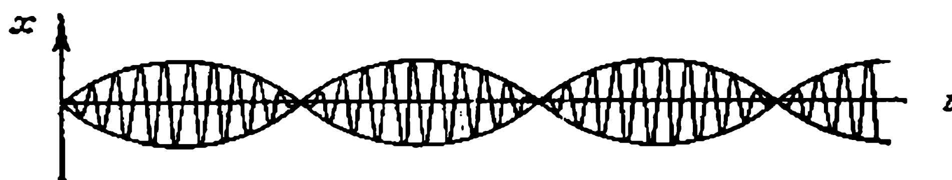


FIG. 50.

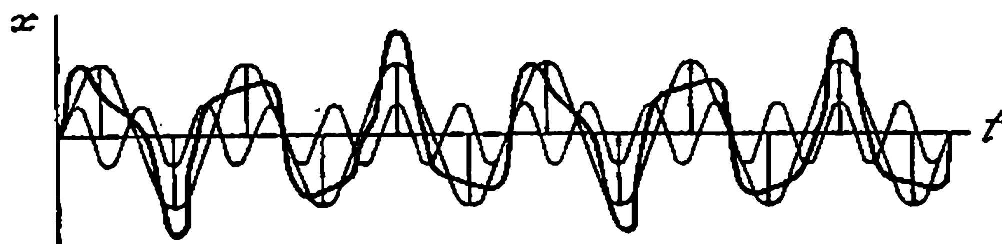


FIG. 51.

periodicidad rigurosa en las variaciones de la elongación x. No obstante, hay dos casos particulares que merecen especial atención.

En primer lugar consideraremos el caso de dos oscilaciones de frecuencias ω_1 y ω_2 próximas. Entonces $\omega_1-\omega_2 \ll \omega_1+\omega_2$ y la elongación x es el producto de dos cosenos: uno, que varía rápidamente con el tiempo, y otro, que varía muy lentamente. Por lo tanto

$$2A\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t$$

se puede considerar la amplitud, lentamente variable, de unas oscilaciones que se efectúan con la frecuencia media $\omega_{med}=(\omega_1+$ $+\omega_2)/2$. Estas oscilaciones, llamadas *pulsaciones*, se representan en la fig. 50. Aquí se ven perfectamente dos períodos: el de la oscilación fundamental y el de la pulsación.

El segundo caso importante es el de la composición de dos oscilaciones cuyas frecuencias se encuentran en relación de números enteros. Es evidente que la oscilación resultante será periódica. Si, por ejemplo, el periodo de una oscilación es 3 s y el de la otra 7 s, al cabo de 21 s la oscilación resultante se repetirá. Esto puede verse en la fig. 51.

§ 30. Espectro de las oscilaciones

Ya hemos hablado de las oscilaciones que se repiten exactamente al cabo de intervalos de tiempo determinados, pero que no son armónicas. Por ejemplo, mencionamos las oscilaciones serriformes. Si se hace un análisis suficientemente riguroso resulta, que las oscilaciones armónicas, es decir, las que se representan por una sinusoide, son menos frecuentes en la naturaleza que las inarmónicas.

Al final del párrafo anterior señalamos que la suma de las sinusoides, aunque no dé una sinusoide, origina una oscilación periódica siempre que sus frecuencias se relacionen entre sí como números enteros. Está claro que esto es también correcto para cualquier número de oscilaciones armónicas, y no sólo para dos.

La suma de dos oscilaciones de períodos T y $1/2\ T$ da una oscilación de periodo T; este mismo período tendrán las oscilaciones resultantes de la composición de tres oscilaciones cuyos períodos sean T, $1/2\ T$, $1/3\ T$, de cuatro, añadiendo a las anteriores otra de período $1/4\ T$, de cinco, agregándoles una más de período $1/5\ T$, etc. Pasando a las frecuencias, esto se puede expresar así: la resultante de la composición de cualquier número de oscilaciones cuyas frecuencias sean múltiplos de ω, es decir, de frecuencias ω, 2ω, 3ω, ... , será una oscilación de frecuencia ω.

Ahora se nos plantea una pregunta natural. Si componemos un número arbitrariamente grande de oscilaciones con frecuencias múltiplos de ω, tomando diversas oscilaciones ya con unas, ya con otras amplitudes, ¿no se podría conseguir siempre seleccionar una suma tal, que dé la peculiaridad de cualquier oscilación, incluso serriforme? A esta pregunta le dio una respuesta afirmativa el científico francés Fourier. El teorema que lleva su nombre demuestra que siempre es posible escoger unos valores de a_1, a_2, a_3, ... y φ_1, φ_2, φ_3, ... , que permitan representar cualquier oscilación periódica de frecuencia ω en forma de suma de oscilaciones armónicas:

$$x + a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + a_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) + \dots$$

La frecuencia ω se llama *frecuencia principal*, y las 2ω, 3ω, ... son las *sobretonos* o *armónicas* (se dice: segunda armónica, tercera armónica, etc). Cuanto más se aproxime la gráfica de la oscilación a una sinusoide, tanto menores serán las amplitudes de las armónicas. Y al contrarió, si la gráfica de la oscilación se asemeja a una sinusoide, las amplitudes de varias armónicas no diferirán mucho de la amplitud de la frecuencia fundamental.

La representación de las oscilaciones en forma de suma de oscilaciones armónicas se llama descomposición de dichas oscilaciones en su *espectro*, y se da el nombre de espectro al conjunto de datos acerca de las frecuencias y amplitudes de las oscilaciones armónicas que

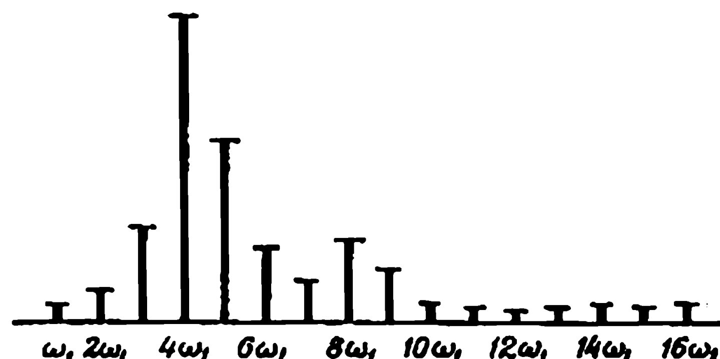


FIG. 52.

componen la oscilación de frecuencia ω. Los datos relativos al espectro de una oscilación se pueden escribir en forma de tabla. Cuando las frecuencias son muchas se suele recurrir a la representación gráfica del espectro (fig. 52).

La idea del espectro puede hacerse extensiva a los procesos no periódicos. Se puede hablar, por ejemplo, del espectro de las oscilaciones elásticas producidas al dar un puñetazo en la mesa, y tiene sentido el concepto de espectro de un disparo o de un grito.

Para que esto quede claro, estudiaremos primero un proceso consistente en impulsos periódicos amortiguados. Esto no es un grito o un disparo, sino más bien una serie de gritos o de disparos que se repiten a intervalos iguales de tiempo. El elemento de este proceso es una oscilación que se amortigua rápidamente, y la curva en total tiene la forma que se ve en la fig. 53, *a*. El espectro de esta oscilación puede establecerse por los medios existentes y tendrá la forma que muestra la figura de la derecha. En ella vemos que (como era de esperar) el espectro está formado por un conjunto de frecuencias múltiplos de la fundamental. Adviértase que el espectro tiene un máximo: la armónica que con más fuerza representa este espectro es la octava. Esto no es casual, porque, si re-

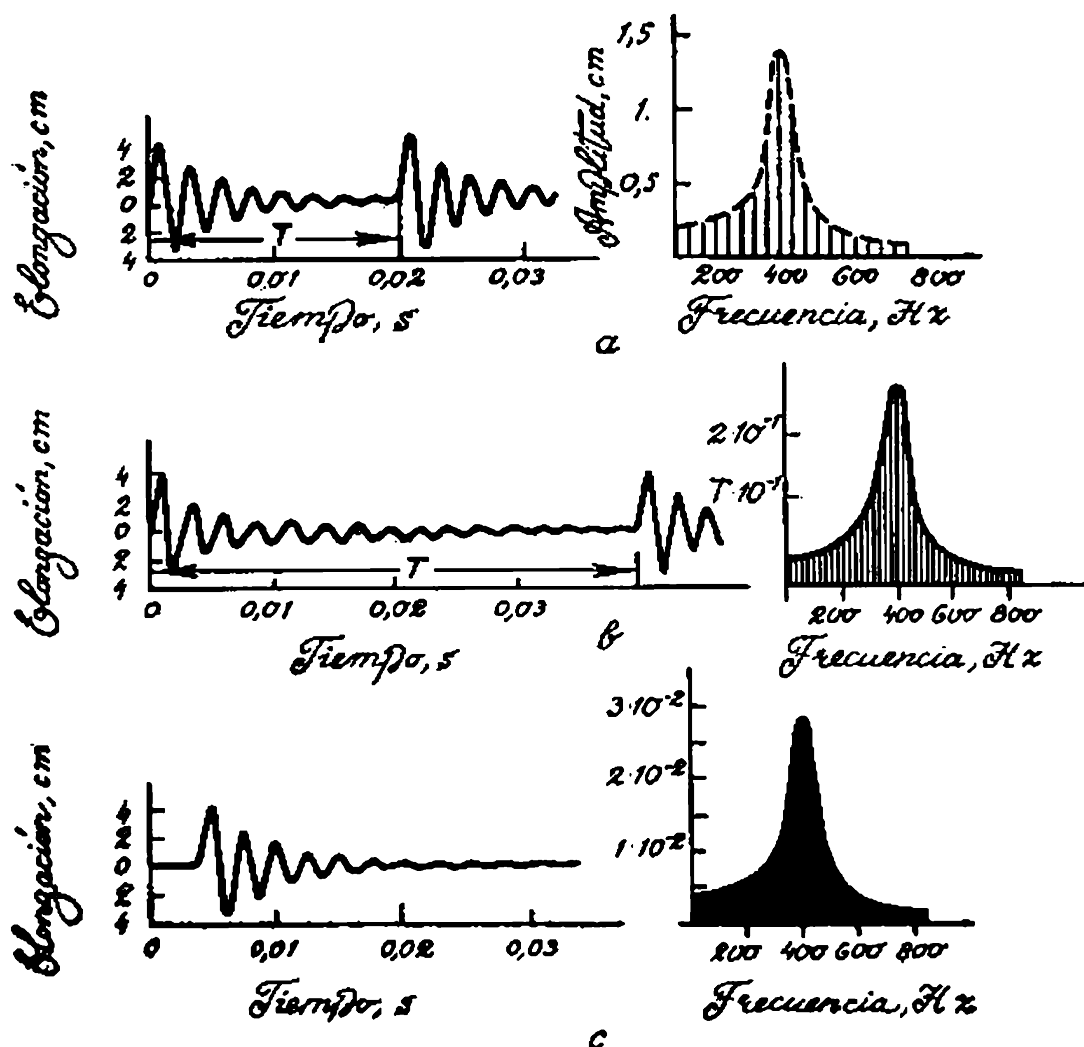


FIG. 53.

tornamos a la figura de la oscilación, vemos que en cada uno de los impulsos amortiguados la oscilación tiene una «frecuencia» 8 veces mayor que la frecuencia del tono fundamental (fig. 53, *a*).

La fig. 53, *b* representa unos impulsos semejentes a los anteriores, pero que se producen con una frecuencia dos veces menor que aquéllos. Compárese el espectro de esta oscilación con el de la precedente. Como la frecuencia fundamental es ahora dos veces menor, la «frecuencia» del proceso elemental amortiguado (que siguió siendo la misma que antes) será ahora la armónica decimosexta del tono fundamental. La distribución de las amplitudes de las armónicas continúa siendo la misma que en el caso anterior, pero su número en un mismo intervalo de frecuencias se hace dos veces mayor.

Ahora no es difícil comprender que el espectro de un proceso no periódico — de un impulso — será continuo. En él no habrá frecuencias aisladas, pero el carácter del espectro en un mismo intervalo de frecuencias será muy semejante al que hemos considerado antes (fig. 53, *b*).

La demostración matemática de los razonamientos que hemos expuesto se da en la teoría de las llamadas integrales de Fourier.

§ 31. Composición de oscilaciones perpendiculares entre sí

Para estudiar las leyes de una oscilación compleja, resultante de la suma de dos oscilaciones perpendiculares entre sí, lo mejor es utilizar un oscilógrafo electrónico. De este aparato trataremos más adelante (pág. 488). Por ahora bastará decir que este oscilógrafo permite realizar la oscilación de un rayo electrónico en dos direcciones perpendiculares entre sí. La huella del rayo electrónico sobre la pantalla luminescente describe la trayectoria resultante de la participación del punto luminoso en los dos movimientos oscilatorios mutuamente perpendiculares.

Supongamos que la oscilación de la huella del rayo en la dirección vertical se efectúa según la ley $y=b\cos(\omega t+\delta)$, y en la dirección horizontal, de acuerdo con la fórmula $x=a\cos\omega t$. Para determinar el carácter de la trayectoria resulatante hay que eliminar el tiempo en estas dos ecuaciones y hallar la ecuación $f(x,y)=0$. Escribiendo las expresiones de la elongación en la forma

$$\frac{x}{a}=\cos\omega t,\quad \frac{y}{b}=\cos(\omega t+\delta)=\cos\omega t\cdot\cos\delta-\operatorname{sen}\omega t\cdot\operatorname{sen}\delta$$

y sustituyendo en la segunda ecuación $\cos\omega t$ por x/a y $\operatorname{sen}\omega t$ por $\sqrt{1-(x/a)^2}$, obtenemos, después de unas transformaciones elementales, la ecuación de la elipse girada con respecto a los ejes de coordenadas:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\delta=\operatorname{sen}^2\delta.$$

Comencemos ahora a cambiar los parámetros de las oscilaciones y observemos el comportamiento de la elipse. Si se varía la diferencia de fases, la elipse cambiará de forma y, al mismo tiempo, girará (fig. 54). Cuando la diferencia de fases sea igual a 90° los ejes de la elipse coincidirán con los ejes de coordenadas. Si se varía la diferencia de fases, aumentándola o disminuyéndola, la elipse comienza a girar hacia la izquierda o hacia la derecha y, al mismo tiempo, se hace más estrecha. Cuando la diferencia de fases se anula, la elipse degenera en una línea recta. Esto debe compro-

barse haciendo en la ecuación de la elipse escrita anteriormente $\delta=0$, 90, 180°.

Si las amplitudes de las oscilaciones a lo largo de las verticales y horizontales son iguales, cuando las diferencias de fases sean de 90 y 270° la trayectoria será una circunferencia. Estas dos diferencias de fases, aunque dan trayectorias idénticas, difieren entre sí. En un caso el rayo recorre la circunferencia en el sentido de las agujas del reloj, y en el otro, en sentido contrario. Para esto

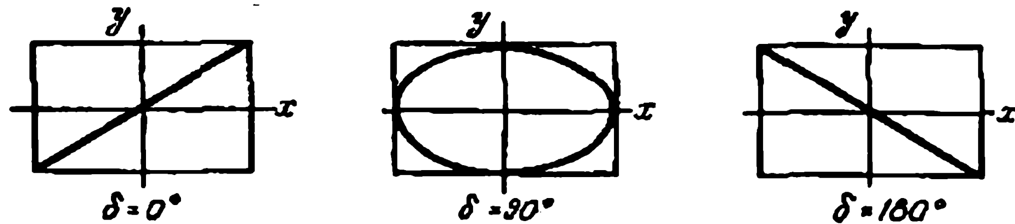


FIG. 54.

hay que volver a las ecuaciones iniciales. Estas ecuaciones se escribirán así:

$$\text{para } 90^\circ \; x=a\cos\omega t, \qquad y=b\cos(\omega t+90^\circ);$$
$$\text{para } 270^\circ \; x=a\cos\omega t, \qquad y=b\cos(\omega t+270^\circ).$$

El primer par de ecuaciones indica que al aumentar el tiempo, a partir de $t=0$, el punto con las coordenadas $x=a$, $y=0$ comenzará a moverse en sentido de las y negativas, es decir, de las agujas del reloj. El segundo par de ecuaciones denota el movimiento inverso.

Si la demostración se hace por medio del oscilógrafo, se puede notar que las elipses no permanecen quietas en un sitio, sino que se desplazan lentamente como si ocurriera una variación continua de la diferencia de fases. Prestando atención se verá que la elipse no gira, sino que la curva que describe el punto luminoso parece que pasa continuamente de una elipse a otra. Este fenómeno se produce cuando las frecuencias de las oscilaciones se diferencian un poco. En efecto, la diferencia de frecuencias equivale por completo al caso en que la diferencia de fases cambia continuamente. Por ejemplo, la frecuencia de la oscilación vertical ω_2 es mayor que la frecuencia de la horizontal ω_1 en la cantidad $\Delta\omega$, entonces

$$\omega_1 t+\delta=\omega_2 t+(\Delta\omega t+\delta)$$

donde entre paréntesis figura la diferencia de fases variable.

Si las frecuencias difieren sensiblemente entre sí, el rayo no tiene tiempo de recorrer una parte considerable de una elipse,

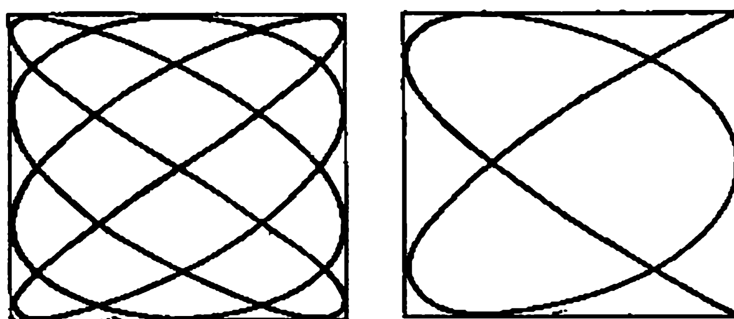


FIG. 55.

cuando ya su fase cambia de valor. Como resultado, las curvas descritas se parecen cada vez menos a elipses. Unos ejemplos de estas raras curvas, llamadas figuras de Lissajous, se dan en la fig. 55. Las curvas representadas corresponden a las relaciones de frecuencias 3 : 4 y 1 : 2.

6

ONDAS VIAJERAS

§ 32. Propagación de la deformación

Cada cuerpo posee cierto grado de elasticidad, es decir, capacidad de restablecer su forma alterada como consecuencia de la acción breve de una fuerza. Esta capacidad de los cuerpos es causa de que toda acción mecánica sea transmitida por el cuerpo con una velocidad finita. Si existiera una varilla absolutamente rígida, incapaz de defomarse, podría moverse solamente como un todo, las acciones de las fuerzas se propagarían por este cuerpo instantáneamente. Por el contrario, un cuerpo absolutamente plástico, que se deformara sin recuperar lo más mínimo su forma, sería incapaz de transmitir en forma alguna una acción mecánica.

En un cuerpo elástico la deformación se transmite sucesivamente de un punto del cuerpo al vecino. Si a una varilla se le da con un martillo un golpe que la comprima, en su extremo se forma una condensación que se propaga con una velocidad determinada *c* a lo largo del cuerpo. Si en un cuerpo sólido se crea una flexión local de carácter breve, también se transmitirá con una velocidad finita por el cuerpo sólido. Esto mismo es correcto para cualquier deformación. Cómo la deformación recorre el cuerpo al ser sometido

a diversas acciones, se demuestra generalmente valiéndose de muelles (fig. 56).

La elasticidad de compresión y alargamiento la poseen tanto los cuerpos sólidos como los líquidos y gaseosos. Por lo tanto, en todos los cuerpos es posible la transmisión de estas deformaciones. En cuanto se refiere a las deformaciones de cizallamiento, torsión y flexión, éstas solamente pueden ser transmitidas por los cuerpos sólidos poseedores de la correspondiente elasticidad. En el caso de una deformación de compresión y alargamiento los movimientos de las partículas se producen en la misma dirección en que se transmite la acción mecánica. En los casos como éste se dice que la propagación de la deformación es longitudinal. Cuando existe cizallamiento, flexión o torsión, la dirección del movimiento de las partículas puede formar, en general, un ángulo arbitrario con la dirección en que se transmite la energía.

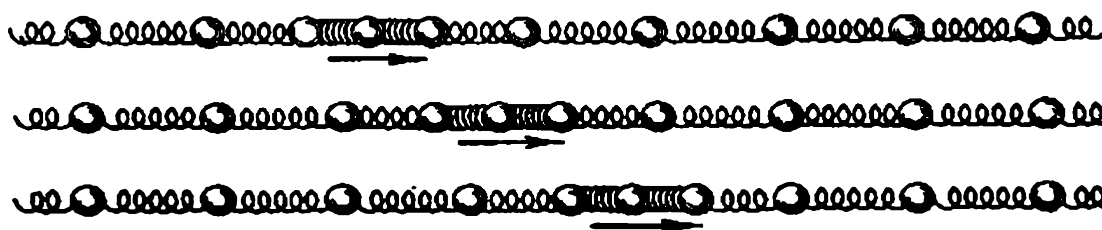


FIG. 56.

Siempre es posible destacar la dirección en que se transmite la acción mecánica y después descomponer el desplazamiento de las partículas del cuerpo según tres ejes perpendiculares entre sí, de los cuales uno se encontrará a lo largo de la línea de propagación y los otros, en un plano perpendicular a ella. Por esto, en el caso más complejo puede considerarse la deformación que se propaga como un conjunto de tres movimientos: dos transversales y uno longitudinal.

La velocidad de propagación de una deformación elástica depende de las propiedades mecánicas del cuerpo; como demuestra la física teórica, esta velocidad puede ligarse a otras constantes físicas del cuerpo. Así, para las ondas longitudinales la velocidad de propagación viene expresada por la simple fórmula

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \varkappa}}.$$

Aquí ρ es la densidad del cuerpo y $\varkappa$, su compresibilidad. Una gran densidad del cuerpo ocasiona el aumento de la inercia de sus partículas y, por consiguiente, disminuye la velocidad de pro-

pagación de las ondas elásticas. Las pequeñas compresibilidades nos dicen que incluso a las deformaciones pequeñas corresponden grandes fuerzas elásticas. Esta circunstancia conduce al aumento de la velocidad de propagación de la deformación.

Esta fórmula se aplica de esta forma, generalmente, a los líquidos. Así, por ejemplo, el agua, cuando la presión varía en 1 atm se comprime en un $5\cdot10^{-5}$ de su volumen. Esto significa que su compresibilidad, igual (véase la pág. 166) por definición a $\varkappa=-\frac{1}{\Delta p}\frac{\Delta v}{v}$, es 10^{-6} cm²/din$\cdot5\cdot10^{-5}$. La densidad del agua es de 1 g/cm³. De aquí obtenemos que la velocidad de propagación de una deformación en el agua es

$$c^2=2\cdot10^{10}\ \mathrm{cm^2/s^2},$$
$$c=1400\ \mathrm{m/s}.$$

Para los gases es preferible transformar la fórmula de la velocidad de propagación. Como el proceso de propagación de una condensación, en un gas, es muy rápido, la compresión y el enrarecimiento de éste pueden considerarse adiabáticos, es decir, que se producen sin intercambio de calor. Más adelante (pág. 179) obtendremos la ecuación del proceso adiabático, de la cual es fácil deducir la relación que existe entre el coeficiente de compresibilidad y la presión del gas: $\varkappa=1/\gamma p$, donde $\gamma=1,4$ *). En este caso $c=\sqrt{\gamma p/\rho}$. Para un gas perfecto $\rho=\mu/v$ (μ es la masa de un mol de gas y v es su volumen) será proporcional a la fracción $p\mu/T$ (ya que pv/T=const), es decir, la velocidad de propagación de una deformación en un gas

$$c=\sqrt{a\frac{T}{\mu}}.$$

*) La ecuación del proceso adiabático es pv^{γ}=const. Si p y v son los valores en equilibrio de la presión y del volumen de una determinada masa de gas y $p+\Delta p$ y $v-\Delta v$ son los valores correspondientes en el instante de la deformación,

$$(p+\Delta p)(v-\Delta v)^{\gamma}=pv^{\gamma}.$$

De donde

$$1+\frac{\Delta p}{p}=\left(1-\frac{\Delta v}{v}\right)^{-\gamma}=1-\gamma\frac{\Delta v}{v}+\frac{\gamma(\gamma-1)}{1\cdot2}\left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2+\dots$$

Prescindiendo de los términos, de orden superior del desarrollo del binomio, obtenemos que

$$\Delta p=-\gamma p\frac{\Delta v}{v}.$$

De aquí se deduce que

$$\varkappa=\frac{1}{\gamma p}.$$

Aquí a es un coeficiente cuyo valor se calcula fácilmente por medio de las ecuaciones que estudiaremos más tarde (pág. 179).

De este modo, la velocidad de propagación de una deformación en un gas, incluida la velocidad de propagación de las ondas sonoras, a las que nos referiremos más adelante, es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura y no depende de la presión del gas. Ofrece interés la dependencia con respecto al peso molecular: la velocidad de propagación de una deformación en el hidrógeno es igual a 1263 m/s, mientras que en el aire tenemos el bien conocido número 331 m/s.

Para las ondas longitudinales que se propagan en un sólido, se cambia, de ordinario, el coeficiente de compresibilidad por el módulo de elasticidad. Como por definición el módulo de elasticidad

$$E=\frac{F}{S}:\frac{\Delta l}{l}=\Delta p:\frac{\Delta l}{l},$$

es evidente que, en ausencia de movimientos transversales, $\varkappa=1/E$, puesto que la compresión lineal relativa será igual a la de volumen. La fórmula de la velocidad se escribe, en este caso, en la forma

$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

De la fidelidad con que se cumple esta fórmula se puede juzgar por los siguientes datos aproximados:

	Módulo de Young E, N/m²	Densidad ρ, g/cm³	c calculada, m/s	c obtenida experimentalmente, m/s
Vidrio	$7,65\cdot10^{10}$	2,4	5700	5990
Acero	$2,16\cdot10^{9}$	8	5200	5000
Madera	$7,05\cdot10^{10}$	0,7	4130	4200
Agua (13° C) . .	$\varkappa=4,75\cdot10^{-10}$ m²/N	1	1450	1440

La comprobación de esta fórmula debe hacerse estudiando la velocidad de propagación del sonido en varillas delgadas. Un estudio más profundo de esta cuestión demuestra que la fórmula $c=\sqrt{E/\rho}$ debe ser correcta únicamente en el caso de estos cuerpos. Para cuerpos de otra forma, así como para la propagación del sonido en un medio continuo, la teoría conduce a otras expresiones que nosotros no vamos a mencionar.

También debe advertirse que los valores de la tabla anterior pueden servir solamente de orientación. Las velocidades del sonido en vidrios, maderas, aceros, etc. de diferente calidad pueden diferir sensiblemente.

§ 33. Origen del movimiento ondulatorio

Por multitud de procedimientos se puede hacer llegar a un punto determinado de un cuerpo o de un medio una oscilación incesante. Una fuerza actuando periódicamente en un punto cualquiera de un cuerpo, crea una deformación, variable periódicamente, que se transmitirá de un punto a otro de dicho cuerpo con una velocidad determinada. Todos los puntos del cuerpo entrarán en oscilación. Pero como la velocidad con que se propaga la deformación es finita, los puntos del cuerpo entrarán en vibración unos después que otros. Si el cuerpo es ilimitado, esta oscilación avanzará todo el tiempo formando una onda viajera.

Aunque cuerpos ilimitados no existen, la longitud de un gran cuerpo no influye en el carácter del fenómeno, porque las oscilaciones no llegan hasta su fin debido a las inevitables pérdidas de energía.

Consideremos una onda que avanza por un cuerpo prácticamente ilimitado a lo largo de una dirección cualquiera.

Supongamos que un punto, que se encuentra en el origen de coordenadas, oscila de acuerdo con la ecuación $y=A\cos\omega t$. Escribamos la ecuación de las oscilaciones de un punto que se encuentre en la línea de propagación de la deformación a una distancia x del inicial. No podemos escribirla de la misma forma, ya que este punto empezará a oscilar con el retraso de $\tau=x/c$ necesario para que la deformación se propague hasta la distancia x. Por lo tanto, la oscilación del punto x debe estar desplazado en fase respecto del punto inicial. El punto x se encontrará en el instante t en la fase de oscilación en que se encontraba el punto inicial en un instante x/c anterior. Por consiguiente, la ecuación de las oscilaciones de un punto que se encuentra a la distancia x del origen de coordenadas tiene la forma

$$y=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right),$$

donde $\omega x/c$ es el desplazamiento de fase.

Esta ecuación se llama *ecuación de onda* y abarca las oscilaciones de todos los puntos situados a distancias cualesquiera con respecto al inicial.

Supongamos que el foco de la onda está lejos del observador y que el frente de onda hace ya tiempo que pasó adelante. Vamos

a considerar una zona de la línea situada a lo largo del eje x animada por el movimiento ondulatorio. A primera vista puede parecer que la introducción de este nuevo término no está justificada. Todos los puntos de la zona oscilarán, eso está claro. Pero, ¿podremos ver, acaso, el movimiento de la onda?, ¿podremos decir que se mueve hacia la derecha o hacia la izquierda? Un estudio atento demuestra que la peculiaridad de un movimiento ondulatorio es fácil de describir. Si la onda avanza de izquierda a derecha, el punto vecino de la derecha se retrasará en fase respecto del de la izquierda. En el caso contrario se adelantará a él.

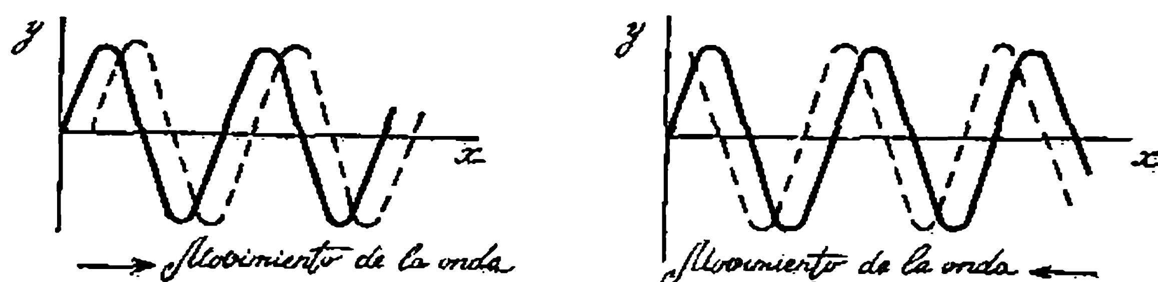


FIG. 57.

En la fig. 57 se representan dos ondas, una que avanza hacia la derecha y otra que lo hace hacia la izquierda. Cada una de estas sinusoides es una fotografía instantánea de la onda. En cada instante posterior esta sinusoide, como si fuera un todo rígido, se trasladará en la dirección en que se transmite la energía.

Por esto se comprende cómo se refleja la dirección (el sentido) de la onda en la forma de su ecuación. Si la onda avanza a lo largo del eje de coordenadas, el valor de la coordenada x figurará con signo menos. Y cuando la onda avanza en sentido contrario a la dirección en que se forman los valores crecientes de la coordenada, en el argumento del coseno habrá que cambiar el signo:

$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right), \qquad y = A\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

a lo largo del eje — en sentido contrario al eje

Escribamos la ecuación de la «foto instantánea» de la onda para cualquier tiempo múltiplo del período:

$$y = A\cos\omega\frac{x}{c} = A\cos 2\pi\frac{x}{cT}.$$

Del signo menos se puede prescindir, porque el coseno es una función par. De la forma de esta ecuación se deduce inmediatamente que el período de la sinusoide es

$$\lambda = cT.$$

Este período espacial, es decir, la distancia al cabo de la cual se repite la distribución ondulatoria, recibe el nombre de *longitud de onda*. Hemos obtenido, pues, la conocida relación que liga la velocidad del movimiento de la onda con su longitud y con el período de las oscilaciones del punto.

Cuando una deformación se transmite ondulatoriamente a través de un cuerpo según la ley del seno, cambia una serie de magnitudes físicas, a saber: la elongación del punto, la velocidad de las partículas oscilantes, la presión y la densidad. Por esto, la expresión de la onda con que nosotros operamos es muy general. Por y se puede entender cualquiera de las magnitudes físicas enumeradas que varían según la ley del seno al moverse la onda a lo largo de la dirección x. Conviene advertir, sin embargo, que las ondas de la presión, de la velocidad y de la elongación pueden no estar en la misma fase. Por ejemplo, es evidente que la onda de las velocidades de las partículas oscilantes estará desplazada en fase 90° respecto de la onda de elongaciones, puesto que la velocidad del punto es máxima cuando éste pasa por la posición del equilibrio.

§ 34. Ondas de presión y de velocidad de oscilación

Es interesante conocer la relación que existe entre las amplitudes de las ondas de las diversas magnitudes físicas. Nos detendremos en esta cuestión para ocuparnos solamente del caso de las ondas longitudinales que se propagan en un gas. Nos pueden interesar las ondas de elongación, de velocidades de las partículas y de sobrepresión. Como la teoría se estableció en un principio para las ondas percibidas por el oído, la sobrepresión Δp se llama frecuentemente presión sonora y, prescindiendo del signo Δ, se designa por p.

Si la amplitud de la onda de elongación es A, la amplitud de la onda de velocidades será ωA. Estas dos ondas estarán desplazadas en fase 90°.

Veamos ahora la relación que existe entre la amplitud de la velocidad de oscilación y la amplitud de la presión. Comparando la definición general de $\varkappa$ con su expresión para los gases (pág. 117), obtenemos para la presión sonora la fórmula

$$p = -\gamma P \frac{\Delta v}{v},$$

donde P es la presión del gas o, aplicando la relación $c^2 = \gamma P/\rho$,

$$p = -c^2 \rho \frac{\Delta v}{v}.$$

Es completamente natural que exista una ligazón directa entre la sobrepresión p y la compresión relativa en el mismo punto del gas.

Pero la magnitud de la compresión relativa del volumen $\Delta v/v$ se puede ligar con la amplitud del desplazamiento de las partículas oscilantes. En la línea de propagación de la onda señalaremos dos puntos: x_1 y x_2. En una onda longitudinal la variación de la densidad se produce únicamente debido a los desplazamientos en la dirección de propagación. Aislemos mentalmente en el gas un volumen limitado por las secciones x_1 y x_2. Cuando la onda avanza, las moléculas que se hallan dentro de este volumen se desplazan. Debemos prestar atención a las secciones fronterizas solamente. Si las moléculas de la capa x_1 se desplazan en $y_1=A\cos\omega\left(t-\frac{x_1}{c}\right)$, y las de la capa x_2, en $y_2=A\cos\omega\left(t-\frac{x_2}{c}\right)$, la dimensión lineal del volumen variará, desde el valor x_2-x_1 en ausencia de la onda, en la cantidad y_2-y_1. La variación relativa de la longitud, y, por consiguiente, del volumen, será $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Pasando al límite, para obtener la magnitud característica en un punto del espacio, obtenemos

$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{dy}{dx}=-\frac{\omega}{c}A\operatorname{sen}\omega\left(t-\frac{x}{c}\right),$$

y para la presión

$$p=-c\rho A\omega\operatorname{sen}\omega\left(t-\frac{x}{c}\right).$$

Con esto se demuestra que la presión varía en fase con la velocidad de oscilación de las partículas en la onda. $A\omega=u_0$ es la amplitud de la velocidad de oscilación. De este modo, la amplitud de la presión p_0 se expresa en función de la amplitud de la velocidad de la forma siguiente:

$$p_0=\rho c u_0.$$

En acústica u se mide generalmente en cm/s, y la presión, en din/cm^2. Para el aire a la temperatura ambiente, en estas unidades, $p_0=41\ u_0$. La magnitud ρc se llama *resistencia acústica* u *ondulatoria*. El sentido de esta denominación se comprende que es el siguiente: cuanto mayor es la resistencia, tanto menor es la velocidad de oscilación de las partículas para los mismos valores de la sobrepresión. He aquí las resistencias acústicas de algunos materiales:

	ρ, g/cm³	c, cm/s	ρc, g/(cm²s)
Vidrio	2,6	$5{,}5\cdot10^5$	$14\cdot10^5$
Acero	7,9	$5\cdot10^5$	$40\cdot10^5$
Madera	0,7	$4{,}2\cdot10^5$	$2{,}9\cdot10^5$
Agua	1	$1{,}44\cdot10^5$	$1{,}4\cdot10^5$

§ 35. *Flujo de energía*

El movimiento ondulatorio transporta energía de un lugar del espacio a otro. Pero conviene recordar que todos los puntos del medio que toman parte en la transmisión de la energía oscilan todo el tiempo en torno a la posición de equilibrio invariable.

Todos los puntos del cuerpo participan en las oscilaciones. Por lo tanto, la unidad de volumen tendrá una energía oscilatoria

$$w=\frac{\rho v_{\text{máx}}^2}{2},$$

donde ρ es la densidad, es decir, la masa de la unidad de volumen del cuerpo, y $v_{\text{máx}}$ es el valor de la amplitud de la velocidad de oscilación. Tomando para esta última magnitud la expresión que ya conocemos

$$v_{\text{máx}}=\omega A,$$

donde A es la amplitud del desplazamiento y ω es la frecuencia; la densidad de la energía oscilatoria del cuerpo se puede escribir de la forma

$$w=\frac{\rho\omega^2A^2}{2}.$$

Esta energía se propaga con la velocidad c. Puede planteársenos la pregunta siguiente: ¿a qué es igual la *intensidad de la onda*, es decir, la cantidad de energía que pasa, en la unidad de tiempo, a través de una unidad de superficie perpendicular a la dirección en que se propaga dicha onda? En lugar de hablar de la densidad de una onda suele hablarse del flujo de energía oscilatoria, entendiéndose por esto la energía que pasa en la unidad de tiempo (potencia) por un área dada. Este razonamiento no difiere en nada del que se hace en el caso del agua que pasa por un tubo. Al cabo de una unidad de tiempo la onda recorre un espacio c y trae la energía contenida en el volumen de un cilindro de longitud c y área de la base igual a la unidad. Como a la unidad de volumen le corres-

ponde la energía w, a este volumen le corresponderá la energía wc. Esta es la intensidad de la onda:

$$I = wc.$$

Vemos, pues, que la intensidad de una onda tiene el sentido de flujo de energía que pasa por la unidad de superficie. Esto fue propuesto primeramente por N. A. Úmov, que elaboró la teoría del movimiento de la energía en los cuerpos.

Hasta ahora se ha supuesto que el movimiento ondulatorio se propaga a lo largo de una línea recta (rayo). Esta consideración es válida para el estudio de una deformación que corre a lo largo de una varilla, de una cuerda, de columnas de aire, etc. Sin embargo, a nosotros nos interesan también los casos en que el movimiento ondulatorio invade una región del espacio tridimensional.

Para describir una onda tridimensional hay que conocer cómo se mueve su frente. Para hallar el frente de onda es necesario saber indicar, en un instante dado, todos los puntos del espacio que se encuentran en las mismas fases de oscilación. Indicando la posición sucesiva de esta superficie de fases iguales, es decir, el *frente de onda*, obtenemos una idea clara del carácter del movimiento ondulatorio.

La superficie de onda puede tener, en general, cualquier forma. ¿Qué sentido tiene entonces obtener la dirección de propagación de una onda? Es natural que como esta dirección se tome la normal al frente de onda.

Si el medio es completamente homogéneo y la onda se irradia en un punto cualquiera del medio, el frente de onda será esférico. Esta onda se propagará desde el centro siguiendo los radios. A grandes distancias del centro de radiación zonas considerables del frente de onda parecerán ya planas dentro de la precisión del experimento. Así aparece la idea acerca de la onda plana, que se propaga en la dirección de la normal al frente. Si el foco de onda tiene la forma de una recta, se produce una onda cilíndrica, que se propaga según los radios de un cilindro. La fig. 58 representa varios tipos de ondas.

No prestando atención a las pérdidas de energía de todo género que se producen durante el movimiento de una onda plana, se puede afirmar la necesidad de que sea igual la cantidad de energía que pasa por las sucesivas posiciones de las superficies de igual fase. Por esto la intensidad de una onda plana no variará durante el proceso de su propagación. Pero cuando se trata de ondas esféricas o cilíndricas la cosa varía. Como las superficies de igual fase aumentan en área en proporción directa al cuadrado de la distancia, para las ondas esféricas, y a la primera potencia de la distancia, para las ondas cilíndricas, la intensidad de estas ondas debe variar

en proporción inversa al cuadrado de la distancia para las ondas esféricas, o a la primera potencia de la distancia, para las ondas cilíndricas. Sólo en este caso se cumplirá la ley de conservación de la energía.

La intensidad de una onda es proporcional a la densidad de la energía oscilatoria, que, a su vez, es proporcional al cuadrado de la amplitud de la oscilación. De aquí se deduce que la amplitud de una onda esférica es inversamente proporcional a la primera potencia de la distancia desde el centro de radiación, y la amplitud

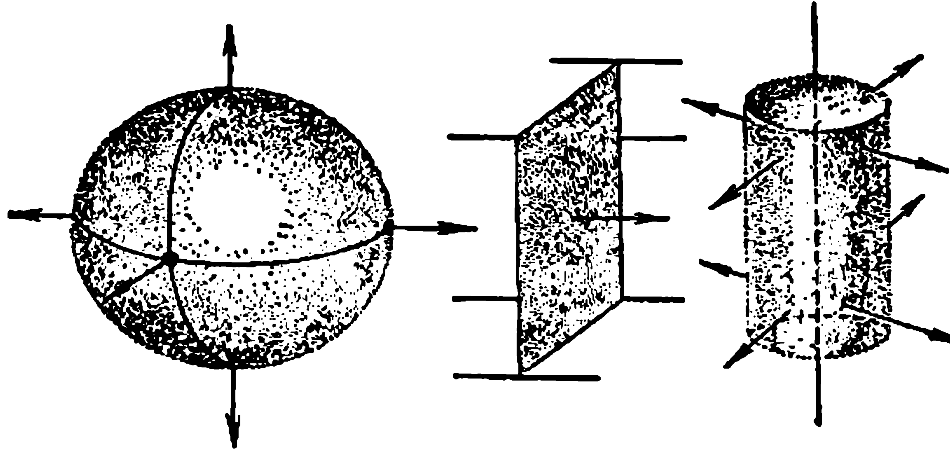


FIG. 58.

de una onda cilíndrica es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia desde la línea radiante: $y=\frac{A}{r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)$, para la onda esférica, e $y=\frac{A}{\sqrt{r}}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)$, para la onda cilíndrica. Aquí la distancia r, lo mismo que antes la x, se toma a lo largo de la dirección en que se propaga la onda.

Supongamos que debajo del agua se encuentra un foco de oscilaciones de 1 kHz que crea un flujo de energía $I=1$ W/cm². Hay que valuar la amplitud del desplazamiento A de las moléculas del agua, su aceleración B y la amplitud de la velocidad oscilatoria $\omega A=u_0$.

De las fórmulas de los párrafos anteriores se deduce que

$$A=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2I}{\rho c}\cdot 10^7}\ \text{cm},\qquad B=\omega\sqrt{\frac{2I}{\rho c}\cdot 10^7}\ \text{cm/s}^2,$$

$$u_0=\sqrt{\frac{2I}{\rho c}\cdot 10^7}\ \text{cm/s}.$$

Para el agua $c=1450$ m/s; $\rho=1$ g/cm³ y

$$A\approx 1{,}9\cdot 10^{-3}\ \text{cm},\quad \rho=740\ \text{m/s}^2\quad \text{y}\quad u_0\approx 12\ \text{cm/s}.$$

Si un flujo de energía igual que éste y de la misma frecuencia de oscilaciones se crea en el aire, para el cual $c=330$ m/s y $\rho=1{,}293\cdot 10^{-3}$,

$$A=0{,}04\ \text{cm},\quad B=14\cdot 10^6\ \text{cm/s}^2=14\,000\ \text{m/s}^2\quad \text{y}\quad u_0=220\ \text{cm/s}.$$

§ 36. *Amortiguación de las ondas elásticas*

Las ondas reales que se propagan en un medio (sólido, líquido o gaseoso) disminuyen de intensidad con mucha más rapidez que según la ley de los cuadrados inversos. Influyen en esto las pérdidas de energía mecánica, su transformación en calor.

La ley de la disminución de la intensidad de cualquier radiación al pasar por un medio se puede obtener casi siempre (para cualquier medio y cualquier radiación) del siguiente razonamiento. Si la onda atravesó una capa de espesor dx, la pérdida de intensidad deberá ser en todo caso proporcional a la intensidad incidente y al espesor de la capa, o sea, $dI=-\mu I\, dx$.

Esta ecuación puede integrarse; suponiendo que la intensidad es igual a I_0 en el punto $x=0$ e igual a I en el punto x, obtenemos la ley, correcta para las distancias finitas,

$$\int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I}=-\mu\int_{0}^{x}dx, \text{ es decir, } I=I_0e^{-\mu x}.$$

De este modo, la intensidad de la onda disminuye según una ley exponencial.

En acústica se puede hablar de amortiguación de la amplitud de la oscilación. Como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, la amortiguación de la amplitud de una oscilación vendrá expresada por la misma ley, pero el coeficiente de amortiguación (o de absorción) será dos veces menor:

$$A=A_0e^{-\frac{1}{2}\mu x}.$$

Indiquemos el sentido que posee el coeficiente de absorción μ (ó $\frac{1}{2}\mu$). Si se mide en centímetros recíprocos (en el exponente debe figurar como magnitud adimensional), nos da una magnitud recíproca del espesor en cuyo transcurso la intensidad o la amplitud de la radiación se debilita e veces.

Está claro que la formulación de la ley de la amortiguación exponencial sólo resuelve parcialmente el problema de la absorción de una onda elástica por el medio. Tiene más importancia hallar la dependencia del coeficiente de absorción respecto de las propiedades del medio y de la frecuencia de la radiación.

Para muchas sustancias se ha hallado que la amortiguación de una onda elástica (los datos fundamentales se refieren a ondas sonoras en el aire) aumenta con la frecuencia de oscilación. Concretamente, el coeficiente de absorción

$$\mu=a\omega^2.$$

Para el aire $a=4\cdot10^{-13}s^2/cm$. Por lo tanto, en el transcurso de 1 km una onda plana de 100 Hz de frecuencia se debilita $\sim1{,}015$ veces, mientras que un sonido muy alto, de 20 000 Hz de frecuencia, se debilitará 10^{274} veces (!). Las oscilaciones ultrasonoras se amortiguan con tal rapidez, que su transmisión a distancias mayores de varios cientos de metros es irreal totalmente.

No obstante la marcha monótona de la absorción con la frecuencia puede alterarse. Algunas sustancias poseen absorción selectiva del sonido en una zona de frecuencias relativamente estrecha. Así, por ejemplo, la absorción del ultrasonido por el anhídrido carbónico presenta un pico cuando las frecuencias se aproximan a 277 kHz. Si se traza una parábola lisa, de acuerdo con la fórmula $\mu=a\,\omega^2$, para el coeficiente de absorción, coincidirá bien con los datos experimentales en todas las zonas, menos en la que hemos indicado. Cuando las frecuencias sean ya de cerca de 277 kHz, la absorción será, aproximadamente, 20 veces mayor que lo es según la ley parabólica.

En lo tocante a la dependencia del coeficiente de absorción respecto de las propiedades del medio, para las ondas longitudinales en los gases y los líquidos existe la siguiente regularidad. El coeficiente de absorción es inversamente proporcional al cubo de la velocidad de la onda elástica y directamente proporcional a la viscosidad cinemática. Esta dependencia tan brusca de la velocidad de propagación y el valor considerable de la viscosidad cinemática del aire conducen a que la absorción de las ondas sonoras y ultrasonoras en un líquido es aproximadamente 1000 veces menor que en el aire; esto significa que, con una misma frecuencia, las ondas elásticas se propagarán en el agua a una distancia mil veces mayor que en el aire.

La absorción de las ondas transversales en los sólidos también depende mucho de las propiedades del cuerpo; así, la absorción en la goma, el corcho y el vidrio es, respectivamente, 13 000, 8500 y 130 veces mayor que en el aluminio.

En las teorías de la absorción de las ondas elásticas por los cuerpos no nos detendremos debido a su complejidad.

§ 37. *Interferencia de ondas*

Si existe no un foco de ondas, sino varios, cada punto del medio toma parte simultáneamente en varios movimientos ondulatorios. Siempre resulta que es posible considerar las oscilaciones de una magnitud física, que se producen gracias a la acción de varias ondas, como una suma de oscilaciones en la que cada una de ellas tendría lugar si actuara una sola onda.

Supongamos que de dos puntos, situados a cierta distancia uno del otro, parten ondas esféricas. Valiéndose de la ecuación de onda se puede hallar el valor de la amplitud de oscilación en cualquier instante para cualquier punto vecino. Si el lugar que nos interesa se halla a la distancia r_1 del primer foco de ondas y r_2 del segundo, la oscilación en este punto vendrá representada por la fórmula

$$y = A\cos 2\pi\left(\nu t - \frac{r_1}{\lambda}\right) + A\cos 2\pi\left(\nu t - \frac{r_2}{\lambda}\right).$$

El resultado de la composición de dos oscilaciones que difieren únicamente en las fases es también, como ya sabemos, una oscilación armónica, de amplitud $2A\cos(\delta/2)$, que depende de la diferencia de fases de las oscilaciones que se componen. La diferencia de fases δ será igual en este caso a

$$2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right).$$

Así, pues, en términos generales, todos los puntos del campo ondulatorio que consideramos oscilarán. Pero las amplitudes de estas oscilaciones serán distintas en diferentes puntos. Llaman la atención dos casos extremos. En primer lugar, existen puntos en los cuales las oscilaciones que se componen se anulan entre sí. Estos puntos satisfarán la condición

$$2\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda} = (2k+1)\pi,$$

donde $k=0, 1, 2, 3, \ldots$; la diferencia de fases es igual a un número impar de π. Por el contrario, si

$$2\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda} = 2k\pi,$$

la diferencia de fases es igual a un número par de π y las amplitudes de oscilación se sumarán aritméticamente, o sea, se reforzarán mutuamente en grado máximo.

La diferencia $r_1 - r_2$ se llama *diferencia de marcha* o *de recorrido* de las ondas; este término no requiere explicaciones. Valiéndose de este concepto, la condición de los máximos y los mínimos de la amplitud se puede formular de un modo algo distinto. La condición de máximo

$$r_1 - r_2 = k\lambda$$

indica que la diferencia de marcha de las ondas que llegan a un punto dado deberá ser igual a un número entero de longitudes de

onda. Y la condición de mínimo

$$r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2}(2k+1)$$

nos dice que la diferencia de marcha deberá ser igual a un número impar de semiondas. Estas condiciones tienen un sentido muy gráfico: las ondas se refuerzan mutuamente cuando se superpone una cresta a otra cresta, y se anulan si se superpone una cresta a un valle.

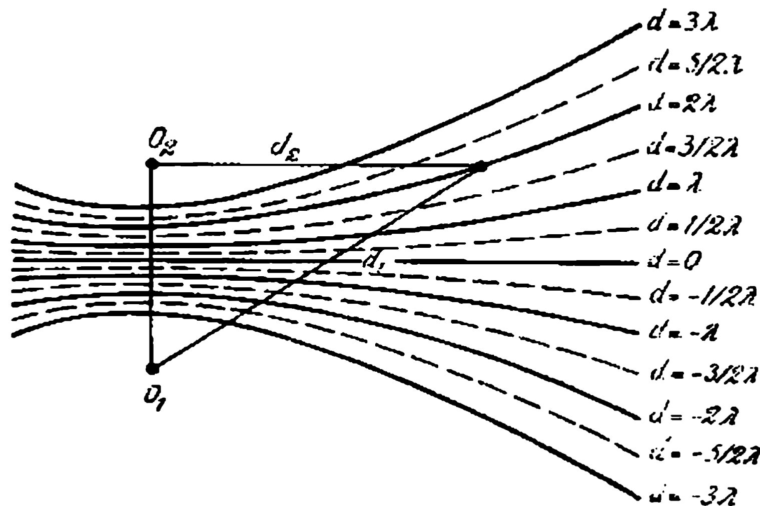


FIG. 59.

La superposición de ondas en la cual se produce la suma de sus amplitudes se llama *interferencia.*

Como sabemos por la geometría analítica, las curvas que satisfacen la condición de mantener constante la diferencia de distancias desde sus puntos hasta dos focos, son hipérbolas. Si se hace pasar una sección plana por los dos focos puntuales y se señalan en un dibujo los lugares de reforzamiento máximo y los de anulación de las ondas, veremos que se encuentran en hipérbolas. Las curvas correspondientes se muestran en la fig. 59. Esta figura se puede observar sin dificultad en el agua si se hacen interferir dos focos que produzcan circunferencias en su superficie desde puntos vecinos.

Por este mismo procedimiento se puede observar la interferencia de cualquier número de focos de ondas.

§ 38. Principio de Huygens-Fresnel. Reflexión y refracción de las ondas

Salta a la vista la completa equivalencia de todos los puntos oscilantes de un campo de ondas. Sólo se diferencian por sus fases. Desde este punto de vista se nos ocurre naturalmente una idea: cualquier punto del campo de ondas puede considerarse correctamente como una fuente independiente de ondas esféricas.

La validez de esta idea, expresada primeramente en 1690 por Christian Huygens, se puede comprobar intentando construir el frente de onda por los datos acerca del campo de ondas en cierta

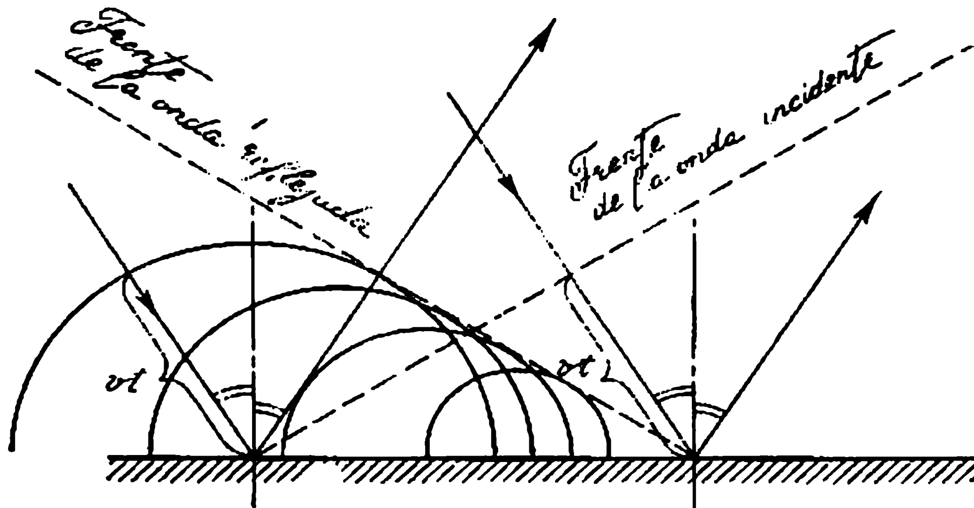


FIG. 60.

superficie límite. Al hacer esto hay que tener en cuenta que ondas esféricas independientes (llamadas elementales) interferirán entre sí. En la demostración de que esto es posible consiste el principio de Huygens completado por Fresnel.

¿Cuál es la importancia de este principio? Supongámonos que una onda incide sobre una pantalla opaca en la que hay varios orificios. Del principio de Huygens — Fresnel se deduce que es posible hallar el campo ondulatorio detrás de la pantalla sin conocer en absoluto las fuentes de los campos. Basta saber la intensidad del campo en el plano de la pantalla y admitir que desde cada punto de ésta se propaga una onda esférica. La amplitud de la onda en cualquier lugar del espacio se halla por la composición (interferencia) de todas las ondas elementales que parten de los orificios de la pantalla. Dejando por ahora el estudio de los problemas relacionados con el paso de las ondas a través de una pantalla (estos problemas ofrecen mayor interés cuando se trata de ondas luminosas),

nos detendremos en aplicar el principio de Huygens — Fresnel a la explicación de fenómenos de reflexión y refracción de las ondas.

Consideremos la zona de una onda plana que incide sobre el límite de separación de dos medios. Como sabemos, una onda, cualquiera que sea su origen, se refleja formando un ángulo igual al

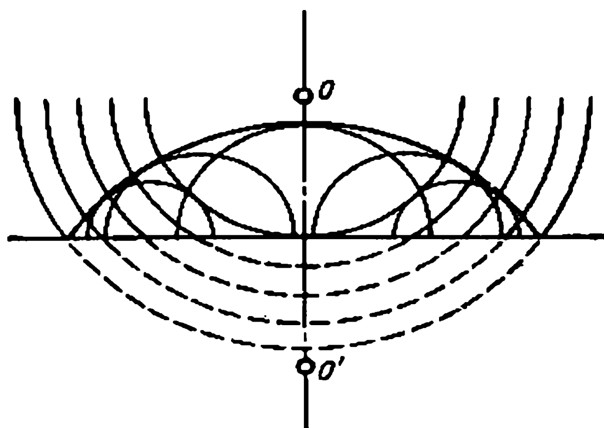


FIG. 61.

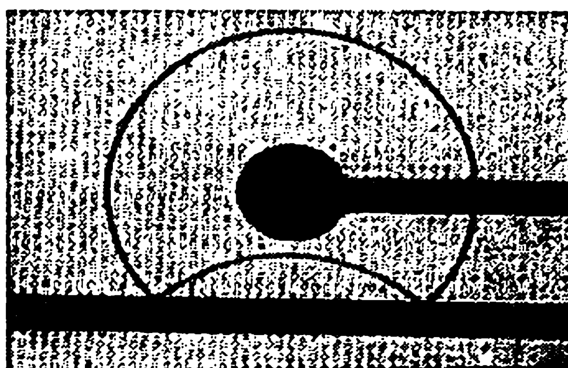


FIG. 62.

ángulo de incidencia. Pero, ¿por qué tiene que ser así? A esta pregunta da respuesta el principio de Huygens. Todos los puntos de un límite entre medios se pueden considerar como focos de ondas elementales. La primera onda elemental parte del punto a que llega antes la onda incidente. Después se irán excitando sucesivamente otros puntos de límite divisorio y, finalmente, el último a entrar en oscilación será el punto al cual llega la onda incidente después que a los demás. La fig. 60 representa las posiciones de las ondas elementales en el instante en que la onda incidente alcanza el último punto. Las ondas elementales generan un frente que forma con el límite divisorio un ángulo igual que el formado por la onda

incidente. En efecto, las velocidades de propagación de la onda incidente y de las ondas reflejadas son iguales, por consiguiente, el radio de la esfera mayor debe ser igual al camino recorrido por la onda incidente durante el tiempo transcurrido desde el instante en que se excitó el primer punto hasta el instante en que se excitó el último.

De un modo idéntico puede construirse sin dificultad el frente reflejado de una onda esférica. Esta construcción se da en la fig. 61. En la fig. 62 se reproduce la fotografía de la reflexión de una onda sonora en una pared.

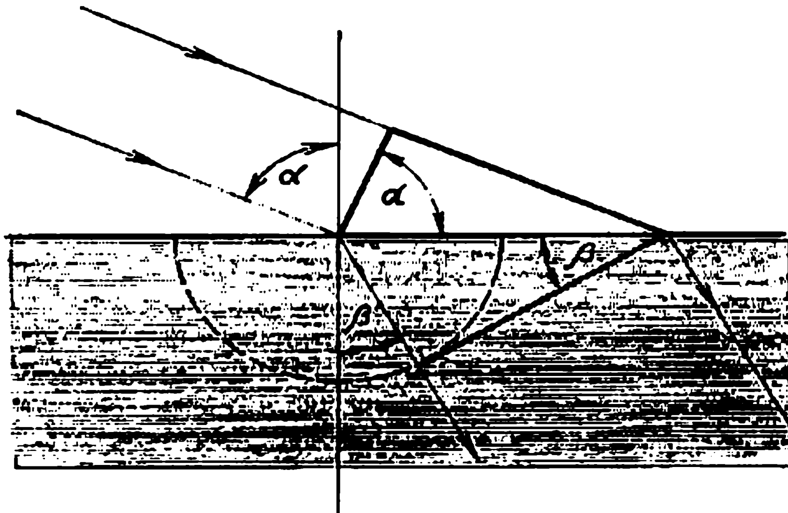


FIG. 63.

Consideremos ahora las ondas elementales que van desde el límite de separación hacia el segundo medio y que forman el frente de la onda refractada (fig. 63). Los medios distintos se diferencian por sus densidades (y por sus propiedades elásticas) y, por lo tanto, por las velocidades de propagación de las ondas en ellos. En el medio más denso la velocidad de la onda es menor. Hagamos una construcción análoga a la del caso de la reflexión, es decir, representemos en un dibujo el frente de las ondas elementales en el instante en que la onda incidente llega al último punto. El frente se desvía debido a la diferencia que existe entre las velocidades de propagación. Si la onda entra en un medio más denso, el radio de la onda elemental mayor debe ser menor que el camino recorrido por la onda incidente desde el instante en que excitó al primer punto del límite divisorio hasta el instante en que excitó al último. En este caso la relación entre estas longitudes debe ser igual precisamente a la razón entre las velocidades de propagación de las ondas en ambos medios. Por otra parte, como puede verse en la fig. 63,

la relación entre las longitudes mencionadas es igual a la que existe entre los senos de los ángulos de incidencia y de refracción. De este modo llegamos a la conocida regla de la refracción de las ondas:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c_1}{c_2}\,.$$

La dirección de propagación se acerca a la normal al límite divisorio, si la onda pasa de un medio menos denso a otro más denso, y al contrario, cuando pasa a un medio menos denso, la onda se aleja de la normal. La relación $c_1/c_2=n$ recibe el nombre de *coeficiente de refracción.*

§ 39. *Coeficiente de reflexión*

La explicación de la geometría de la reflexión y la refracción puede parecer un apéndice poco importante de la teoría. No obstante, la teoría ondulatoria permite hacer mucho más, a saber: resolver el problema de las fracciones correspondientes a las ondas reflejadas y refractadas en dependencia de las propiedades de los medios separados por el límite que examinamos. Nos limitaremos al caso más sencillo de la incidencia normal de una onda longitudinal sobre el límite de separación de dos medios. Con esto simplificaremos los cálculos. Pero el carácter de las demostraciones es el mismo para todos los casos imaginables.

El postulado que sigue es el punto de partida para los razonamientos de este tipo. En el límite entre los dos medios ni la velocidad de oscilación de las partículas u, ni la sobrepresión p pueden cambiar de repente. Por intuición está claro que no puede ser de otra forma. Haciendo un análisis riguroso se puede demostrar que este postulado se deduce de las leyes fundamentales de la física.

Por una parte del límite tenemos ondas cuyos valores instantáneos de velocidad son u_{inc} y u_{refl}, y por otro lado de dicho límite, una onda cuyo valor instantáneo de velocidad es u_{refr}. La continuidad de las velocidades da la condición: $u_{inc}+u_{refl}=$ $=u_{refr}$; y la continuidad de las presiones: $u_{inc}\rho_1c_1+u_{refl}\rho_1c_1=$ $=u_{refr}\rho_2c_2$. Pero si prestamos atención a las dos ecuaciones escritas vemos que son *incompatibles*, puesto que $\rho_1c_1\neq\rho_2c_2$. ¿Qué ocurre? Que nos hemos olvidado de que los valores instantáneos de las velocidades y las presiones son magnitudes vectoriales e incluso en el caso más simple, cuando los vectores elongación se encuentran en un mismo plano, las amplitudes pueden diferir por su signo. Volviendo a examinar las ecuaciones antes escritas, vemos que se hacen compatibles únicamente cuando se admite que los signos de la amplitud de las ondas reflejadas de velocidad de oscilación y

de presión son contrarios y se escriben las ecuaciones de continuidad de la forma

$$u_{inc}+u_{refl}=u_{refr}, \quad (u_{inc}-u_{refl})\rho_1 c_1=u_{refr}\rho_2 c_2,$$

o bien

$$u_{inc}-u_{refl}=u_{refr}, \quad (u_{inc}+u_{refl})\rho_1 c_1=u_{refr}\rho_2 c_2.$$

Damos al lector la posibilidad de comprobar que todas las demás combinaciones de signos no hacen compatibles las ecuaciones.

Como quiera que las amplitudes son magnitudes positivas, su suma deberá ser mayor que la diferencia. Por esto el primer par de ecuaciones será correcto si $\rho_1 c_1 > \rho_2 c_2$, y el segundo par, en el caso contrario. El primer par de ecuaciones se plantea cuando todos los vectores amplitud de velocidad de oscilación están orientados hacia un mismo lado y la fase de la onda reflejada de presión difiere en 180°, es decir, la onda reflejada tiene el vector amplitud orientado en sentido contrario con respecto al de las ondas incidente y refractada. El segundo par corresponde al caso contrario.

$\rho_1 c_1 > \rho_2 c_2$		$\rho_1 c_1 < \rho_2 c_2$	
Onda de velocidades	Onda de presiones	Onda de velocidades	Onda de presiones
Incidente → Reflejada → Refractada →	Incidente → Reflejada ← Refractada →	Incidente → Reflejada ← Refractada →	Incidente → Reflejada → Refractada →

El interesante fenómeno del giro del vector amplitud en la reflexión se conoce con el nombre de pérdida de media onda o de salto de fase en 180°. En efecto, el cambio de signo en la ecuación de onda $y=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)$, donde y es una magnitud física cualquiera, se puede obtener introduciendo en el argumento del coseno un desplazamiento de fase de 180°. Por otra parte, un desplazamiento de 180° equivale a un traslado de la distribución ondulatoria en una semionda.

Así, pues, en el límite entre los dos medios las ondas incidente y reflejada o se refuerzan entre sí al máximo o se debilitan al máximo.

Debemos recordar que para las ondas de velocidades de oscilación la pérdida de la semionda en la reflexión se produce cuando inciden en un medio con mayor resistencia (a veces se dice ine-

xactamente: en un medio de mayor densidad). La onda de elongación está ligada inseparablemente con la onda de velocidades de oscilación y sufre junto con ella la pérdida de semionda.

La onda que pasa al segundo medio no experimenta salto de fase.

De las ecuaciones escritas, resolviéndolas conjuntamente, hallamos el valor del coeficiente de reflexión r, es decir, u_{refl}/u_{inc}:

$$r=\frac{\rho_1 c_1-\rho_2 c_2}{\rho_2 c_2+\rho_1 c_1}$$

(r es siempre$>$0); también hallamos el coeficiente de refracción g, o sea, u_{refr}/u_{inc}:

$$g=\frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1+\rho_2 c_2}.$$

Para el aire y los cuerpos sólidos las resistencias ondulatorias difieren mucho. Para el primero, como ya dijimos, $\rho c=41$, mientras que para el acero ($\rho=7{,}9$ g/cm^3 y $c=5000$ m/s) $\rho c=40\cdot 10^5$, de donde $r=0{,}99999$. Esto significa que un sonido procedente del aire que incida sobre acero, se reflejará en la práctica totalmente y casi no penetrará en el segundo medio. Es fácil calcular que para el límite aire — agua $r=0{,}9997$.

§ 40. *Efecto Doppler*

Hasta ahora hemos supuesto tácitamente que tanto el foco de ondas como el receptor de ellas (o sea, el observador) estaban en reposo con respecto al medio en el cual se propagaba la onda. Unos efectos peculiares, advertidos primeramente por Doppler (1842), se observan cuando el foco o el observador o, tanto más, ambos a la vez, se mueven con respecto al medio. Estos efectos consisten ante todo en que, cuando se mueve el foco de ondas, el observador mide la frecuencia de las oscilaciones ν', y cuando se mueve el observador, éste mide la frecuencia de las oscilaciones ν''. Estas frecuencias se diferencian entre sí y también de la frecuencia ν que se mide cuando tanto el observador como el foco están en reposo.

Al estudiar el efecto Doppler hay que prestar atención ante todo al hecho de que la onda que parte de la fuente se propaga con independencia absoluta del movimiento del foco y del observador. Por esto, al moverse con respecto al medio, el foco o el observador pueden acercarse o alejarse de la onda que avanza.

¿Por qué pueden estos movimientos ocasionar medidas de la frecuencia distintas de su valor «verdadero»? Porque el observador determina la frecuencia de las oscilaciones como el número de ondas

que llegan a su instrumento de medida en la unidad de tiempo, mientras que por la fórmula $\nu=c/\lambda$ este número es el de longitudes de onda que caben en el camino recorrido en la unidad de tiempo. Si el observador se mueve hacia el foco con la velocidad u, durante 1 s registrará no la llegada de ν ondas, sino de un número mayor de ellas, número que será tantas veces mayor como la velocidad relativa de la onda y del observador, $c+u$, sea mayor que u. De este modo,

$$\frac{\nu'}{\nu}=\frac{c+u}{c}, \qquad \nu'=\nu\left(1+\frac{u}{c}\right).$$

Si el foco se mueve hacia el receptor, el observador percibirá un número de ondas mayor que en el caso en que el foco y el receptor están en reposo. Pero aquí la causa es otra.

A primera vista esto no es evidente. Pero es el caso, que el movimiento del foco, permaneciendo invariable la frecuencia de las oscilaciones, ocasiona una variación de la distancia entre los puntos cofásicos de la onda. Si el primer caso se puede interpretar, aproximadamente, como el movimiento de un observador al encuentro de una columna de deportistas que corren a la misma velocidad con intervalos constantes λ entre sí, está claro que en el segundo caso el esquema de razonamiento debe ser otro. Ahora se puede decir que la línea de salida (start) se desplaza lentamente (los corredores saltan, a intervalos iguales de tiempo, de un automóvil que se desplaza a lo largo de la ruta), lo que hace que varíe la distancia entre ellos. En vez de λ' será λ''. Si la línea de salida (foco) se desplaza en dirección al observador y durante 1 s se dejan salir ν deportistas, éstos, durante 1 s, se distribuirán en un trazo de camino $c-u$. De este modo, el intervalo entre los deportistas (longitud de onda) $\lambda''=(c-u)/\nu$. La frecuencia con que los deportistas, cuya velocidad es c, cruzan la línea de la meta (frecuencia de las oscilaciones percibidas por el observador) será

$$\nu''=\frac{c}{\lambda''}, \qquad \nu''=\nu\frac{1}{1-u/c}.$$

Las dos fórmulas obtenidas sirven también si el foco o el observador se alejan el uno del otro; en estos casos hay que cambiar el signo de la velocidad u.

Hemos demostrado, pues, que cuando el foco y el observador se acercan, aumenta la frecuencia de las oscilaciones, emitidas por el foco, que se mide. Cuando se alejan, la frecuencia disminuye.

Un buen ejemplo del efecto Doppler referido a las ondas sonoras lo ofrece la percepción del pitido de una locomotora que se acerca y que se aleja. Cuando se acerca la locomotora oímos un sonido de frecuencia más alta que la verdadera. La altura del tono

cambia de repente cuando la locomotora pasa junto al observador. La locomotora se aleja. Ahora oímos un sonido cuya frecuencia es más baja que la verdadera. Si la locomotora lleva una velocidad de 70 km/h, la magnitud del salto de frecuencia constituye, aproximadamente, un 12% de la frecuencia verdadera.

7

ONDAS ESTACIONARIAS

§ 41. Superposición de dos ondas que se propagan en sentidos opuestos

Supongamos que dos ondas planas de características completamente iguales van al encuentro una de la otra. Nos interesa conocer el movimiento oscilatorio que se produce en el medio en que se propagan estas ondas.

Como se indicó con anterioridad, la diferencia en las direcciones de propagación se tiene en cuenta poniendo los signos distintos a las coordenadas en la ecuación de onda. Por consiguiente, la figura resultante del desplazamiento debe venir dada por la expresión

$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + A\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) =$$
$$= 2A\cos\frac{\omega x}{c}\cos\omega t = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t.$$

El resultado del cálculo es muy interesante. La suma de las dos ondas viajeras no da un movimiento ondulatorio. La fórmula obtenida pone de manifiesto la existencia de oscilaciones de amplitud $2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$ distinta en diferentes lugares del espacio. Este estado oscilatorio singular del medio, producido por dos ondas viajeras iguales que se mueven en sentidos opuestos, recibe el nombre de *onda estacionaria*. Subrayamos una vez más que la onda estacionaria no es una onda. Una onda viajera transporta energía: en la onda estacionaria no existe transmisión alguna de energía de un punto a otro. Una onda viajera puede moverse hacia la derecha o hacia la izquierda; la onda estacionaria carece de sentido de propagación. Esta denominación sirve, pues, para caracterizar un estado oscilatorio del medio.

¿En qué consiste la peculiaridad de este estado oscilatorio? En primer lugar vemos que no todos los puntos del medio oscilan.

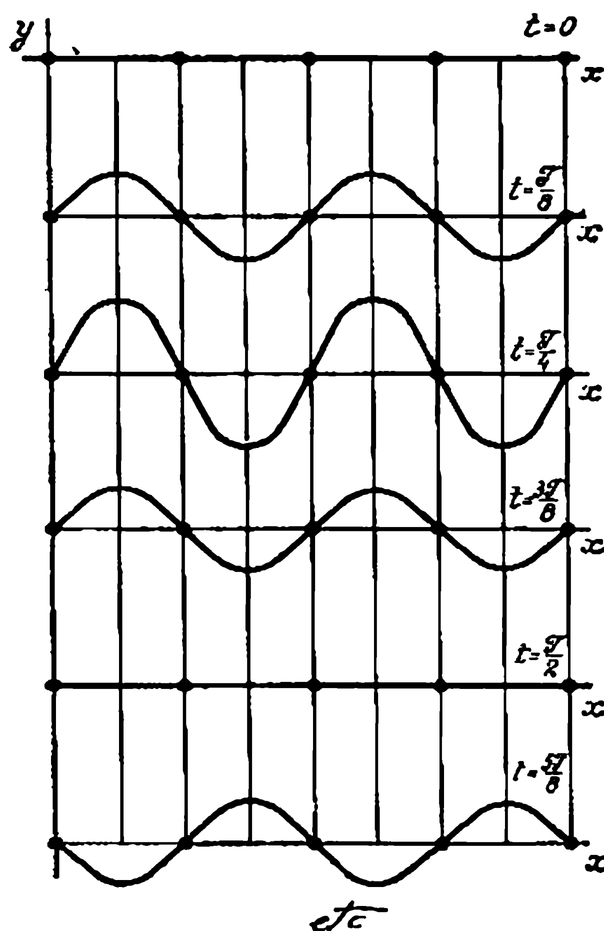


FIG. 64.

En los lugares del espacio que satisfacen la condición $x=\frac{\lambda}{4}$, $\frac{3\lambda}{4}$, $\frac{5\lambda}{4}$, ..., la amplitud de la oscilación es nula. Estos puntos se llaman *nodos* de la onda estacionaria. La distancia entre dos nodos vecinos, a lo largo del eje x que siguen las ondas viajeras, es igual a la mitad de la longitud de onda. Entre cada dos nodos se encuentran puntos que oscilan con la máxima amplitud, igual a $2A$. Estos puntos se llaman *vientres* de la onda estacionaria.

La fig. 64 representa el estado oscilatorio correspondiente a una onda estacionaria en varios instantes consecutivos. Vemos que la denominación está plenamente justificada. En cada instante se ve una onda. Esta onda permenece en su sitio. Si se hacen fotografías instantáneas, una a continuación de otra, veremos que los puntos de intersección de la onda con el eje de abcisas —nodos— permanecen en un mismo sitio. La onda no se mueve. Las variaciones que se noten en las fotografías instantáneas consistirán en cam-

bios de magnitud de la elongación. Llega un instante en que todos los puntos del medio están quietos. Una vez pasado este instante, los puntos que se desviaron hacia arriba irán hacia abajo, y viceversa. Está claro que la figura dibujada no tiene nada de común con una onda viajera, de la que dos «fotografías instantáneas» consecutivas darán la impresión que reprodujimos antes en la fig. 57. Allí la onda se mueve, y los máximos y mínimos de la onda pasan a ocupar un sitio nuevo en cada instante.

Hemos dicho que en la onda estacionaria no existe transmisión de energía. ¿Cómo describir, entonces, en términos de energía, los procesos que ocurren en este singular movimiento oscilatorio? Es evidente que la energía de una onda estacionaria (es decir, de cualquier región en la cual existe dicha onda) es una magnitud constante.

En el instante en que todos los puntos pasan por la posición de equilibrio, toda la energía de los puntos que toman parte en la oscilación es cinética. Por el contrario, en la posición de elongación máxima, la energía de todos los puntos es potencial.

La onda estacionaria es un proceso ondulatorio de gran importancia: diversas formas de ondas estacionariás se producen en los cuerpos de dimensiones limitadas por los cuales se propagan ondas elásticas. En el caso, que las ondas elásticas se reflejan en el límite del cuerpo con el medio y retornan al cuerpo. En el cuerpo limitado se origina entonces un estado oscilatorio complejo, debido a que a la onda inicial se superponen todas las demás ondas, que se reflejaron en las paredes y retornaron al medio constituido por el cuerpo. Ahora examinaremos una serie de casos típicos.

§ 42. Oscilaciones propias de las varillas

Por medio de un golpe o por otro procedimiento, en toda varilla sólida se puede excitar una onda elástica longitudinal que se propague a lo largo de su longitud. Esta onda se refleja en el extremo opuesto de la varilla y, de este modo, toda la varilla entra en un estado oscilatorio que se representa por una onda estacionaria. Este estado oscilatorio será libre, puesto que se debe a un impulso de breve duración y después continúa sin actuación de fuerzas externas. Una serie de datos sobre el carácter de estas oscilaciones libres se puede obtener suponiendo conocida la longitud de la varilla e indicando cómo está sujeta. La longitud de la varilla y el modo de sujeción nos dan las llamadas condiciones de frontera. Estas condiciones se reducen a lo siguiente: en el sitio sujeto de la varilla existe un nodo de onda estacionaria y en el extremo libre de aquélla se origina un vientre.

Consideremos varios procedimientos de excitación de oscilaciones libres longitudinales en una varilla de longitud L.

VARILLA SUJETA POR SUS DOS EXTREMOS. En este caso en los extremos de la varilla deben formarse nodos de onda de desplazamientos. Como la distancia entre los nodos es igual a la mitad de la longitud de onda, las posibles longitudes de onda estarán ligadas con la longitud de la varilla por la condidición $L=n\frac{\lambda}{2}$, es decir, $\lambda_n=\frac{2L}{n}$, donde n es cualquier número entero.

Utilizando para la velocidad de la onda elástica la expresión $c=\sqrt{E/\rho}$ y recordando la relación que existe entre la frecuencia y la longitud de onda, obtenemos la expresión de las frecuencias propias de las oscilaciones longitudinales libres de la varilla

$$\nu_n=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Ante todo es necesario subrayar un resultado esencialmente nuevo para nosotros. Un cuerpo continuo tiene, no una, sino muchas frecuencias propias (características) de oscilación. De acuerdo con esto, las posibles oscilaciones libres de la varilla son diversas. La varilla puede también realizar oscilaciones inarmónicas de cualquier espectro*) constituidas por las frecuencias ν_n.

La frecuencia ν_1 es la fundamental de la varilla. A ella corresponde el movimiento oscilatorio determinado por la condición $L=\lambda/2$. Esto quiere decir que, con la oscilación fundamental, el centro de la varilla se encuentra en el vientre de una onda estacionaria y entre los extremos de aquélla no hay nodos. A la onda en segundo sobretono (segunda armónica) le corresponde la condición $L=\lambda$. En este caso en el centro de la varilla hay un nodo. Si está excitada la tercera armónica, entre los extremos de la varilla habrá dos nodos y así sucesivamente.

Ejemplo. Para una varilla de hierro ($\rho=7700$ kg/m³, $E=20{,}6\cdot10^{10}$ N/m²) de 7 m de longitud, la frecuencia $\nu_1=365$ Hz.

VARILLA CON AMBOS EXTREMOS LIBRES. Si la varilla se cuelga de unos hilos y después se excitan en ella oscilaciones, la onda estacionaria que se produce debe satisfacer la condición siguiente: en ambos extremos de la varilla existirán vientres. Lo mismo que en el caso anterior, entre la longitud de la varilla y las

*) La palabra «espectro» se usa con bastante frecuencia en física cuando se trata de un *conjunto* de partículas que tienen distintas velocidades, masas, etc., de un conjunto de ondas de distintas longitudes (frecuencias), etc.

longitudes de las ondas aparecerá la relación $L=n\frac{\lambda}{2}$. Por consiguiente, la fórmula de las frecuencias propias será la misma.

La diferencia con el caso anterior consiste en la distribución de los nodos y vientres. En la oscilación fundamental el centro de la varilla estará en reposo (nodo). Si se excita la segunda armónica, en el centro de la varilla habrá un vientre, a un cuarto de onda de él habrá nudos y en los extremos, vientres.

VARILLA SUJETA POR UN EXTREMO. En este caso en uno de los extremos habrá un nodo (en el sujeto) y en el otro, un vientre. Cuando la varilla oscile con la frecuencia fundamental, tendrá la forma correspondiente a un cuarto de período de sinusoide. Como la distancia entre el nodo y el vientre es igual a $\lambda/4$, la relación entre las longitudes de las ondas y la longitud de la varilla vendrá dada por la condición

$$L=n\frac{\lambda}{4}, \text{ donde } n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots$$

Las frecuencias propias de las oscilaciones de esta varilla se expresan por la fórmula

$$\nu_n=\frac{n}{4L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots).$$

Si en los dos primeros casos las frecuencias se relacionaban entre sí como números enteros, ahora la relación entre ellas se da por la de los números impares.

Una varilla sujeta por su centro tendrá en este sitio un nodo y en los extremos, unos vientres. Este problema no difiere en nada del que acabamos de considerar.

Las condiciones de frontera que utilizamos al estudiar el estado oscilatorio de las varillas son el caso límite de condiciones de frontera de reflexión de las ondas que se expusieron en la pág. 133. Como se explicó antes, al reflejarse en el límite que separa el medio (en que se propaga la onda) de otro medio con mayor resistencia, se produce la reflexión de la onda de elongación con pérdida de media onda. Si la varilla está sujeta, la onda no penetra en absoluto en el segundo medio. En este caso se puede decir que la resistencia del segundo medio es infinita. El coeficiente de reflexión se hace igual a la unidad y la reflexión se produce con pérdida de una semionda. No es difícil comprender que esto corresponde a la existencia de un nodo en la frontera entre los dos medios. La reflexión de la onda en el extremo no sujeto de una varilla corresponde al caso de la reflexión de un medio de resistencia nula. La igualdad a 1 del coeficiente de reflexión y la ausencia de pérdida de semionda conduce a la necesidad de que exista un vientre en dicha frontera.

También se pueden excitar ondas propias longitudinales en columnas de líquido o de gas.

Oscilaciones propias transversales se pued n e citar fácilmente en una cuerda sujeta y tensada. La distribución de los nodos y vientres está claro que será la misma, en este caso, que para una varilla sujeta por los dos extremos. El conjunto de frecuencias viene expresado por una fórmula análoga a la dada para la varilla, con la única diferencia de que en la expresión de la velocidad de la onda transversal en la cuerda hay que sustituir E por la tensión de la cuerda, es decir, por el cociente de dividir la fuerza que tensa la cuerda por la sección transversal de ésta.

§ 43. Oscilaciones propias de los sistemas bidimensionales y tridimensionales

En las varillas, cuerdas, columnas de aire, etc., las superficies de igual fase son planos paralelos. El estado oscilatorio nos lo podemos figurar como resultado de la superposición de ondas planas que se propagan a lo largo de una línea. Pero son posibles casos más complicados, como aquellos en que el movimiento oscilatorio abarca un campo bidimensional (una lámina o membrana) o un cuerpo cuyas tres dimensiones tienen igual orden de magnitud.

Con los problemas de dos dimensiones nos encontramos al considerar las oscilaciones de diafragmas elásticos y rígidos. Oscilaciones de diversos tipos se producen si, en un caso, se sujeta una lámina por los bordes y, en otro, si se sujeta en un punto o incluso no se sujeta por ninguna parte. Además de las oscilaciones de láminas rígidas se observan oscilaciones de películas no rígidas tensadas, de goma, de jabón, etc.

Las leyes generales de las oscilaciones libres, en este caso, no se diferencian en esencia de las que hemos estudiado. En virtud del carácter bidimensional del problema, los nudos y los vientres deben caracterizarse ahora por líneas curvas. Por ejemplo, una lámina circular sujeta por los bordes efectuará la oscilación fundamental teniendo un vientre único en el centro del círculo. El punto central oscilará con la amplitud máxima, decreciendo luego esta amplitud hacia los bordes sujetos (es decir, hacia el círculo nodal) conservando la simetría circular. Este es el aspecto de la oscilación más simple de la frecuencia fundamental (más baja). La membrana se puede excitar también en armónicos más altos, en este caso su superficie se divide en sectores por las líneas nodales. Resulta que, en las láminas circulares, las líneas nodales pueden tener forma de círculos o de diámetros.

Un experimento sencillo y llamativo es la demostración de las líneas nodales por el procedimiento de Chladni (llamado así en honor al científico alemán que lo propuso). En una lámina se echa arena y después, dándole un golpecito o frotando el borde con un arco de violín, se la hace entrar en un estado de oscilación. La arena se desliza de los vientres y se concentra en las líneas nodales. En la fig. 65 se dan varios ejemplos de figuras de Chladni.

Como es natural, el estado de oscilación más complejo es el de un cuerpo continuo tridimensional. No vamos a estudiar este fenómeno en cuerpos de forma compleja, sino que nos limitaremos a considerar las oscilaciones propias de un paralelepípedo rectangu-

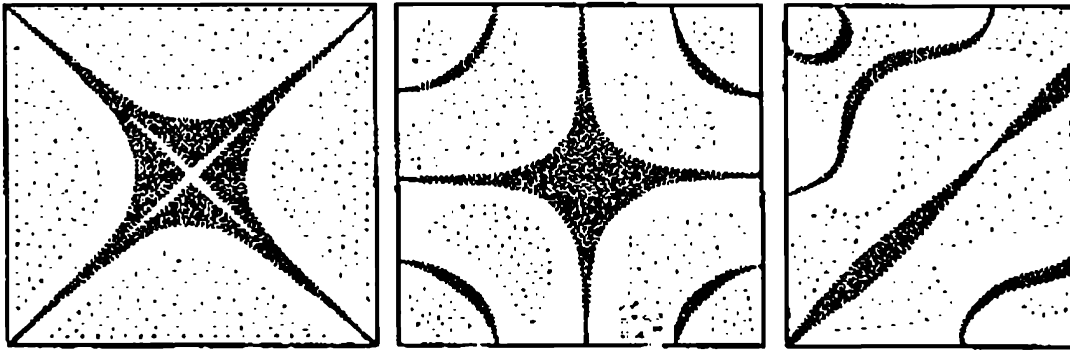


FIG. 65.

lar. Si en este cuerpo existieran únicamente ondas estacionarias debidas a la composición de las ondas que marchan paralelamente a las aristas del paralelepípedo, las frecuencias propias de las oscilaciones se limitarían a los valores

$$\frac{n_1 c}{2l_1}, \quad \frac{n_2 c}{2l_2}, \quad \frac{n_3 c}{2l_3},$$

y los números de onda (así se llaman las magnitudes recíprocas de la longitud de onda) serán

$$k_1 = \frac{n_1}{2l_1}, \quad k_2 = \frac{n_2}{2l_2}, \quad k_3 = \frac{n_3}{2l_3},$$

donde n_1, n_2, n_3 son unos números cualesquiera y l_1, l_2, l_3 son las longitudes de las aristas del paralelepípedo.

Pero en el cuerpo pueden propagarse ondas en una dirección que forme un ángulo arbitrario con las caras. En este caso se producirán ondas estacionarias si, después de una serie de reflexiones, el rayo vuelve al punto de donde partió. El número de onda de este rayo debe calcularse, partiendo de k_1, k_2, k_3, según la regla de

composición de vectores. Por lo tanto

$$k=\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}\text{, es decir, } \nu=\frac{c}{2}\sqrt{\frac{n_1^2}{l_1^2}+\frac{n_2^2}{l_2^2}+\frac{n_3^2}{l_3^2}}\,.$$

Es claro que, en los casos más simples de propagación de las ondas paralelamente a las aristas del cuerpo, la frecuencia de las oscilaciones se puede obtener también por esta fórmula suponiendo distinto de cero uno solo de los tres números enteros que figuran en ella.

El espectro de las oscilaciones de un cuerpo tridimensional se representa en un espacio tridimensional (fig. 66), que puede llamarse espacio de frecuencias o espacio recíproco. Si las magnitudes

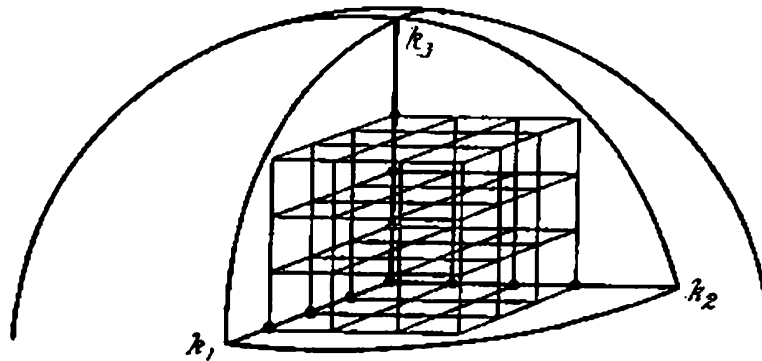


FIG. 66.

$\frac{c}{2l_1}$, $\frac{c}{2l_2}$, $\frac{c}{2l_3}$ se toman respectivamente sobre tres ejes, se obtiene una red (red recíproca), cada uno de cuyos nodos representará una de las frecuencias propias de oscilación del cuerpo con los números n_1, n_2, n_3. El radio vector del espacio recíproco trazado a un nodo de la red será igual a una posible frecuencia de oscilación. Si se traza una esfera de radio ν, en ella estarán comprendidos todos los puntos que representan las frecuencias menores que ν. El volumen de esta esfera será igual a $4/3\ \pi\nu^3$, y el volumen de cada celda de la red recíproca será igual a $(c/2)^3/v$, donde v es el volumen del cuerpo. Por consiguiente, el número de oscilaciones propias del cuerpo con frecuencias menores que ν (el número de nodos en un octante de la esfera) viene expresado por la fórmula

$$\frac{4}{3}\pi v\cdot\frac{\nu^3}{c^3}\,.$$

Esta interesante ley demuestra que el número de frecuencias propias aumenta bruscamente si se empieza a aumentar el intervalo de frecuencias a considerar. Cuando las frecuencias son grandes, el carácter discreto del espectro comienza a difuminarse, las frecuencias se hacen muy próximas entre sí.

§ 44. *Oscilaciones forzadas de varillas y láminas*

Si las oscilaciones de una varilla, lámina u otro cuerpo tienen lugar no en el vacío, sino en un medio cualquiera *), líquido o gaseoso, cierta parte de la intensidad, dependiente, como ya sabemos, de la relación entre las resistencias ondulatorias de los medios en contacto, pasa del cuerpo oscilante al medio. Esta idea se puede expresar de una forma más concreta: el cuerpo oscilante irradia energía. Debido a la radiación, las oscilaciones libres de una varilla, de una cuerda, etc., se amortiguan rápidamente. Si hace falta que un cuerpo de este tipo sea fuente constante de radiación, las oscilaciones hay que excitarlas con un foco exterior. Lo mismo que en el caso de las oscilaciones de un punto, el suministro de energía puede efectuarse tanto por el esquema de autooscilaciones como por la creación de oscilaciones forzadas.

En dependencia del procedimiento y del sitio a que se hace llegar la energía exterior, se puede excitar, en general, cualquiera de las frecuencias o cualquier combinación de frecuencias propias con que es capaz de oscilar el cuerpo. Por ejemplo, se pueden crear oscilaciones forzadas, en una cuerda tensada, del modo siguiente. Junto a una cuerda de acero se sujeta un electroimán alimentado por la corriente sinusoidal procedente de un generador de ondas acústicas. Las oscilaciones de la cuerda debidas a la acción de la fuerza exterior variable periódicamente se notarán únicamente en el caso de la resonancia. Cambiando la tensión de la cuerda y variando la frecuencia externa se puede demostrar la oscilación de aquélla con la frecuencia fundamental, así como con sobretonos más altos.

Tiene una importancia práctica enorme la creación de oscilaciones forzadas (ondas estacionarias) en láminas piezoeléctricas y varillas ferromagnéticas. Estos cuerpos oscilantes son focos de ondas ultrasonoras.

Los cuerpos ferromagnéticos tienen la propiedad de alargarse y acortarse por la acción de un campo magnético. La teoría de este fenómeno es complicada y nosotros, tanto ahora como más adelante, diremos poco de ella. Por ahora nos bastará saber cómo varía la longitud de una varilla ferromagnética en función de la intensidad del campo. A esta pregunta da respuesta la fig. 67, de la cual se deduce que el níquel y el cobalto recocido se acortan en campos de cualquier intensidad, el cobalto fundido se acorta en los campos débiles y se alarga en los intensos y, finalmente, el hierro se alarga en los campos débiles y se acorta en los intensos. De cualquier

*) Hay que conformarse con el hecho de que acerca de las oscilaciones de un cuerpo se puede hablar en dos sentidos: en el de oscilaciones del cuerpo como un todo, y en el de las oscilaciones de unas partes del cuerpo con respecto a otras.

modo, cualquier varilla ferromagnética será capaz de efectuar oscilaciones forzadas al introducirse en un campo magnético alternativo. Con este fin, la varilla se coloca, de ordinario, en el orificio del núcleo de un transformador por el que pasa corriente alterna. Para que la onda estacionaria sea suficientemente intensa en la varilla, hay que trabajar en condiciones de resonancia: la frecuencia de la corriente alterna debe coincidir con la frecuencia propia de oscilación de la varilla.

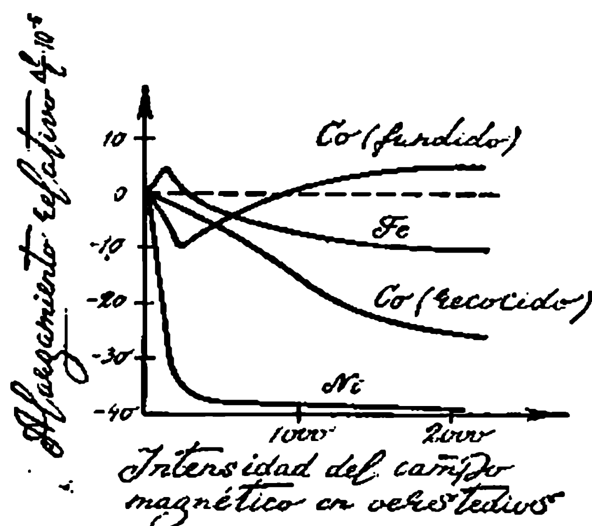


FIG. 67.

Como la varilla se sujeta por su centro, la frecuencia propia de las oscilaciones

$$\nu = \frac{n}{2l} c,$$

pudiendo oscilar la varilla únicamente en los armónicos impares. La frecuencia fundamental para el níquel, si se sustituyen los valores de las constantes físicas, resulta ser

$$\nu = \frac{237}{l} \text{ kHz} \quad (l \text{ en centímetros}).$$

Por ejemplo, una varilla de 40 cm de longitud oscilará con la frecuencia fundamental de 6 kHz.

La fuente más difundida de oscilaciones ultrasonoras es el piezocuarzo.

§ 45. *Oscilaciones de los piezoeléctricos*

Como se dirá más adelante (§ 262), todos los cristales que, entre sus elementos de simetría, no cuentan con un centro, pueden poseer efecto piezoeléctrico. Este fenómeno consiste en la variación de las dimensiones del cristal por la acción de un campo eléctrico y, viceversa, en la aparición de un campo eléctrico en el cristal si éste se somete a la acción de unas fuerzas. Cuando utilizamos un piezoeléctrico como foco de oscilaciones, es natural que nos interese el primer fenómeno, llamado también *electrostricción* o *efecto piezoeléctrico inverso*. Como piezoeléctricos se usan el cuarzo, la sal de la Rochela o de Seignette, el titanato de bario, el dihidrofosfato de amonio y otros cristales. En general, existen centenares de sustancias conocidas que podrían ser utilizadas para este mismo fin. Pero las condiciones adicionales que se imponen (resistencia mecánica y a la humedad y otras) y, como es natural, el deseo de elegir los cristales que producen un efecto más intenso, limitan la lista práctica de estas sustancias.

Un cristal situado en un campo eléctrico experimenta cambios de dimensiones distintos en diferentes direcciones (con respecto a sus ejes de simetría). Por esto, cortando del cristal varillas o láminas orientadas de formas diversas con respecto a los ejes de simetría y colocándolas entre las armaduras de un condensador, obtendremos deformaciones de tipos diversos. Lo más frecuente es que la lámina de cuarzo o de otro piezoeléctrico se corte de tal modo que al someterla a la acción del campo eléctrico se produzcan en ella desplazamientos longitudinales. En este caso, por la acción de un campo eléctrico alternativo en esta lámina se producirán ondas estacionarias longitudinales forzadas (mantenidas).

Si l es el espesor de la lámina en la dirección del movimiento de la onda, las frecuencias propias de oscilación se representan, como de ordinario, por la fórmula $\nu = nc/2l$. Para el cuarzo, con esta orientación tan simple, la velocidad de las ondas elásticas es igual a 5400 m/s. Por lo tanto, la frecuencia propia fundamental de oscilación de esta lámina de cuarzo se hallará por la fórmula

$$\nu = \frac{2700}{l}\,\text{kHz} \quad (l \text{ en centímetros})$$

(la experiencia de un valor algo distinto: $2880/l$ kHz).

Las amplitudes de las oscilaciones dependen de la magnitud del campo que se aplica. Entre la magnitud de la elongación y la intensidad del campo eléctrico existe una dependencia lineal. Generalmente se utilizan campos bastante intensos. El cuarzo es un magnífico aislador, por esto, cuando los espesores llegan hasta

un centímetro, se utilizan campos eléctricos del orden de 30 000 V/cm.

Lo principal para obtener una señal ultrasonora fuerte es el efecto de resonancia. La elongación debida a la acción de un campo estático es millares de veces menor que las de resonancia, y hay que tener presente que la energía de oscilación es proporcional al cuadrado de la elongación.

Elevando la frecuencia del generador se puede excitar la lámina en todos sus sobretonos. Las frecuencias de los generadores ultrasonoros industriales más difundidos se hallan entre los límites de centenares y millares de kilohertzios.

8

PROBLEMAS DE ACÚSTICA

§ 46. Características objetiva y subjetiva del sonido

Los órganos auditivos del hombre son capaces de valuar la intensidad de un sonido, su altura o tono y su timbre. Investigando diversos sonidos con ayuda de un oscilógrafo eléctrico se pueden comparar detalladamente las valoraciones, objetiva y subjetiva, de un sonido.

Como el sonido es el resultado de un proceso oscilatorio que tiene lugar en el aire, se puede describir de un modo completo por medio de la gráfica de variación de la amplitud (de elongación, de velocidad de oscilación o de presión, esto es bastante indiferente) con el tiempo. Esta gráfica da la posibilidad de saber si el proceso es periódico y, si lo es, de determinar el tono fundamental de la oscilación. Estudiando la forma de la curva de la oscilación periódica se puede establecer también qué sobretonos hay en ella y cuáles son sus amplitudes. En otros términos y expresándonos con más amplitud, la gráfica de la dependencia de la oscilación respecto del tiempo permite siempre hallar el espectro de dicha oscilación, es decir, conocer qué frecuencias que hay en ella y con qué amplitudes están representadas en el espectro. Esta gráfica se obtiene valiéndose de un micrófono conectado a un oscilógrafo. En las instalaciones más modernas la gráfica de la oscilación se transforma automáticamente en su espectro.

La fig. 68 reproduce el esquema simplificado de un analizador de este tipo. La señal acústica de entrada, transformada por el micrófono en eléctrica, se amplifica por medio del preamplificador

PA y va a parar a un dispositivo constituido por un gran número de filtros $F1 \div F27$, cada uno de los cuales deja pasar una determinada franja de frecuencias, por ejemplo, 1/3 de octava (36—48, 48—60, 60—72 Hz y así sucesivamente).

De los filtros se puede decir que descomponen la señal en un espectro y de tal forma que el poder resolutivo es tanto mayor cuanto menor es el intervalo de frecuencias del filtro. La parte del espectro separada por el filtro se conduce a los contactos del conmutador K_1 y después, pasando por el amplificador *A* y el detector (rectificador), se dirige a las placas del oscilógrafo que desvían el

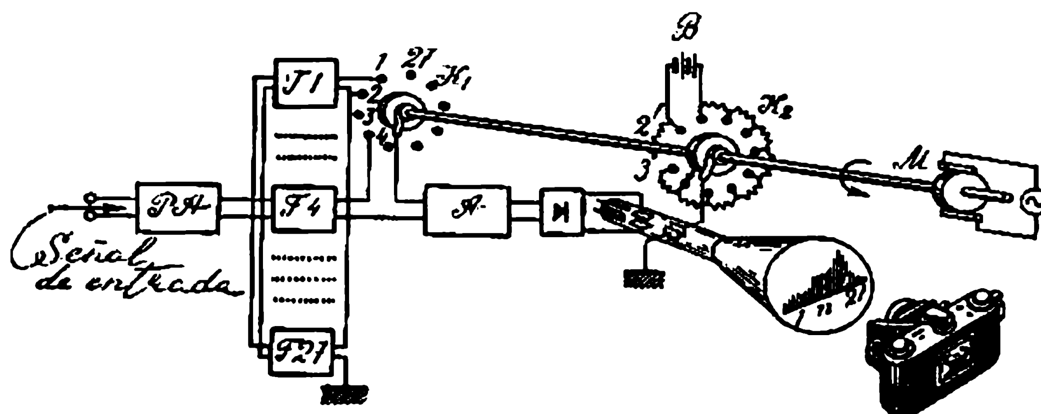


FIG. 68.

rayo electrónico en sentido vertical. Si al segundo par de placas del oscilógrafo no se le diera tensión, al conectar cada uno de los filtros el rayo electrónico se desviaría una altura proporcional a la amplitud correspondiente a la componente frecuencial del espectro. Pero esto puede hacerse mucho mejor conectando, por medio de un segundo par de placas, la exploración horizontal del rayo electrónico, de manera que la rotación automática del conmutador K_1 esté ligada unívocamente con la rotación del conmutador K_2 que manda la exploración y que se pone en movimiento por medio del motor *M*. De este modo se puede conseguir que las amplitudes de las componentes que dejan pasar los distintos filtros se marquen con desviaciones horizontales diferentes, pero completamente determinadas, del rayo electrónico, dadas por la batería *B*.

En este caso en la pantalla del oscilógrafo aparece el espectro.

Los espectros de rayas aparecen cuando las oscilaciones son periódicas, y los continuos, cuando las oscilaciones carecen de período. A las primeras pertenecen los sonidos musicales, a las segundas, ruidos de tipos diversos.

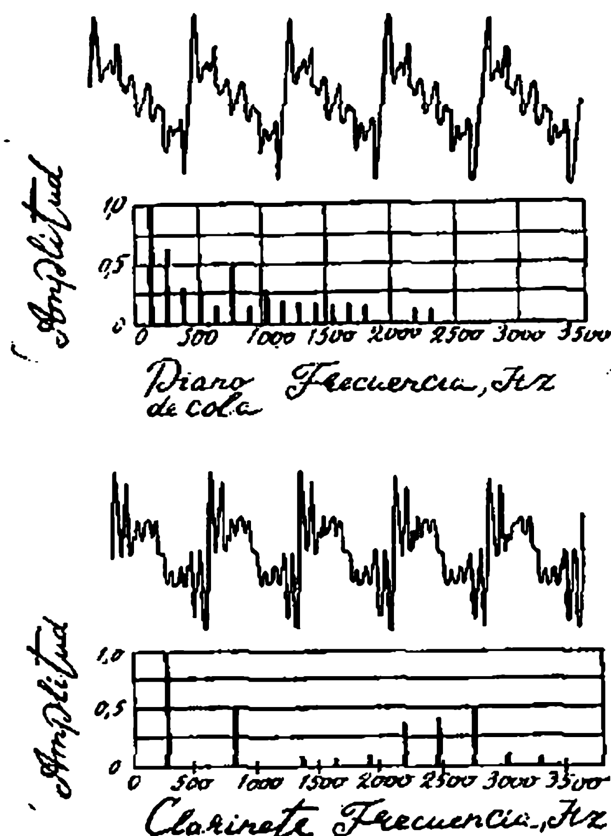


FIG. 69.

Un mismo tono musical producido por distintos instrumentos tendrá la misma frecuencia fundamental, pero espectro distinto. El matiz del timbre de un sonido viene determinado por la distribución de las intensidades de los sobretonos (véase, por ejemplo, la fig. 69). Cuanto más complejo es el espectro, más rico es el timbre del sonido en el sentido musical. Es interesante el hecho de que los desplazamientos de fase de los sobretonos (véase de nuevo la fórmula de la pág. 111) no influyen en la percepción subjetiva del sonido. El oído distingue solamente la intensidad de los sobretonos.

El análisis de los ruidos tiene importancia práctica. Si se conocen las frecuencias, sobre todo las que intervienen mucho en el ruido, esto simplifica la determinación de las causas de éste y, por lo tanto, su eliminación.

§ 47. Intensidad y nivel de intensidad sonora

En la fig. 70 las curvas de trazo grueso limitan la región de oscilaciones que percibe el oído de una persona normal (media). Sobre el eje de ordenadas se han tomado dos magnitudes relaciona-

das uniformemente: la amplitud de la presión sonora y la intensidad del sonido. La presión sonora p y la intensidad del sonido I están ligadas, en el caso más simple, por la fórmula

$$I=\frac{p^2}{2\rho c}.$$

Efectivamente, la intensidad de una onda

$$I=wc,$$

donde w es la densidad de la energía, es decir, $w=\rho u^2/2$. Pero (véase la pág. 122) $u=p/\rho c$. Haciendo la sustitución, obtenemos la fórmula antes escrita. La intensidad del sonido se puede medir en W/cm².

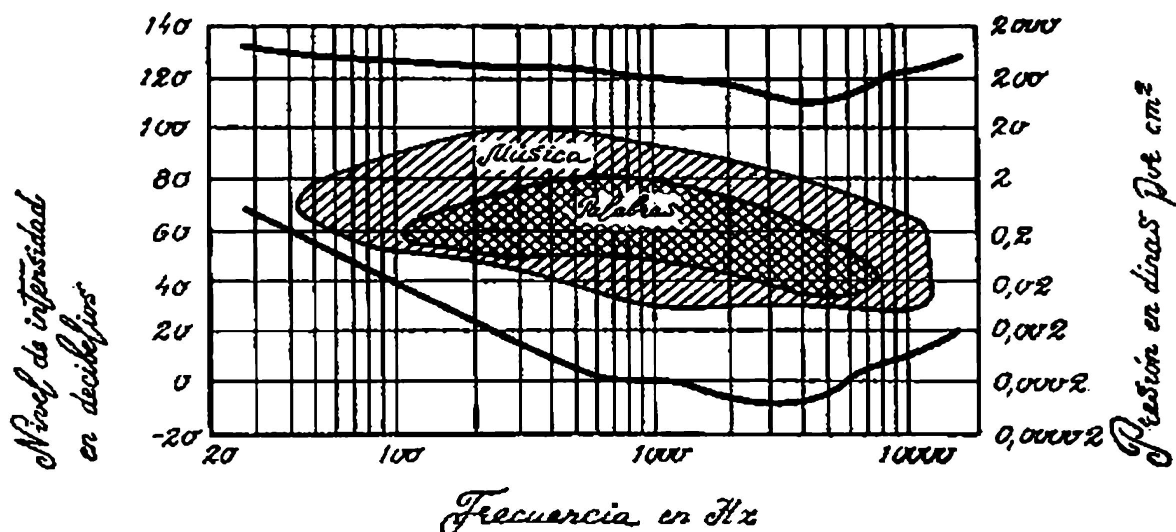


FIG. 70.

Para el aire $\rho c=41$. Los sonidos más intensos, que provocan la sensación de dolor, se generan por presiones del orden de 2000 bar, los muy débiles, pero que aún percibe una persona media, tienen la presión de $2\cdot10^{-4}$ bar (1 bar=1 din/cm²). Para las intensidades límites del sonido obtenemos las cifras desde $0{,}5\cdot10^5$ erg/s·cm² $=0{,}5\cdot10^{-2}$ W/cm² hasta $0{,}5\cdot10^{-16}$ W/cm².

Una gama tan grande de intensidades hace que sea conveniente la introducción de la escala logarítmica. Si la intensidad de un sonido es I_1, y la de otro I_2, se dice que I_2 es K decibelios más intenso que I_1 si

$$K=10\lg\frac{I_2}{I_1}.$$

La magnitud K se llama *nivel de intensidad* del sonido.De este modo, si la intensidad de un sonido es un millón de veces mayor que la de otro, por el nivel de intensidad diferirán en 60 decibelios.

Cuando la intensidad de un sonido se valúa en decibelios hay que indicar qué nivel se toma como nulo. Generalmente se toma una magnitud próxima al umbral de audición (10^{-16} W/cm²), en este caso un susurro tendrá una intensidad del orden de 15 dB, y el ruido de un avión será del orden de 120 dB.

Volviendo de nuevo al diagrama de las percepciones auditivas, señalaremos que la región de los sonidos emitidos al hablar está comprendida dentro de un marco más estrecho, tanto por las frecuencias (de 100 a 10 000 Hz) como por las intensidades (de 40 a 80 dB). Sonidos de distinta frecuencia tienen diferente audibilidad. Los sonidos que mejor percibe el oído son los de frecuencia de varios miles de hertzios. Por debajo de 20 Hz se encuentra la región de los infrasonidos, y por encima de 10 000—20 000 Hz, la región del ultrasonido.

A continuación damos los valores aproximados de la presión sonora p, de la intensidad I y del nivel de intensidad del sonido K:

	p, en bar	I, en W/cm²	K, en dB
Umbral de audición	$2,9\cdot10^{-4}$	10^{-16}	0
Goteo	$2,9\cdot10^{-3}$	10^{-14}	20
Conversación en voz baja a 5 m de distancia	$2,9\cdot10^{-2}$	10^{-12}	40
Orquesta sinfónica (fortísimo)	2,9	10^{-8}	80
Motor de aviación a 5 m de distancia	290	10^{-4}	120

§ 48. *Acústica arquitectónica*

En algunos locales un discurso se percibe ininteligiblemente, aunque con intensidad, mientras que en otras salas el orador tiene que elevar la voz para ser oído. Tiene interés hallar las constantes físicas de un local que caracterizan sus propiedades acústicas.

La experiencia demuestra que uno de los factores más importantes de este tipo es el llamado *tiempo de reverberación*, que es el tiempo durante el cual el sonido emitido se debilita un millón de veces respecto de su intensidad inicial. Desde el punto de vista acústico, los mejores locales son aquellos en que el tiempo de reverberación τ es de 0,5—1,5 s. Si τ es menor que 3 s, se considera que el local es bueno. En cambio, si el tiempo de reverberación supera

a 5 s, la acústica del local es muy mala y se caracteriza por su «resonancia».

Un sonido emitido en cualquier punto de una gran sala se refleja en las paredes, en el suelo, en el techo, en los muebles, en las cortinas y tapices y en los vestidos del público, que hay en ella. Si en cada reflexión el sonido pierde una gran parte de su energía, su amortiguación es muy rápida. En este caso el tiempo de reverberacion es muy pequeño y el sonido será «sordo». La resonancia se produce cuando el sonido se refleja muchas veces con pequeña amortiguación. El oyente percibirá, en este caso, no sólo la onda sonora que llega directamente a su oído, sino también las reflejadas dos, tres y más veces. Si el tiempo que transcurre entre la llegada de estas ondas sonoras no supera $\frac{1}{15}$ s, el oído no percibe dos o tres sonidos, como en el caso del bien conocido fenómeno del eco, sino únicamente un sonido difuso y, por consiguiente, ininteligible.

Es evidente que el tiempo de amortiguación del sonido depende de su absorción por los cuerpos circundantes. Como el sonido se refleja muchas veces, poco tiempo después de estar sonando continuamente una fuente cualquiera, todo el local se llena más o menos uniformemente de energía sonora, es decir, oscilatoria. Al cabo de un lapso breve se establece el equilibrio entre la energía que emite la fuente y la energía que absorbe el medio. Conviene advertir, sin embargo, que si no existiera la absorción y el foco sonara de manera continua, la energía sonora aumentaría indefinidamente en el local cerrado.

Supongamos que el foco sonoro deja de funcionar. En este caso sólo tendrá lugar un fenómeno, el de la absorción de la energía sonora por la superficie de los cuerpos que hay en el local. Cada uno de los materiales que toman parte en este proceso posee un coeficiente de absorción α característico. Si en el local hay una ventana abierta, para ella se puede tomar un coeficiente de absorción igual a 1, ya que el sonido sale por completo del local (lo que equivale a ser absorbido). El valor de α para una pared lisa y dura es próximo a cero (para el hormigón es 0,015). La absorción del sonido característica de todo el local se puede describir con la magnitud $A = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3 + \ldots$; en esta suma se tienen en cuenta todas las superficies que limitan el local. La teoría demuestra que el tiempo de reverberación depende de la magnitud A y del volumen del local, a saber, $\tau = 0{,}16 \frac{V}{A}$. En esta fórmula el volumen debe expresarse en metros cúbicos y la magnitud A, en metros cuadrados (0,16 es un factor dimensional).

Aplicando esta fórmula no es difícil hallar los valores típicos de los tiempos de reverberación. El coeficiente de absorción para el

hormigón acabamos de darlo; no es mucho mayor (3%) la energía que absorben el vidrio, la madera y el enlucido. La absorción aumenta bruscamente cuando en el local se introducen materiales blandos. Basta decir que la ropa de un hombre absorbe tanto sonido como 20 m² de pared. Para los materiales blandos los coeficientes de absorción oscilan de 0,5 a 0,9. Para solucionar los problemas acústicos que se plantean en la construcción de edificios tienen gran importancia los materiales porosos, cuyo coeficiente de absorción α puede aproximarse al de los materiales blandos (espuma de vidrio, hormigón alveolar).

§ 49. *Acústica atmosférica*

Si una onda pasa de un medio a otro, la dirección en que se propaga cambia de acuerdo con la ley de la refracción. El ángulo en el cual varía la dirección de propagación viene determinado por el índice de refracción, es decir, por la relación entre las velocidades de propagación.

Sabemos (§ 32) que la velocidad de propagación del sonido depende sensiblemente de la temperatura. Una variación de 1°C

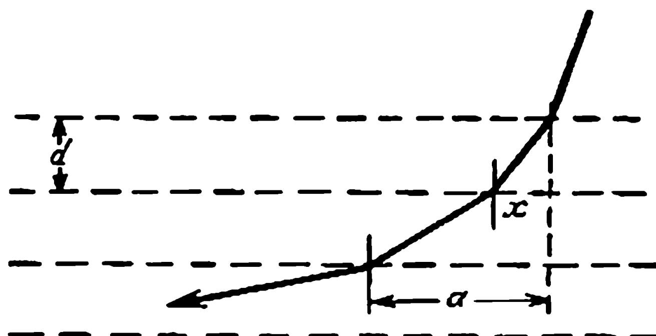


FIG. 71.

de la temperatura hace que aumente la velocidad del sonido en 0,5 m/s. En la atmósfera terrestre, por lo general, los valores de la temperatura en sus diferentes capas son distintos. Esto significa que, en diferentes capas del aire, el sonido tendrá velocidades distintas. ¿Cómo influirá en la propagación del sonido la circunstancia de que ésta ocurra en un medio donde el coeficiente de refracción cambia continuamente?

La respuesta a esta pregunta la da el esquema representado en la fig. 71. Supongamos que el sonido pasa por una serie de capas, dentro de las cuales es constante el índice de refracción, y que éste cambia a saltos al pasar de una capa a otra. La trayectoria de la onda sonora

será una línea quebrada. Pero si el espesor de las capas es pequeño y las diferencias entre los coeficientes de refracción comienzan a disminuir, la línea quebrada acabará no pudiéndose distinguir de una curva. Esto quiere decir, que en un medio de índice de refracción variable, las ondas sonoras se propagan, en general, siguiendo líneas curvas. En este caso la línea se tuerce siempre de tal modo, que de un punto a otro la onda se traslada en el menor tiempo posible (este postulado se conoce con el nombre de principio de Fermat). En este caso, la línea recta, en cierto sentido, no es la más corta.

Demostremos que este principio es correcto en el caso de dos trozos vecinos de la línea quebrada que acabamos de considerar. Supongamos para simplificar que las dos capas tienen el mismo espesor d y que las velocidades de propagación en ellas v_1 y v_2 son distintas. El tiempo que tarda la onda en recorrer el camino indicado en la figura será

$$\tau = \frac{1}{v_1}\sqrt{x^2 + d^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(a-x)^2 + d^2}.$$

El tiempo se ha expresado por medio de la variable independiente x. Dándole a x distintos valores obtendremos diferentes refracciones y diversos tiempos de traslación desde un mismo punto inicial a un mismo punto final. El tiempo será mínimo si se cumple la condición $\frac{d\tau}{dx}=0$, es decir, si

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}} : \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+d^2}}.$$

Pero $\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$ es el seno del ángulo de incidencia y $\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+d^2}}$ es el seno del ángulo de refracción. Hemos demostrado que la refracción de la onda se produce de tal modo, que el tiempo de traslación sea mínimo. Conviene subrayar que este resultado es correcto para todos los procesos ondulatorios y no sólo para las ondas elásticas.

De este modo, una onda que marcha por un medio heterogéneo cambia de dirección de manera que se alargue su camino en el medio en que la velocidad de propagación es mayor y se acorte en las capas en que dicha velocidad es menor. En otras palabras, las capas en que la velocidad de propagación es mayor serán atravesadas lo más oblicuamente posible, y las capas en que la velocidad de propagación es menor, más perpendicularmente posible.

Estas observaciones hacen que se comprenda perfectamente la fig. 72, en la cual se representa esquemáticamente la marcha de una onda sonora en los casos en que la temperatura del aire disminuye al aumentar la altura (lo que suele ocurrir de día) y cuando la temperatura aumenta con la altura (de noche).

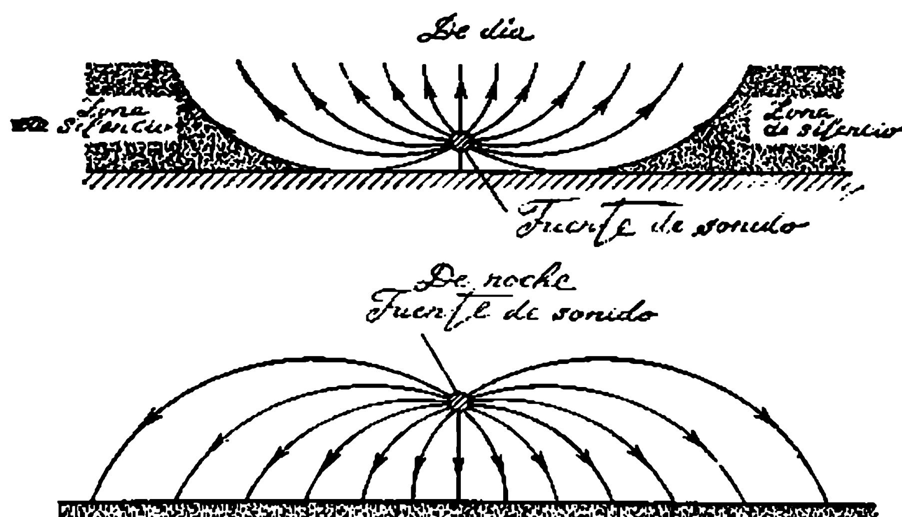


FIG. 72.

En este último caso la mayor velocidad de propagación del sonido se da en las capas próximas a la tierra. Si se observa cómo se propaga una onda sonora que sale de un punto sobre la tierra formando un ángulo pequeño con la vertical, se descubre lo siguiente. Cada capa sucesiva desvía la onda más lejos de la vertical. Cuando el ángulo de incidencia alcanza el valor i_0, para el que $\frac{\operatorname{sen} i}{n} = 1$, la refracción cesa y se produce la reflexión total. Desde un



FIG. 73.

punto de vista formal, la reflexión total es comprensible: el sen i no puede ser mayor que la unidad. La esencia física de este interesante fenómeno se estudiará más adelante (§ 128) basándose en el ejemplo de las ondas electromagnéticas. Sea como fuere, la onda no sólo se propaga a lo largo de la superficie terrestre sino que, por el contrario, gira y se dirige hacia arriba. El dibujo hace comprensible el concepto de formación de «zonas de silencio». De noche el camino de la onda sonora tiene su parte convexa vuelta hacia arriba. Por esto la audibilidad es mayor por la noche que durante el día. Si el sonido se propaga sobre una superficie reflectora (como la del agua), sonidos no muy fuertes pueden oirse a varios kilómetros de distancia. En este caso la trayectoria de la onda es una sucesión de arcos convexos (fig. 73).

§ 50. Acción del ultrasonido

La energía ondulatoria por unidad de volumen del campo sonoro es proporcional al cuadrado de la frecuencia. En efecto, la densidad de energía oscilatoria $w=\rho u^2/2$, pero la amplitud de la velocidad $u_0=A\omega$ y, por consiguiente, w es proporcional a ω^2. Los focos intensos de ultrasonido son capaces de crear oscilaciones con amplitud de presión de decenas de atmósferas. De este modo, en los microvolúmenes de la sustancia, varios millares de veces por segundo, la tensión alcanza decenas de atmósferas de presión, desciende hasta cero, llega a decenas de atmósferas de extensión y así sucesivamente.

Está claro que una acción mecánica tan fuerte puede ocasionar una serie de fenómenos específicos. Entre ellos figura el fenómeno de la *cavitación*. En el instante de la oscilación correspondiente a la extensión máxima, en el líquido que se halla en el campo ultrasónico se produce una ruptura microscópica a donde tienden los gases disueltos y el vapor. En el instante de la oscilación correspondiente a la compresión, en la región de estas rupturas se crean presiones colosales, del orden de millares de atmósferas.

Estas acciones tan importantes del ultrasonido se pueden utilizar para vencer las fuerzas que actúan entre las moléculas. Las emulsiones (grasa en agua, benceno en agua y otras) se dispersan por la acción del ultrasonido. En la partícula suspendida en el agua se produce más pronto o más tarde la explosión debida a la cavitación. La acción trituradora del ultrasonido encuentra amplia aplicación en la industria.

No obstante, en ausencia de la cavitación también puede ser importante la acción del ultrasonido. Si una onda ultrasónica pasa a través de un aerosol (gas con partículas sólidas en suspensión, como el humo, por ejemplo) el resultado es la precipitación de las partículas. Las oscilaciones ultrasónicas concentran las partículas sólidas en los nodos de presión sonora, donde se aglutinan y se hacen lo suficientemente pesadas para caer a tierra.

La detección de sopladuras, grietas internas y otros defectos de los metales valiéndose de la inspección ultrasónica es también un campo importante de aplicación del ultrasonido. Este método se basa en la reflexión del ultrasonido en el límite medio — aire o metal básico — impureza. El efecto se nota si las dimensiones del defecto son mayores que la longitud de onda. Para descubrir un defecto de 1 mm hace falta que la longitud de onda sea menor que 0,1 mm y, por lo tanto, la frecuencia debe ser del orden de 10^8 Hz. Generalmente se trabaja con frecuencias mucho menores (10^7 Hz) y el método se utiliza para descubrir defectos grandes.

Es muy conocida también la aplicación del ultrasonido en los eco-sonda y sonares (radares acústicos).

9

TEMPERATURA Y CALOR

§ 51. Equilibrio térmico

Se dice que el estado de un cuerpo no varía, cuando todas las propiedades de dicho cuerpo permanecen invariables. Y al contrario, si cambia una propiedad cualquiera del cuerpo, se dice que varía su estado. El estado de un cuerpo se puede variar realizando sobre él un trabajo. Pero los mismos resultados se pueden obtener por medio no mecánico. El agua se calienta después de agitarla intensamente o después de someterla a la acción de un mechero de gas. Si el medio ambiente o los cuerpos circundantes influyen sobre el cuerpo o sistema de cuerpos que se considera y varían su estado por un medio no mecánico, se dice que existe intercambio de calor.

Si entre los cuerpos no existe intercambio de calor, están en equilibrio térmico, es decir, tienen la misma temperatura. Si los cuerpos están en contacto entre sí, la existencia de equilibrio térmico se pone de manifiesto directamente: los estados de dichos cuerpos continúan siendo los mismos durante largo tiempo. El intercambio calorífico también es posible cuando los cuerpos están lejos uno del otro. En este caso se puede descubrir el equilibrio térmico valiéndose de un tercer cuerpo, que hace las veces de termómetro. Si el termómetro se halla en equilibrio con ambos cuerpos, la temperatura de éstos será la misma. Esto significa que, si estuvieran en contacto directo, se hallarían en estado de equilibrio térmico. Por medio de un «tercer cuerpo», termómetro, se puede determinar siempre si los cuerpos poseen temperaturas distintas o iguales.

Valiéndose de un termómetro no solo se puede establecer si existe equilibrio térmico o no, sino que también se puede juzgar acerca del grado de desviación de dicho equlibrio. Para que un termómetro pueda servir a este fin hay que ponerse de acuerdo en cuanto a la sustancia del termómetro (mercurio, alcohol, agua, gas) y acerca de la propiedad (indicio) con respecto a la cual vamos a juzgar si existe equilibrio térmico o desviación de él entre un objeto y el termómetro. Como siempre ocurre en la física, lo principal es convenir qué instrumentos de medición, en este caso termómetros, deben servir de base. Luego siempre es posible graduar cualquier termómetro por un patrón. Como patrón de cuerpo (sustancia) termométrico se toma hidrógeno gaseoso. El indicio que sirve para juzgar la temperatura es la presión p del gas. La temperatura del cuerpo se considera proporcional a la presión del hidrógeno en el

termómetro de gas, siendo constante el volumen que ocupa el hidrógeno.

La escala de temperaturas se establece del modo siguiente. La temperatura del hielo fundente se llama 0°, la del agua en ebullición, 100° (a la presión de 760 mm de la columna de mercurio). Midiendo la presión del hidrógeno p_0 y p_{100} en estos dos puntos, tomando sus valores sobre una gráfica y trazando por ellos una recta,

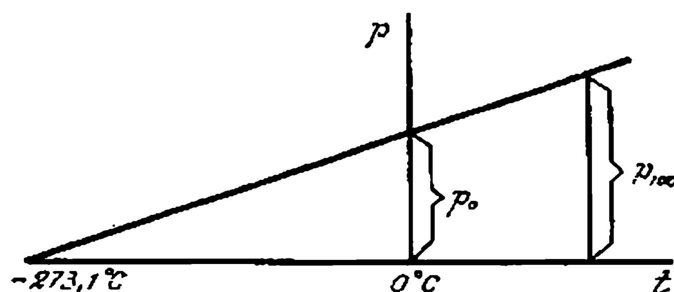


FIG. 74.

obtenemos la escala de temperaturas de Celsius. La ecuación de esta recta, que se representa en la fig. 74, tiene la forma

$$t = \frac{p - p_0}{p_{100} - p_0} \cdot 100.$$

La recta corta el eje t a la temperatura de — 273,1°C. Este es el cero absoluto. Por definición del concepto, es imposible la existencia de temperaturas más bajas. En la mayoría de los casos se utiliza en física la temperatura medida a partir del cero absoluto, $T = t + 273{,}1°$. Esta temperatura se llama absoluta o temperatura en grados Kelvin (°K).

La graduación de los termómetros de trabajo por medio del patrón de hidrógeno puede hacerse en un intervalo de temperaturas limitado. A temperaturas elevadas puede comenzar la difusión del hidrógeno a través de las paredes del recipiente. Si las temperaturas son bajas el hidrógeno puede convertirse en líquido. No obstante, la definición adoptada de la temperatura tiene, como veremos más adelante (pág. 169), un sentido completamente general.

§ 52. *Energía interna*

Los rasgos fundamentales del comportamiento de los cuerpos durante una interacción mecánica y térmica son reflejados perfectamente por el llamado modelo cinético-molecular. El cuerpo,

constituido por moléculas, se considera como un sistema de partículas que se mueven e interaccionan sometidas a las leyes de la mecánica. Este sistema de moléculas debe teber una energía compuesta por la energía potencial de interacción de las partículas y por la energía cinética de sus movimientos. Esta energía se llama *energía interna* del cuerpo.

A un estado determinado del cuerpo le corresponde una energía interna determinada. Una variación de la disposición mutua de las partículas o del carácter de su movimiento va ligada a un cambio de la energía interna. Cualquiera que sea el procedimiento de variación de la energía interna de un cuerpo, los cuerpos que lo rodean deben ceder energía a las moléculas de dicho cuerpo. Si el cuerpo se somete a una acción mecánica, la transmisión de energía se produce de un modo ordenado; cuando se trata de un intercambio calorífico, la energía es cedida por el medio en forma de impulsos casuales que se transmiten ya a una molécula ya a otra.

La cantidad de energía transmitida al cuerpo mecánicamente se mide por la cantidad de trabajo realizado sobre el cuerpo. La cantidad de energía cedida en el intercambio calorífico se mide por la cantidad de calor.

Como el cálculo riguroso de la energía interna de un cuerpo es difícil, y en la mayoría de los casos, imposible, y como el propio concepto de energía interna como magnitud mecánica pura es solamente aproximado, hay que introducir una definición rigurosa de esta magnitud. Esto se consigue estudiando los procesos que transcurren sin intercambio de calor con el medio circundante. Estos fenómenos se llaman *adiabáticos*. Haciendo el experimento dentro de una envolutura termoaislante y limitándose a medir en plazos cortos (antes de que el calor tenga tiempo de «salir» del volumen que se estudia), se consigue cumplir con bastante exactitud las condiciones adiabáticas. Los numerosos experimentos que condujeron en su tiempo al establecimiento de la ley de conservación de la energía demuestran, que cualquiera que sea el camino seguido para variar, en este proceso, el estado del cuerpo, el trabajo que se necesita para ello es el mismo. La cantidad A de este trabajo es igual, por definición, al incremento de la energía interna U del cuerpo:

$$A = U_2 - U_1.$$

Es natural que el valor absoluto de la energía interna no se puede hallar por los datos del experimento.

Si el modelo mecánico del cuerpo fuera completamente exacto, la afirmación que hemos escrito sería una simple consecuencia de la ley de conservación de la energía mecánica. Pero el modelo cinético-molecular es sólo un modelo, por esto el hecho de que a

cada estado del cuerpo se pueda equiparar una energía determinada, de manera que la diferencia de las energías de dos estados sea igual al trabajo adiabático de transición, es una de las leyes más importantes de la naturaleza que conduce a la ley de conservación de la energía.

Un intercambio calorífico y una acción mecánica pueden conducir en una serie de casos a un mismo cambio de estado, es decir, a cambios iguales de la energía interna del cuerpo. Esto nos da la posibilidad de comparar el calor con el trabajo y de medir la cantidad de calor en las mismas unidades que el trabajo y la energía.

Para dar una idea de los valores de la energía interna citamos las cifras que siguen.

Cuando se calienta agua en 1° C la energía de 1 g de este líquido aumenta en

$$1\ \text{cal} = 0{,}427\ \text{kgf}\cdot\text{m} = 4{,}18\cdot10^{7}\ \text{erg} = 4{,}18\ \text{J} = 2{,}61\cdot10^{19}\ \text{eV}.$$

En este caso la energía de una molécula de agua aumenta por término medio en

$$3\cdot10^{-23}\ \text{cal} = 1{,}28\cdot10^{-23}\ \text{kgf}\cdot\text{m} = 1{,}25\cdot10^{-15}\ \text{erg} = 12{,}5\cdot10^{-23}\ \text{J} = 7{,}8\cdot10^{-4}\ \text{eV}.$$

Al quemarse 1 g de carbón la sustancia cede una cantidad de energía interna igual a

$$7000\ \text{cal} = 2990\ \text{kgf}\cdot\text{m} = 2{,}93\cdot10^{11}\ \text{erg} = 2{,}93\cdot10^{4}\ \text{J} = 18{,}3\cdot10^{22}\ \text{eV}.$$

Calculadas para un átomo de carbono estas cifras toman la forma

$$1{,}4\cdot10^{-19}\ \text{cal} = 5{,}98\cdot10^{-20}\ \text{kgf}\cdot\text{m} = 5{,}86\cdot10^{-12}\ \text{erg} = 5{,}86\cdot10^{-19}\ \text{J} = 3{,}66\ \text{eV}.$$

La difusión nuclear de 1 g de uranio 235 desprende una energía de

$$2{,}03\cdot10^{10}\ \text{cal} = 8{,}65\cdot10^{9}\ \text{kgf}\cdot\text{m} = 8{,}49\cdot10^{17}\ \text{erg} = 8{,}49\cdot10^{10}\ \text{J} = 5{,}29\cdot10^{29}\ \text{eV}.$$

En este caso un núcleo atómico cede una cantidad de energía interna igual a

$$7{,}9\cdot10^{-12}\ \text{cal} = 3{,}38\cdot10^{-12}\ \text{kgf}\cdot\text{m} = 3{,}3\cdot10^{-4}\ \text{erg} = 3{,}3\cdot10^{-11}\ \text{J} = 206\cdot10^{6}\ \text{eV} \approx 200\ \text{MeV},$$

lo que supera en más de 50 millones de veces la energía de las reacciones químicas (1 MeV $= 10^{6}$ eV).

§ 53. *Primer principio de la termodinámica*

En el caso más general, intercambiando energía con el medio o con los cuerpos circundantes, el sistema que se considera puede percibir o ceder una cantidad de calor Q y puede realizar trabajo o sobre él puede hacerse un trabajo A. El calor y el trabajo son dos formas en las cuales la energía del cuerpo puede transmitirse al medio o, al contrario, la energía del medio puede transferirse al cuerpo. La ley de conservación de la energía excluye la posibilidad de cualquier tipo de pérdidas en el intercambio energético. La diferencia de energías de un sistema en dos estados debe ser igual a

la suma del calor y el trabajo recibidos por el sistema de los cuerpos circundantes.

Esta afirmación no podría comprobarse experimentalmente si no añadiésemos que el incremento de la energía al pasar el sistema de un estado a otro es siempre el mismo independientemente del carácter o del procedimiento de paso del estado inicial al final. El principio de conservación de la energía está contenido en este postulado precisamente. A él sí que podemos, indudablemente, someterlo a una comprobación experimental completa, midiendo el calor y el trabajo transmitidos al sistema en diversas transiciones de un mismo estado inicial a un mismo estado final. El incremento de la energía en todos los casos debe ser el mismo.

La ley de conservación de la energía en la forma concreta que acabamos de exponer recibe el nombre de *primer principio de la termodinámica*. Esta importantísima ley de la naturaleza fue establecida en virtud de los trabajos de una serie de científicos llevados a cabo a mediados del siglo pasado. El papel de Robert Mayer, de Joule y, ante todo, de Helmholtz merece ser altamente valorado.

Para poder escribir el primer principio de la termodinámica en forma de fórmula hay que ponerse de acuerdo acerca del signo a elegir para el trabajo y el calor. Nosotros aceptaremos que el calor es positivo cuando se le transmite al sistema, y consideraremos que el trabajo es positivo cuando el cuerpo lo realice contra la acción de las fuerzas externas. En este caso el primer principio de la termodinámica se escribe en la forma

$$\Delta Q = dU + dA,$$

es decir, el calor proporcionado al cuerpo se invierte en cambiar su energía interna y en el trabajo que él realiza. Pueden imaginarse, evidentemente, toda clase de transformaciones en las cuales cada una de las magnitudes que figuran en la igualdad puede ser positiva y negativa.

No es casualidad que al escribir la fórmula del primer principio sólo se utilice el signo diferencial para la energía. El trabajo y el calor no son diferenciales totales. Al pasar el cuerpo de un estado a otro las cantidades de trabajo y de calor percibidas o cedidas por el cuerpo dependerán del «camino» de transición, y únicamente el incremento de la energía, como ocurre con la diferencial total de cualquier función, no depende del procedimiento de transición:

$$\int_1^2 dU = U_2 - U_1.$$

La aplicación de la ley de conservación de la energía y, en particular, el primer principio de la termodinámica se extiende a todas

las partes de la física. El valor de esta ley para la ciencia consiste en su excepcional fuerza de predicción. Sin tener noticia alguna sobre el carácter de un proceso, conociendo únicamente los estados inicial y final del sistema se puede hacer una serie de deducciones. Supongamos, por ejemplo, que ocurre una reacción química de unión de las moléculas A y B para formar una molécula AB. Supongamos también que conocemos las energías internas de las moléculas U_A, U_B y U_{AB}. Si U_{AB} es mayor que U_A+U_B podemos predecir que la reacción se desarrolla con absorción de calor y que la cantidad de él necesaria es $Q=U_{AB}-(U_A+U_B)$. O conociendo U_A y U_B y midiendo con un calorímetro el calor de reacción, podemos hallar U_{AB} y utilizar estos datos para predecir la marcha de cualquier otra reacción en la cual intervenga el compuesto AB.

§ 54. Energía de los sistemas microscópicos

La ley de conservación de la energía y la regla de intercambio de la energía son correctas, como es natural, tanto para los cuerpos grandes como para las partículas que componen los cuerpos. Pero al estudiar las partículas (átomos, núcleos, moléculas) o los sistemas formados por un pequeño número de ellas hay que tener en cuenta otra de las leyes más importantes de la naturaleza. La energía de los sistemas microscópicos no puede tomar unos valores cualesquiera. Cada sistema posee su serie, característica y exclusivamente suya, de posibles valores de la energía: E_1, E_2, ... La fig. 214 (pág. 491) representa el esquema de los posibles niveles de energía del átomo de hidrógeno. Con figuras semejantes se pueden representar los niveles energéticos de otros sistemas atómicos. Cuando se le transmite calor o trabajo a un sistema, la energía de los átomos, de las moléculas o de los otros sistemas microscópicos puede aumentar únicamente a saltos, en porciones determinadas (cuantos) de energía. Del mismo modo, por cuantos aislados, se cede la energía a los cuerpos circundantes.

Rigurosamente hablando, la ley acerca del carácter cuántico de la energía y de la existencia de una «escala» de posibles niveles energéticos para cada sistema microscópico es una ley completamente general de la naturaleza, correcta también para los cuerpos grandes. Sin embargo, como demuestra la física teórica, en un cuerpo grande el número de niveles energéticos, en términos aproximados aumenta n veces si el cuerpo consta de n átomos.

A medida que aumenta la energía, como puede verse en la figura representativa del átomo de hidrógeno, los niveles se encuentran cada vez más próximos. La aproximación de estos niveles se produce en el cuerpo grande con una rapidez incomparablemente mayor que

en un átomo aislado. Sólo los niveles más bajos, pobres en energía, aparecen separados. Los niveles más altos se juntan, resultando en la práctica que el cuerpo grande puede cambiar su energía de un modo continuo. Si al cuerpo se le quita energía, «desciende» a niveles más bajos. Por esta razón, el carácter cuántico de la variación de la energía se pone de manifiesto tanto más ostensiblemente cuanto más baja es la temperatura del cuerpo, cuanto más se aproxima ésta al cero absoluto.

Una acción mecánica hace que los niveles de energía del cuerpo o del sistema se desplacen. En la inmensa mayoría de los casos es imposible seguir este desplazamiento. En los sistemas microscópicos — átomos y moléculas — la influencia de la presión es muy pequeña.

Una interacción térmica consiste en transiciones de los sistemas de un nivel de energía a otro.

El equilibrio térmico es un equilibrio móvil. Cada uno de los cuerpos no tiene durante todo el tiempo una energía determinada, sino que continuamente intercambia energía con el medio de tal modo, que, por término medio, la energía permanece invariable. El intercambio de energía se efectúa a porciones, es decir, por cuantos. Si en un instante cualquiera la energía es igual a E_1, en el instante siguiente varía de un salto hasta E_2.

La energía se entrega en forma de radiación. Si $E_1 > E_2$, $E_1 - E_2 = h\nu$, donde ν es la frecuencia de la radiación y h es la constante de Planck, que es igual a $6{,}62 \cdot 10^{-27}$ erg·s. La adquisición de energía puede efectuarse como resultado de la absorción de una radiación o a consecuencia del choque mecánico de cualquier partícula.

Si la temperatura no permanece constante, sino que desciende, el número de transiciones de niveles superiores a inferiores es enormemente mayor que el de transiciones en el sentido contrario. La energía desciende a saltos, el cuerpo cede un cuanto de radiación tras otro.

Los fenómenos de intercambio energético que hemos descrito esquemáticamente fueron establecidos primeramente para los átomos. Poco después se hizo evidente su carácter universal. Por ahora nos limitamos a hacer estas consideraciones generales y remitimos al lector a la parte III de este libro, donde encontrará más detalles.

§ 55. *Ecuación de estado*

Entre las diversas propiedades de un cuerpo se pueden destacar tres fundamentales llamadas parámetros de estado. Son éstas la presión p, el volumen v y la temperatura T. El conocimiento de

estos tres parámetros no siempre es suficiente para caracterizar por completo un cuerpo. Si un sistema está formado por muchas sustancias, hay que conocer sus concentraciones. Si un cuerpo se halla en un campo eléctrico o magnético, hay que saber la intensidad de éste. Siempre se puede elegir cierto conjunto de parámetros que defina uniformemente el estado del cuerpo. Las demás características se pueden calcular, en este caso, partiendo de los parámetros fundamentales.

Si no prestamos atención a los campos electromagnéticos y nos limitamos a considerar los sistemas más simples — gases, líquidos y sólidos isótropos—, resulta que dos parámetros son suficientes para definir el estado del cuerpo. En calidad de estos dos parámetros puede tomarse indistintamente cualquier par formado por p, v, T. Lo más frecuente es elegir v y T. Entonces la presión p será función de v y T. La ecuación

$$p = f(v, T)$$

se llama *ecuación de estado*. El conocimiento de esta ecuación para un cuerpo cualquiera, y en particular para una clase de cuerpos, tiene una gran importancia para la física. Las ecuaciones de estado se pueden establecer experimentalmente. El carácter de la dependencia de la presión respecto del volumen y la temperatura es extremadamente individual en los líquidos y sólidos. Estableciendo la ecuación de estado de un cuerpo dado obtenemos una información completa de su comportamiento en distintos casos, pero no adquirimos ningunos conocimientos acerca del comportamiento de otros cuerpos.

Al investigar el comportamiento de una sustancia, ésta se suele caracterizar con bastante frecuencia no por su ecuación de estado, sino por la derivada de uno de los parámetros respecto de otro.

Para saber cómo se dilata un cuerpo al aumentar la temperatura, permaneciendo invariable la presión, hay que calcular la derivada $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ (este símbolo significa: derivada respecto de T a p constante).

La magnitud

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

recibe el nombre de *coeficiente de dilatación cúbica*. Como puede verse en esta fórmula, α indica la fracción en que varía el volumen del cuerpo al variar la temperatura en un grado.

El coeficiente térmico de presión

$$\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

es igual a la variación relativa de la presión cuando la temperatura varía en un grado (a volumen constante). Los coeficientes α y β tienen dimensión, recíproca del grado (°K^{-1}).

Una tercera magnitud útil es la *compresibilidad*

$$\varkappa = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T,$$

que es igual a la disminución relativa del volumen al aumentar la presión en una unidad (a temperatura constante).

Estos tres coeficientes están ligados por una relación que ahora deduciremos fácilmente. Como

$$p = f(v, T),$$

tenemos que

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T dv.$$

Si la presión es constante, $dp=0$ y

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -1$$

de donde

$$\frac{\beta\varkappa}{\alpha} = \frac{1}{p}.$$

Este interesante resultado demuestra que, conociendo, por ejemplo, la compresibilidad y el coeficiente térmico de presión, se puede calcular el valor del coeficiente de dilatación. La relación que hemos deducido es válida para todos los cuerpos.

Los coeficientes α, β y $\varkappa$, en general, no son magnitudes constantes para la sustancia dada. Para valores distintos de la presión y la temperatura estos coeficientes pueden tomar valores diferentes. Por esto, al indicar el valor de cualquier coeficiente, hay que hacer mención de los valores de la presión y de la temperatura para los cuales se da la cifra. En algunos casos se indica el valor medio de los coeficientes para tal o cual intervalo de temperaturas o presiones.

He aquí varios ejemplos.

a) Coeficiente de dilatación cúbica α y compresibilidad $\varkappa$ de algunos líquidos

	α, °K^{-1}	$\varkappa$, m^2/N
Agua, a 10—30° C y presión normal	$2{,}07\cdot10^{-4}$	$48{,}5\cdot10^{-11}$
Mercurio, a 10—30° C	$1{,}81\cdot10^{-4}$	$3{,}05\cdot10^{-11}$
Éter, a 0° C	$16{,}56\cdot10^{-4}$	$149\cdot10^{-11}$

Los coeficientes de dilatación cúbica y de compresibilidad de los sólidos pueden ser muy distintos. Así, por ejemplo, a temperatura y presión constantes el cuarzo fundido tiene $\alpha=1,29\cdot 10^{-6}\,^{\circ}K^{-1}$ y $\varkappa=2,76\cdot 10^{-11}$ m²/N, mientras que la ebonita tiene $\alpha=77\cdot 10^{-6}\,^{\circ}K^{-1}$ y $\varkappa=18,4\cdot 10^{-11}$ m²/N.

b) Calculamos, para el agua, el mercurio y el éter, el coeficiente térmico de presión β a la presión atmosférica $\left(\frac{\beta\varkappa}{\alpha}=1\right)$:

	Agua	Mercurio	Eter
β, K^{-1}	4,4	61,4	11,3

Esto quiere decir que si cierto volumen *constante* de mercurio se calienta en 10^{-3} grados, su presión aumentará en un 6% (!).

§ 56. *Ecuación del estado gaseoso*

La ecuación de estado más simple es la de los gases enrarecidos. Esta ecuación la escribió Mendeléiev unificando en una fórmula la ecuación de Clapeyron y la ley de Avogadro. La ecuación de Clapeyron dice que la expresión $\frac{pv}{T}$ es una magnitud constante para una masa dada de gas, es decir,

$$\frac{pv}{T}=\text{const.}$$

Pero las moléculas — gramo de los distintos gases ocupan, a igualdad de presión y temperatura, volúmenes iguales (22,41 l a 0°C y a una atmósfera *)) — ley de Avogadro—. Por consiguiente, referida a una molécula-gramo, la constante de la ecuación de Clapeyron debe tener un valor universal. Esta constante se representa por R y se llama *constante universal de los gases*. Para un mol de cualquier gas, la ecuación toma la forma $pv=RT$; aquí v es el volumen de un mol de gas. La constante R tiene dimensión de trabajo referido a un grado y a un mol; sus valores en distintas unidades son:

$$R=8,31\cdot 10^{7}\,\frac{\text{erg}}{\text{mol}\cdot{}^{\circ}\text{K}}=8,31\,\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot{}^{\circ}\text{K}}=0,0821\,\frac{\text{atm}\cdot\text{l}}{\text{mol}\cdot{}^{\circ}\text{K}}\approx 2\,\frac{\text{cal}}{\text{mol}\cdot{}^{\circ}\text{K}}\,.$$

Como el volumen de una masa arbitraria de gas $V=\mu v$, siendo μ el número de moles, en el caso más general la ecuación de estado

*) Aquí se sobrentiende una atmósfera física, 1 atm = 1,033 atmósferas técnicas = $1,01\cdot 10^{5}$ N/m².

de los gases enrarecidos toma la forma

$$pV = \mu RT \quad \text{o} \quad pV = \frac{m}{M} RT,$$

donde m es la masa y M el peso molecular del gas.

Para una serie de cálculos puede ser útil la fórmula de la densidad ρ del gas, que se obtiene de esta ecuación:

$$\rho = \frac{Mp}{RT}.$$

Los gases que cumplen la ecuación del estado gaseoso se llaman *perfectos* o *ideales*. Este término estaría justificado ya por la extrema sencillez de la ecuación, sin embargo, como veremos más tarde (pág. 202), esta ecuación se puede deducir representando el gas por un modelo ideal que puede definir así: un gas perfecto es un sistema de moléculas cuyas fuerzas de atracción y dimensiones se pueden despreciar.

Los coeficientes de dilatación, presión y compresibilidad de los gases perfectos vienen expresados por las siguientes fórmulas simples:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{T}, \qquad \varkappa = \frac{1}{p}.$$

A la temperatura de 0°C (T=273,1°K) α y β son iguales a

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273,1}\ {}^\circ\mathrm{K}^{-1} = 0,00366\ {}^\circ\mathrm{K}^{-1}.$$

Las siguientes cifras dan cierta idea de en qué medida los gases reales se aproximan a los perfectos.

	α, a V=const		α, a V=const
Hidrógeno	$3660 \cdot 10^{-6}$	Anhídrido carbónico . .	$3726 \cdot 10^{-6}$
Helio	$3660 \cdot 10^{-6}$	Aire	$3674 \cdot 10^{-6}$
Nitrógeno	$3674 \cdot 10^{-6}$		

Las sustancias gaseosas que se hallan a presiones considerablemente mayores que la atmosférica dejan de cumplir la fórmula del gas perfecto. Los cálculos pueden ya conducir a errores de varios tantos por ciento a presiones de varias decenas de atmósferas.

Una conclusión importante a que puede llegarse estudiando el comportamiento de los gases enrarecidos consiste en que cualquiera de ellos, en general, puede tomarse, de igual modo que el hi-

drógeno, como base para determinar la temperatura. El hidrógeno no destaca en nada entre los gases enrarecidos. Por esto puede decirse que la escala de temperaturas aceptada en la física no es la del hidrógeno, sino la escala de presiones del gas perfecto. Esta circunstancia precisamente justifica la elección hecha del procedimiento para determinar la temperatura: una clase grande de sustancias conduce a escalas de temperaturas que coinciden exactamente. El fundamento cinético molecular de la elección de la escala de temperaturas se dará más adelante (pág. 203).

§ 57. Ecuación de estado de los gases reales

Para los gases a grandes presiones, para los vapores próximos a la saturación y en una serie de otros casos la ecuación del estado gaseoso comienza a dar resultado muy poco preciso. En estos casos se recurre a otras ecuaciones de estado. Una parte de estas ecuaciones fue hallada empíricamente y algunas (como la más conocida de ellas, la ecuación de Van der Waals) poseen una base teórica cualitativa. Sea como fuere, el valor de una u otra ecuación se puede establecer únicamente comparando las cifras obtenidas en los experimentos con las calculadas por la ecuación. Citaremos algunos ejemplos de ecuaciones de estado.

La corrección más simple que puede introducirse en la ecuación de los gases perfectos es, naturalmente, la de tener en cuenta el volumen de las moléculas gaseosas. Es evidente que, incluso sometiéndolo a una presión infinitamente grande, es imposible comprimir un gas hasta un volumen nulo. Esto justifica la ecuación de estado de la forma

$$p(v-b)=RT,$$

donde b es una constante que tiene en cuenta el volumen finito de las moléculas.

Cuanto mayor sea el número de constantes que se introduzcan en la ecuación de estado, tanto más fácil será conseguir una buena coincidencia de las cifras experimentales con las calculadas. Pero serán menores las posibilidades de predicción de las fórmulas. No es de extrañar la magnífica coincidencia con los datos experimentales, en un amplio intervalo de valores de los parámetros de estado, que proporciona la fórmula de Bridgeman — Beattie, en la que figuran cinco constantes A, B, a, b, c, que caracterizan la sustancia:

$$p=\frac{RT(1-\varepsilon)}{v^2}(v+B')-\frac{A'}{v^3},$$

donde

$$A'=A\left(1-\frac{a}{v}\right), \qquad B'=B\left(1-\frac{b}{c}\right), \qquad e=\frac{c}{vT^3}.$$

En la fórmula de Dieterici figuran tres constantes a, b, s:

$$p(v-b)=RTe^{-\frac{a}{RT^s v}}.$$

Dos constantes, a y b, tiene la fórmula de Van der Waals:

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT.$$

El mérito de esta última ecuación consiste en que refleja correctamente el carácter general de la dependencia entre los parámetros para todas las sustancias gaseosas. Sin embargo, para una sustancia dada no se consigue elegir unos valores constantes de a y b tales, que los datos calculados coincidan bien con las mediciones en un intervalo amplio.

La ecuación de Van der Waals se basa en lo siguiente. La presión satisface la ecuación del estado gaseoso, $p=\frac{RT}{v}$, si las fuerzas de atracción entre las moléculas se desprecian. Debido a la atracción mutua de las moléculas, la presión sobre las paredes del recipiente debe disminuir en cierta cantidad p'. Por lo tanto, $p=\frac{RT}{v}-p'$ o, teniendo en cuenta que el volumen de las moléculas es finito,

$$p=\frac{RT}{v-b}-p' \quad \text{o} \quad (p+p')(v-b)=RT.$$

Pero, ¿por qué $p'=a/v^2$? En este caso razonamos del siguiente modo. Dividimos mentalmente el volumen del gas en dos partes. Una de ellas es atraída por la otra. La fuerza de atracción debe ser proporcional al número de moléculas que hay en la parte izquierda y al número de moléculas que hay en la parte derecha del volumen. En otras palabras, la fuerza de atracción deberá ser proporcional al cuadrado de la densidad, es decir, inversamente proporcional al cuadrado del volumen.

Acerca de las fuerzas de interacción entre las moléculas volveremos a hablar más detenidamente en la parte III de este libro.

10

PROCESOS TERMODINÁMICOS

§ 58. Representación gráfica de las transformaciones

Si se dan dos parámetros del estado de un cuerpo, el tercero se calcula por medio de la ecuación de estado. Esto quiere decir, que en una gráfica en que sobre un eje se tome un parámetro (por ejemplo, la presión) y sobre el otro, el segundo parámetro (por ejemplo, el volumen), el estado del cuerpo estará caracterizado unívocamente por un punto representativo.

Es necesario, indudablemente, añadir que, al recurrir a la representación gráfica del estado de un cuerpo, suponemos tácitamente que dicho estado es de equilibrio. Unicamente en este caso los valores de los parámetros del estado serán iguales en todo el volumen del sistema y se podrá hablar de la temperatura, presión, densidad, etc., de todo el cuerpo (sistema) en conjunto.

Puede plantearse la siguiente pregunta: ¿de qué procesos o transformaciones puede hablarse, si vamos a considerar estados de equilibrio? La respuesta es: si una transformación se desarrolla con suficiente lentitud, los valores de los parámetros del estado se pueden considerar iguales en todo el volumen. Un proceso de este tipo es una especie de sucesión continua de estados de equilibrio. Esta transformación es *reversible*. Esto significa que cualquier transformación representada gráficamente se puede pensar que está trazada en ambos sentidos. Una transformación consistente en estados de equilibrio sucesivos se puede cumplir del estado *1* al estado *2*, y luego del estado *2* al estado *1* pasando por los mismos estados intermedios sin que ocurra variación alguna en el medio circundante.

Un proceso o transformación reversible es un proceso idealizado. Cualquier transformación real es, en mayor o menor grado, irreversible, en dependencia de lo que disten de ser equilibrados los estados intermedios del proceso.

La irreversibilidad de las transformaciones reales se comprende claramente por el siguiente razonamiento. Todo establecimiento de equilibrio es irreversible. Los ejemplos de esto son sencillos y de todos conocidos: el enfriamiento de un cuerpo en un medio más frío, la «resorción» de una deformación mecánica, por ejemplo, el retorno al estado de reposo de un muelle comprimido y después soltado, la mezcla espontánea de dos gases, etc. Los procesos inver-

sos no pueden producirse de por sí ni pueden ser las únicas transformaciones que ocurran en un sistema cerrado (aislado).

Cualquier transformación real no consiste en estados equilibrados sucesivos, en ella tienen lugar inevitablemente fenómenos semejantes a los que hemos enumerado. Por lo tanto, al hacer esta transformación en sentido contrario, nunca conseguiremos hacerla pasando exactamente por los mismos estados. Al comprimir un gas, si se hace con suficiente rapidez, la presión de éste en las capas contiguas al émbolo será más alta. En el proceso inverso — de expansión del gas — la presión junto al émbolo, por el contrario, será más baja.

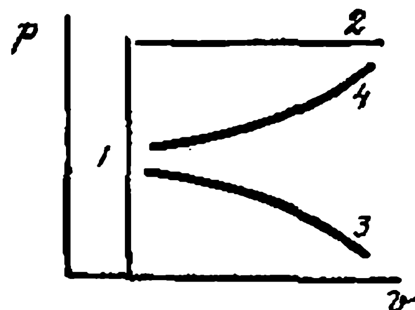


FIG. 75.

A pesar de que las transformaciones reversibles sean idealizadas, su estudio ofrece gran interés, ya que en muchísimos casos la diferencia entre los procesos reales y los reversibles es insignificante. Todo depende del *tiempo de relajación*, es decir, del tiempo durante el cual se establece el equilibrio. Este tiempo varía dentro de unos límites muy amplios, comenzando desde el tiempo de igualación de la presión en un gas homogéneo ($\sim 10^{-10}$ s) hasta tiempos del orden de minutos, horas e incluso semanas cuando se trata de procesos de mezcla de sustancias heterogéneas.

Supongamos que comprimimos un gas y que toda la transformación dura un segundo. El tiempo de relajación es una fracción insignificante de segundo. Por esto tenemos derecho a considerar que este proceso real es una sucesión de estados de equilibrio y, por consiguiente, tenemos derecho también a representarlo por una línea en la gráfica (diagrama) p, v o en cualquier otro dibujo análogo. Esto se refiere también a todas las demás transformaciones en que el tiempo de relajación es pequeño en comparación con el tiempo de medición.

Veamos la forma que tienen las líneas representativas de las transformaciones más simples (fig. 75). Utilizaremos la gráfica (diagrama) de coordenadas presión — volumen. En la termodinámica técnica se emplean también otras coordenadas, pero nosotros no necesitamos detenernos en ellas. La línea vertical *1* representa en esta gráfica una transformación a volumen constante. Si el punto representativo se mueve de abajo hacia arriba, la presión aumenta, en el caso contrario, disminuye. Está claro que en esta transformación se produce una variación, «invisible» en el dibujo, de la temperatura. La línea horizontal *2* es una transformación a presión constante (isobárica). De izquierda a derecha tendremos una

expansión. El movimiento inverso del punto representativo corresponderá a una compresión. La curva señalada con la cifra *3* representa una expansión acompañada de un descenso de la presión. La curva *4* es una expansión, a pesar de que la presión aumenta. La variación de la temperatura en cualquier transformación puede calcularse por medio de la ecuación de estado.

En la mayoría de las transformaciones termodinámicas varían simultáneamente todos los parámetros de estado. No obstante se puede destacar una serie de fenómenos muy simples, pero al mismo tiempo importantes en la práctica. A ellos pertenecen las transformaciones, recién mencionadas, a volumen constante (isócora), a presión constante (isobárica), así como la transformación que se cumple sin intercambio de calor (adiabática) y la que se efectúa a temperatura constante (isotérmica).

§ 59. *Trabajo. Ciclos*

En la mecánica se suele utilizar el trabajo concebido como producto de una fuerza por un espacio. En la termodinámica nos interesa, por lo general, el trabajo de variación del volumen de un cuerpo. La fig. 76 representa los contornos de un cuerpo en dos estados. El volumen del cuerpo varía desde v_1 hasta v_2. El trabajo total de variación del volumen se puede considerar como la suma de los trabajos invertidos en trasladar los elementos de área dS el espacio dl. Si las fuerzas que actúan son perpendiculares a la superficie del cuerpo, el trabajo de traslación de un trozo de superficie será igual a $f\,dl$ o, introduciendo la presión, $p\,dS\,dl$, es decir,

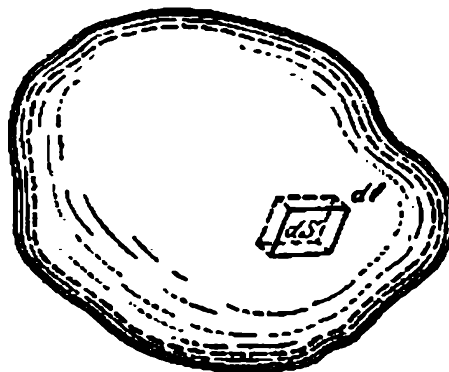


FIG. 76.

$$dA = p\,dv,$$

donde dv es una variación local de volumen. Está claro que el trabajo total vendrá expresado por la integral definida

$$A = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv.$$

En el diagrama p, v el trabajo de compresión o de expansión tiene un sentido simple: está representado por el área limitada por

la curva de la transformación y las dos ordenadas extremas trazadas por los valores inicial y final del volumen.

Si durante una transformación de compresión o de expansión permanece invariable la presión y si, además, es la misma en todos los puntos de la superficie, p se puede sacar del signo de integración y calcular el trabajo por la fórmula

$$A = p(v_2 - v_1).$$

Como ya dijimos, el trabajo se puede considerar positivo o negativo según se convenga. Nosotros admitimos que es positivo el trabajo

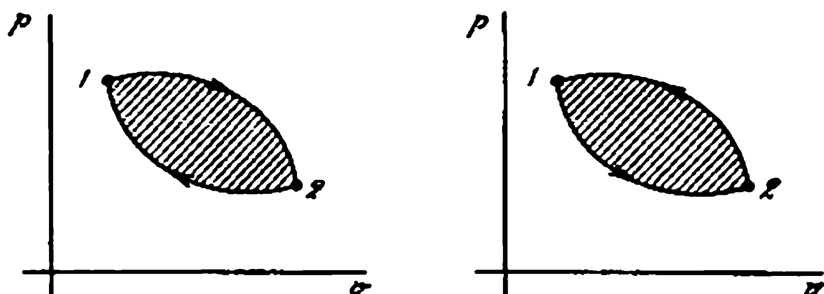


FIG. 77.

que cede el cuerpo al medio exterior, es decir, el trabajo de expansión. Respectivamente, el trabajo de compresión será negativo.

Si como resultado de una transformación cualquiera el cuerpo pasa de un estado *1* a un estado *2* y luego, siguiendo el mismo camino, vuelve al estado inicial, el trabajo total de esta transformación será, como es natural, nulo: el trabajo de expansión cedido a los cuerpos externos será igual al trabajo de compresión que dichos cuerpos ceden después al sistema considerado. Pero las cosas varían por completo cuando el camino «de ida» es distinto del «de vuelta». Las transformaciones en que el cuerpo retorna al estado inicial por un camino distinto se llaman *ciclos*. La fig. 77 representa dos ciclos, en los cuales las flechas indican el sentido de las transformaciones. Una de ellas se efectúa en el sentido de las agujas del reloj y la otra, en el contrario. La transformación que se cumple de izquierda a derecha es de expansión, por lo tanto, en el ciclo que se efectúa en el sentido de las agujas del reloj el trabajo de expansión es mayor que el de compresión. En este caso se cede trabajo al medio exterior. Es evidente que cuando el ciclo se realiza en el sentido contrario el sistema considerado recibe cierta cantidad de trabajo. El trabajo recibido o cedido durante el ciclo viene expresado por el área de éste (rayada en los dibujos).

§ 60. Transformaciones del estado de los gases

Vamos a estudiar las leyes de los cuatro procesos más simples de transformación del estado de los gases, limitándonos en la mayoría de los casos a los gases que satisfacen la ecuación del estado gaseoso. Ahora veremos que conociendo la ecuación de estado de una sustancia se puede, aplicando el primer principio de la termodinámica, deducir una serie de conclusiones valiosas sobre el comportamiento de un cuerpo en condiciones diversas. El primer principio de la termodinámica, para los gases, lo escribiremos de la forma

$$\Delta Q = dU + p\,dv.$$

TRANSFORMACIÓN ISÓCORA. A volumen constante, el primer principio de la termodinámica toma la forma

$$\Delta Q = dU.$$

El sistema considerado mantiene intercambio calorífico con el medio externo, no recibe trabajo ni el medio exterior ni el sistema que se considera. Pueden ocurrir dos fenómenos: 1) el cuerpo recibe calor del medio y su energía interna aumenta; 2) el cuerpo cede calor al medio y su energía interna disminuye.

La cantidad de calor necesaria para aumentar un grado de temperatura del cuerpo sin que varíe su volumen se llama *capacidad calorífica a volumen constante* y se designa por la letra c con el subíndice v:

$$c_v = \left(\frac{dU}{dT}\right)_{v=\text{const}}.$$

Si se conoce la dependencia de la energía interna respecto de la temperatura, la capacidad calorífica c_v puede calcularse.

A altas temperaturas la energía interna de los gases depende linealmente de la temperatura, ya que la capacidad calorífica c_v no depende de la última en este caso.

No tenemos posibilidad de demostrar un teorema importante. De las leyes generales de la termodinámica se deduce que, si p depende de T linelamente, c_v no puede depender del volumen. Como quiera que en los gases que satisfacen las ecuaciones del estado gaseoso y de Van der Waals existe esta dependencia lineal, tratándose de gases, c_v no depende de v y, por lo tanto, la indicación «cuando v=const» puede omitirse en la fórmula anterior:

$$c_v = \frac{dU}{dT} \text{ (para los gases).}$$

Si c_v depende poco de la temperatura, la energía interna de los gases se puede representar por la fórmula

$$U = c_v T + \text{const.}$$

En los gases perfectos la constante no depende del volumen y se puede prescindir de ella. Para un gas que satisfaga la ecuación de Van der Waals, la constante es igual a $-a/v$. De este modo,

$U = c_v T$ si el gas es perfecto y

$U = c_v T - \frac{a}{v}$ si el gas satisface la ecuación de Van der Waals.

En efecto, en el caso de los gases perfectos, la variación del volumen del gas conservando la temperatura no va ligada a una variación de la energía (véase más adelante, pág. 184). Pero si las moléculas se atraen con una fuerza, referida a la unidad de superficie, $p' = a/v^2$, al expandirse el gas aumenta la energía en la cantidad de trabajo invertido en vencer estas fuerzas, es decir, en

$$\int p'\, dv = -\frac{a}{v} + \text{const.}$$

TRANSFORMACIÓN ISOBÁRICA. En esta transformación los tres sumandos que figuran en el primer principio son distintos de cero. El sistema intercambia con el medio calor y trabajo sin que la presión en él varíe. La variante más frecuente de esta transformación consiste en que el cuerpo recibe calor del medio, pero no lo invierte por completo en aumentar su energía interna, sino que parcialmente lo devuelve al medio en forma de trabajo mecánico. En otras posibles variantes no nos detendremos.

Es evidente que la capacidad calorífica en esta transformación debe diferir de la que hemos estudiado en la transformación isócora. En la transformación isobárica el calor suministrado se invierte no sólo en calentar, por esto la capacidad calorífica c_p (así designaremos la *capacidad calorífica a presión constante*) deberá ser mayor que c_v. En algunos casos se puede valuar esta diferencia.

Dividamos la expresión del primer principio por el incremento de la temperatura:

$$c = \frac{\Delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + p\frac{dv}{dT}.$$

Esta es la expresión de la capacidad calorífica correcta para cualquier transformación, incluida la isobárica que ahora nos interesa. Para los gases esta fórmula se escribe así:

$$c_p = c_v + p\frac{dv}{dT}.$$

Para un gas perfecto se obtiene un resultado muy simple. Como $pv=\mu RT$, se tiene que $\frac{dv}{dT}=\frac{\mu R}{p}$ y $c_p=c_v+\mu R$. De esta forma, la diferencia entre las capacidades caloríficas, a presión constante y a volumen constante, es igual al producto del número de moles de gas por la constante universal de los gases. En este caso, para las capacidades caloríficas molares (calores moleculares):

$$c_p-c_v=R.$$

Teniendo en cuenta que $R\approx 2$ cal/(mol·°K)=8,31 J/(mol·°K),

$$c_p-c_v=2\ \text{cal/(mol}\cdot{}^\circ\text{K)}.$$

TRANSFORMACIÓN ISOTÉRMICA. En primer lugar es necesario subrayar, para evitar confusiones, que invariación de la temparatura no significa en modo alguno la ausencia de intercambio calorífico entre el sistema y el medio. El sistema puede recibir calor del medio, pero no invertirlo en elevar su temperatura. Como sabemos muy bien, la energía interna de un cuerpo puede aumentar permaneciendo invariable la temperatura (recuérdese la fusión del hielo). Además existe otra posibilidad (más importante que la primera) para las transformaciones en los gases: al recibir calor del medio exterior, el sistema puede volvérselo a ceder a dicho medio, pero en forma de trabajo mecánico.

En el caso de gases reales ambos modos de gastar el calor en la transformación isotérmica son totalmente posibles: al recibir el calor, el gas se expande sin calentarse y, primero, cede trabajo al medio exterior y, segundo, emplea calor en variar la energía potencial de interacción de las moléculas.

En el caso de los gases perfectos, en los cuales la energía interna depende únicamente de la temperatura y, por consiguiente, no puede variar en la transformación isotérmica, el primer principio toma una forma extraordinariamente sencilla. Como $dU=0$, se tiene que $\Delta Q=\Delta A$. Por lo tanto, o el sistema se expande recibiendo calor del medio exterior y cediéndole trabajo o, al contrario, el sistema se comprime cediendo calor al medio y recibiendo de los cuerpos externos energía en forma de trabajo mecánico. En la transformación isotérmica el gas perfecto es un transformador de energía: la recibe del medio en una forma y la devuelve a él totalmente, pero en otra forma.

En el caso de un gas perfecto no es difícil pasar de la forma diferencial $\Delta Q=p\,dv$ a la integral. El trabajo (o el calor, esto es indiferente, puesto que son iguales) de expansión isotérmica desde

el volumen v_1 hasta el volumen v_2 será

$$A = \int_{v_1}^{v_2} p\, dv;$$

poniendo aquí el valor de la presión de la ecuación del estado gaseoso y sacando la temperatura, como magnitud constante, del signo de integración, se obtiene:

$$A = \mu RT \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = \mu RT \ln \frac{v_2}{v_1}.$$

Advertimos que las expansiones isotérmicas en un mismo número de veces pero a distintas temperaturas exigen un trabajo diferente, tanto mayor, cuánto más elevada sea la temperatura. Por ejemplo, la duplicación del volumen de un mol de cualquier gas perfecto a la temperatura de 300°K (ambiente) requiere un trabajo de $8{,}31 \cdot 300 \cdot \ln 2 = 1730$ J, mientras que a la temperatura de 3000°K lo requiere diez veces mayor, es decir, de 17 300 J.

La realización práctica de una transformación isotérmica puede ser difícil. En todo caso, para que la transformación sea por lo menos aproximadamente isotérmica, es necesario que las paredes del recipiente, a través de las cuales la sustancia está en contacto con el medio, sean perfectamente conductoras del calor y que la transformación se cumpla muy despacio, para que el calor (o el trabajo) tenga tiempo de retornar al medio en forma de trabajo (o de calor) sin detenerse en el sistema.

TRANSFORMACIÓN ADIABÁTICA. En ausencia de intercambio calorífico con el medio, lo que se puede conseguir imponiendo unas condiciones en cierto modo inversas en comparación con las de la transformación isotérmica (perfecto aislamiento térmico y desarrollo rápido de la transformación, para que el calor no tenga tiempo de pasar del sistema al medio y viceversa), se producen los fenómenos de compresión o expansión adiabática. En el primer caso, de acuerdo con el primer principio de la termodinámica, que ahora escribiremos de la forma

$$p\, dv = -dU,$$

el trabajo mecánico se transforma en energía interna del cuerpo; en el segundo caso, al contrario, el trabajo se realiza a costa de una disminución de la energía interna del sistema que se considera.

En las tres transformaciones que hemos estudiado hasta ahora la marcha de las variaciones de la presión, el volumen y la temperatura era bastante evidente, y para los gases se deducía inmediatamente de la ecuación de estado. En la transformación adiabá-

tica el carácter de la variación de los parámetros de estado no es evidente, ya que cambian los tres. La resolución conjunta de dos ecuaciones — la ecuación de estado de los gases y la del primer principio de la termodinámica — permite establecer estas dependencias. Como a nosotros nos interesa la parte esencial del problema, nos limitaremos al caso de un gas perfecto, para que los cálculos matemáticos resulten más fáciles. Aplicando la expresión de la capacidad calorífica de los gases a volumen constante $\frac{dU}{dT} = c_v$ y sustituyendo la presión p por $\frac{\mu RT}{v}$, obtenemos $-\frac{\mu R}{c_v}\frac{dv}{v} = \frac{dT}{T}$. Supongamos que en el estado inicial los parámetros del gas eran v_1, p_1, T_1, y en el final, v_2, p_2, T_2. Integrando la última ecuación desde el punto inicial hasta el punto final de la transformación adiabática, obtenemos

$$-\frac{\mu R}{c_v}\int_1^2 \frac{dv}{v} = \int_1^2 \frac{dT}{T}; \quad -\frac{\mu R}{c_v}\ln\frac{v_2}{v_1} = \ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Y recordando que $c_p - c_v = \mu R$ y haciendo $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$, obtenemos

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma-1}.$$

De esta ecuación se deduce que en la compresión adiabática aumenta la temperatura, y en la expansión, disminuye. Esta circunstancia se aprovecha con frecuencia en la práctica. La expansión rápida de los gases se emplea cuando se quiere enfriarlos. Sabemos, por ejemplo, que el anhídrido carbónico que se deja salir de una botella puede, al expandirse, transformarse en hielo seco, esto demuestra que el descenso de la temperatura es muy intenso. Por el contrario, la compresión adiabática se puede utilizar, por ejemplo, para inflamar una sustancia cualquiera. Es corriente el experimento demostrativo en que un trozo de algodón empapado en éter se coloca en un cilindro en el que hay aire. El aire se puede comprimir con un émbolo. Cuando el émbolo se mueve rápidamente, el algodón se inflama.

Como convinimos representar las transformaciones en el diagrama p, v, conviene transformar la ecuación que hemos escrito del proceso adiabático sustituyendo la temperatura por medio de la ecuación del estado gaseoso. En este caso obtenemos:

$$p_1 v_1^\gamma = p_2 v_2^\gamma.$$

Comparando esta ecuación con la ley de Boyle — Mariotte, que se cumple en la transformación isotérmica, vemos una diferencia

esencial en el carácter que tiene la variación de la presión en la compresión y en la expansión. En la expansión o compresión isotérmica permanece invariable el producto pv, mientras que en la transformación adiabática se conserva el producto pv^{γ}. Como $\gamma > 1$, la curva representativa de la transformación adiabática en el diagrama (es decir, la *adiabática*) es más pendiente que la isotérmica. Si el volumen se reduce a la mitad en una transformación isotérmica, la presión aumenta al doble; en la transformación adiabática la presión varía más bruscamente. Por ejemplo, para la mayoría de los gases diatómicos, en los cuales $\gamma = 1,4$, cuando el volumen se reduce a la mitad la presión aumenta 2,63 veces.

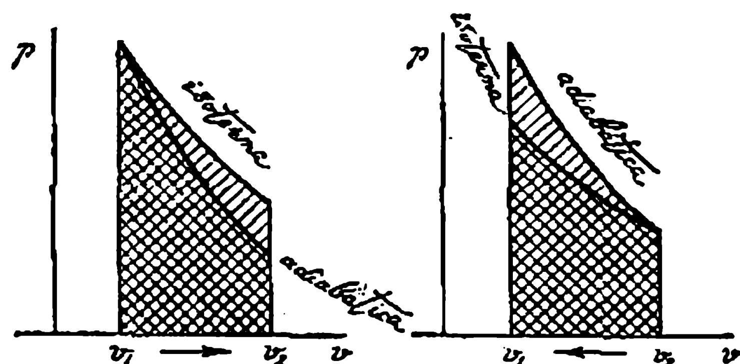


FIG. 78.

Ya hemos subrayado que ambas transformaciones tienen carácter ideal y que para crear las condiciones ideales necesarias para ellas las exigencias son opuestas. Por esto está claro que las transformaciones con gases que se efectúan en condiciones reales dan curvas intermedias entre la adiabática y la isotérmica.

No es difícil dar una explicación clara a la diferencia de marcha de la adiabática y la isoterma. En la compresión adiabática el gas se calienta; por esto, si la reducción del volumen es la misma, la presión aumenta más en la transformación adiabática, ya que el calentamiento a volumen constante conduce a un aumento de la temperatura.

Como puede verse en la fig. 78, el trabajo de expansión isotérmica es mayor que el de expansión adiabática. Y al contrario, el trabajo de compresión isotérmica es menor que el de compresión adiabática. Esto, como es natural, se refiere a aquellos casos en que los puntos iniciales de las transformaciones coinciden.

El trabajo de una transformación adiabática se puede calcular gráficamente y por las fórmulas. En primer lugar, del primer principio de la termodinámica para las transformaciones adiabáticas se deduce, que el trabajo debe ser igual a la variación de la energía

interna:

$$A = \int_1^2 p\,dv = U_1 - U_2.$$

En el caso de los gases perfectos la diferencia de energías se calcula de una forma elemental: $U_1 - U_2 = c_v\,(T_1 - T_2)$. Por lo tanto, cuando se trata de gases perfectos el trabajo también se puede calcular por esta fórmula.

A la definición del trabajo en la transformación adiabática se puede llegar también por otro camino. Como en cualquier punto intermedio de la transformación se cumple la igualdad $p_1 v_1^\gamma = pv^\gamma$, donde sin subíndices se representan los valores variables de la presión y el volumen, la integral del trabajo se puede escribir de la forma

$$A = p_1 v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^\gamma},$$

lo que, después de integrar desde el punto inicial hasta el punto final de la transformación, da

$$A = \frac{p_1 v_1^\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{1}{v_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{v_2^{\gamma-1}}\right).$$

Se comprende que esta fórmula coincide completamente con la $A = c_v\,(T_1 - T_2)$, lo que se puede demostrar fácilmente aplicando la ecuación de estado del gas perfecto y transformando la fórmula obtenida $\left(\text{sacando fuera de paréntesis } \frac{1}{v_1^{\gamma-1}}\right)$ de manera que

$$A = \frac{\mu R T_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma-1}\right].$$

En dependencia de los datos que se posean, una u otra fórmula puede resultar la más cómoda en la práctica.

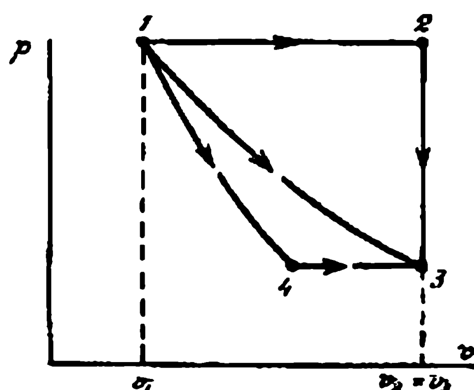


FIG. 79.

Pondremos un ejemplo ilustrativo de la afirmación, hecha en el cap. 9, de que los incrementos $\Delta Q - \Delta A$ no son diferenciales totales, es decir, no caracterizan la variación del estado de un sistema.

Supongamos que el estado *1* de un mol de hidrógeno (fig. 79) se caracteriza por los datos siguientes: $v_1 = 0{,}02$ m³, $T_1 = 300$°K, $p_1 = \frac{RT_1}{v_1} = 125\,000$ J/m³ (aquí

$R=8{,}31$ J/°K), $c_p - c_v = R$, y como el hidrógeno es un gas diatómico, $c_p/c_v = 1{,}4$. Entonces $c_p=29{,}4$ J/°K y $c_v=21$ J/K. Consideremos tres caminos posibles de paso del gas al estado *3*: $v_3=0{,}04$ m³, $T_3=300$°K, $p_3=63\,000$ J/m³.

Camino *1—3*. El trabajo por la isoterma $A_{1-3}=RT_1 \ln \frac{v_3}{v_1}=1700$ J. Estos 1700 J se han tomado del foco caliente, y la energía interna U=const, puesto que $T_1=T_3$.

Camino *1—2—3*. Aquí *1—2* es una isobara. Por consiguiente, $T_2=600$°K. Del foco caliente se toman $Q_{1-2}=c_p\,(T_2-T_1)=8600$ J, y el trabajo en vencer las fuerzas externas $A_{1-2}=p_1\,(v_2-v_1)=2300$ J. Por lo tanto, la energía interna del gas aumentó en $\Delta U=8600-2300=6300$ J. *2—3* es un enfriamiento isócoro, al foco frío se ceden $Q_{2-3}=c_v\,(T_2-T_3)=6300$ J. Y como $v_2=v_3$, no se realiza trabajo mecánico.

Así pues, en el camino *1—2—3* el foco caliente perdió 8600 J, se realizó un trabajo de 2300 J y el foco frío recibió 6300 J. En el camino *1—3* el foco caliente perdió 1700 J y se realizó un trabajo de 1700 J, el estado del foco frío no cambió. La variación del estado del gas fue igual en ambos casos.

Camino *1—4—3*. Aquí *1—4* es una adiabática y *4—3* es una isobara; $\frac{v_4}{v_1}=\left(\frac{p_1}{p_4}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=2^{\frac{1}{\gamma}}$, $v_4=0{,}020\cdot 2^{\frac{1}{\gamma}}$ m³. La temperatura T_4 la hallamos partiendo de la correlación $\frac{T_4}{T_1}=\left(\frac{v_1}{v_4}\right)^{\gamma-1}$, $T_4=300\cdot 2^{\frac{1}{\gamma}-1}$. En el camino *1—4* el trabajo en vencer las fuerzas externas se realiza únicamente a expensas de la disminución de la energía interna:

$$A_{1-4}=-c_v\,(T_4-T_1)=6300\left(1-2^{\frac{1}{\gamma}-1}\right)\text{ J.}$$

En el camino *4—3* el foco caliente cede $Q_{4-3}=c_p(T_3-T_4)=8600\left(1-2^{\frac{1}{\gamma}-1}\right)$ J de calor y el trabajo realizado en vencer las fuerzas externas será

$$A_{4-3}=p\,(v_3-v_4)=2300\left(1-2^{\frac{1}{\gamma}-1}\right)\text{ J.}$$

Por consiguiente, en el camino *4—3* la energía interna aumentó precisamente en $6300\left(1-2^{\frac{1}{\gamma}-1}\right)$ J. De este modo, el camino *1—4—3* tampoco condujo a una variación de la energía interna del gas determinada uniformemente por la temperatura.

MEDIDA DE LA CAPACIDAD CALORIFICA DE LOS GASES. Al parecer, lo más fácil sería determinar la capacidad calorífica del gas llenando con él un recipiente y colocando este último en un calorímetro. Pero al hacer la medición por este procedimiento no tendríamos en cuenta que la capacidad calorífica del gas es extraordinariamente pequeña comparada con la del recipiente, cualquiera que sea el material sólido de que esté hecho. Por esto la capacidad calorífica de un gas a volumen constante no se mide. Lo que se mide es la capacidad calorífica a presión constante. Para este fin se hace pasar por el calorímetro un serpentín, en el que circula el gas

a presión constante. Con un elemento termoeléctrico se mide la temperatura del gas a la entrada del calorímetro y a la salida de él. El gas, que entra en el calorímetro después de haber sido calentado previamente, cede parte de su calor al agua. Conociendo la cantidad de gas que pasa por el recipiente en un tiempo determinado y la cantidad de calor absorbida por el agua del calorímetro en este mismo plazo, hallamos sin dificultad la capacidad calorífica del gas a la presión constante c_p, dividiendo esta cantidad de calor por la masa de gas que ha pasado y por la diferencia entre las temperaturas del gas a la entrada y a la salida.

Para determinar la capacidad calorífica a volumen constante se utiliza la relación entre las capacidades caloríficas — coeficiente de Poissón $\gamma=\frac{c_p}{c_v}$. Para hallar γ se han propuestos muchos procedimientos, parte de los cuales se basan en medir los volúmenes y presiones del gas en los estados sucesivos por que pasa durante una transformación adiabática. También se pueden utilizar otras ecuaciones que ligan las capacidades caloríficas, por ejemplo, la relación que determina la diferencia entre c_p y c_v.

En la tabla siguiente se dan las capacidades caloríficas de algunos gases.

Gas	c_v, J/(mol·°K)	c_p J/(mol·°K)	γ
Helio, He	12,5	20,9	1,67
Hidrógeno, H_2	20,4	28,8	1,41
Nitrógeno, N_2	20,39	28,6	1,41
Oxígeno, O_2	20,9	28,9	1,40
Vapor de agua, H_2O . .	27,8	36,2	1,31
Metano, CH_4	27,3	35,6	1,30
Alcohol etílico, C_2H_6O	79,4	87,7	1,11

§ 61. Efecto Joule-Thomson

Se llama así el paso de un gas, a través de un orificio, de una región de presión mayor p_1 a una región de presión menor p_2. El recipiente en que tiene lugar el proceso está térmicamente aislado del medio circundante.

Por las condiciones del proceso, las presiones p_1 y p_2 deben mantenerse invariables. Para conseguir esto, los dos émbolos (fig. 80) deben moverse hacia la derecha a medida que pasa el gas.

La masa de gas M que pasa de izquierda a derecha no conserva su volumen, sino que éste varía de v_1 a v_2, puesto que pasa a una

región en la que hay otra presión. El paso se produce por la acción del émbolo izquierdo y existiendo la reacción del derecho. El émbolo izquierdo realiza trabajo a la presión constante p_1; este trabajo es igual a $p_1 \Delta v$, donde Δv es la variación de volumen que experimenta el gas a la izquierda del tabique de separación. Pero el volumen a la izquierda varía precisamente en v_1, por lo tanto, el trabajo del émbolo izquierdo será igual a $p_1 v_1$. El émbolo derecho realiza un trabajo negativo, que también es igual al producto de la presión p_2 por el incremento del volumen, que aquí es igual a v_2. Así, pues, al pasar la masa M de gas de izquierda a derecha se realiza el tra-

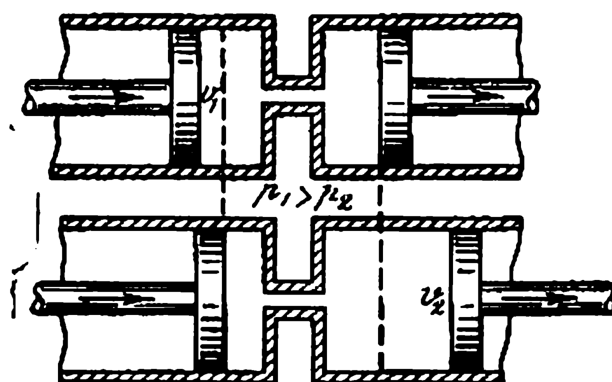


FIG. 80.

bajo $p_1 v_1 - p_2 v_2$. La ley de conservación de la energía impone que en esta misma cantidad varíe la energía interna del gas. Por consiguiente,

$$U_2 - U_1 = p_1 v_1 - p_2 v_2,$$

fórmula que es correcta para cualquier masa de gas. Esto significa que en el proceso de paso del gas de un cilindro a otro, la magnitud

$$U + pv = \text{const}$$

(que se llama *función térmica* o *entalpía*) permanece constante.

En un gas perfecto tanto U como pv dependen únicamente de la temperatura. Por lo tanto, en la transformación de Joule — Thomson la temperatura del gas perfecto permanece invariable.

En los gases reales las cosas ocurren de otro modo. Si el gas no se puede considerar perfecto, en la transformación de Joule — Thomson puede calentarse o enfriarse, en dependencia del carácter que tengan las fuerzas de interacción de sus moléculas.

Es notable el hecho de que, a temperaturas distintas, un mismo gas se puede comportar de modos diferentes. A alta temperatura los gases se calientan durante la transformación de Joule — Thomson, a baja, se enfrían. Para los gases más usuales se conocen los *puntos*

de inversión, es decir, las temperaturas a las cuales el efecto cambia de signo. La temperatura de inversión del oxígeno y del nitrógeno se encuentra más alta que la temperatura ambiente. Por esto en la transformación de Joule — Thomson se observa que el aire se enfría tanto a la temperatura ambiente como, tanto más, a temperaturas bajas. La temperatura de inversión del hidrógeno se encuentra a temperaturas bastante bajas. El efecto Joule — Thomson a temperaturas más bajas que la de inversión se utiliza en la técnica de licuefacción de los gases.

11

ENTROPÍA

§ 62. Principio de la existencia de la entropía

A mediados del siglo pasado se hizo un descubrimiento importante referente a las transformaciones termodinámicas reversibles. Resultó que, además de la energía interna, el cuerpo posee una notable función de estado, la entropía. Lo mismo que la energía interna, la entropía se determina salvo una constante arbitraria. La experiencia proporciona el valor de la diferencia del incremento de la entropía. Si un cuerpo o sistema al efectuar una transición infinitesimal de un estado a otro, a la temperatura T, recibe el calor ΔQ, la relación $\Delta Q/T$ es la diferencial total de cierta función S. Esta función es la *entropía*, que viene determinada por una de las dos igualdades equivalentes que siguen:

$$dS=\frac{\Delta Q}{T}, \qquad S_2-S_1=\int_1^2\frac{\Delta Q}{T}.$$

La afirmación de que existe una función cuya diferencial es $\Delta Q/T$ recibe el nombre de *principio de la existencia de la entropía* y es una de las leyes más importantes de la naturaleza. Este principio constituye una parte importante del segundo principio de la termodinámica, del que trataremos más adelante. El descubrimiento de este principio, como el de todo el segundo principio de la termodinámica está ligado ante todo con los nombres de Carnot y Clausius. La esencia de este principio, a pesar de su carácter hasta cierto punto abstracto, es fácil de comprender: el paso de un cuerpo de un estado a otro puede efectuarse por cantidad innumerable de

procedimientos (distintas curvas que en la gráfica empiezan y terminan en los mismos puntos); en estas transiciones el cuerpo puede recibir las cantidades de calor más diversas, pero en todos los casos la integral $\int_1^2 \frac{\Delta Q}{T}$ tendrá los mismos valores. La razón de la cantidad de calor a la temperatura con que este calor fue recibido, $\Delta Q/T$, se llama a veces *calor reducido*. Como una integral siempre se puede representar aproximadamente como una suma, la variación de la entropía al pasar de un estado a otro es igual a la suma de los calores reducidos. Supongamos que un cuerpo, calentado uniformemente desde 20 hasta 25°C, recibe, al elevarse su temperatura, un julio de calor por cada grado. En este caso el incremento de la entropía será aproximadamente igual a

$$S_1-S_2 \approx \frac{1\,\mathrm{J}}{293{,}5°\,\mathrm{K}}+\frac{1\,\mathrm{J}}{294{,}5°\,\mathrm{K}}+\frac{1\,\mathrm{J}}{295{,}5°\,\mathrm{K}}+\frac{1\,\mathrm{J}}{296{,}5°\,\mathrm{K}}+\frac{1\,\mathrm{J}}{297{,}5°\,\mathrm{K}}.$$

Las variaciones de la entropía más fáciles de expresar son las que ocurren en las transformaciones isotérmicas:

$$S_2-S_1=\frac{Q}{T},$$

donde Q es el calor recibido durante la transformación. Así, por ejemplo, al fundirse 1 kg de hielo la entropía de la sustancia aumenta en

$$\frac{33{,}6\cdot 10^4\,\mathrm{J}}{273°\,\mathrm{K}}=1230\ \mathrm{J}/°\mathrm{K}.$$

Como cero de entropía se puede tomar el valor de la entropía de cualquier estado (agua en ebullición, hielo fundente). Pero en ciertos casos se toma como cero el valor de la entropía de la sustancia a la temperatura de cero absoluto. Para esto, por otra parte, existen ciertos fundamentos teóricos (teorema de Nernst) en los cuales no nos detendremos.

Tomando $S=0$ cuando $T=0$, la entropía de una sustancia a la temperatura T se puede hallar por la fórmula

$$S=\int_0^T \frac{c_p\,dT}{T},$$

si se calienta a presión constante. Como puede verse, para conocer la entropía hay que estudiar cómo varía la capacidad calorífica con la temperatura.

Si se conoce la ecuación del estado de la sustancia, la entropía (salvo una constante arbitraria) se puede calcular con bastante faci-

lidad. Por definición $dS=\frac{\Delta Q}{T}$. Sustituyendo ΔQ por el valor que para él da el primer principio de la termodinámica, obtenemos

$$dS=c_v\frac{dT}{T}+p\frac{dv}{T}.$$

Valiéndonos de la ecuación del estado gaseoso, eliminamos de aquí la presión. Obtenemos entonces que $dS=c_v\frac{dT}{T}+\mu R\frac{dv}{v}$. Si tomamos ahora la integral indefinida, obtenemos la expresión de la entropía salvo una constante arbitraria

$$S=c_v \ln T+\mu R \ln v+\text{const}.$$

Se puede tomar también la integral definida de dS cuyos límites sean dos estados. Entonces se obtiene la expresión de la diferencia de las entropías de los dos estados

$$S_2-S_1=c_v \ln\frac{T_2}{T_1}+\mu R \ln\frac{v_2}{v_1}.$$

Esta es la expresión de la entropía de los gases perfectos. De ella se deduce que la entropía aumenta al elevarse la temperatura y al crecer el volumen del gas. Esto, como es natural, coincide totalmente con la afirmación general acerca de que la entropía aumenta cuando al cuerpo se le suministra calor.

Ejemplo. Demostremos que la entropía es realmente función del estado del sistema. Recurrimos al ejemplo de la pág. 181 (fig. 79).

Camino *1—2—3*. La variación de la entropía

$$S_2-S_1=c_v \ln\frac{T_2}{T_1}+R \ln\frac{v_2}{v_1}=20{,}74 \ln 2+8{,}38 \ln 2=29{,}36 \ln 2 \text{ J/(mol}\cdot{}^\circ\text{K)}.$$

La variación de la entropía

$$S_3-S_2=20{,}74 \ln\frac{1}{2}=-20{,}74 \ln 2 \text{ J/(mol}\cdot{}^\circ\text{K)}.$$

La variación total de la entropía en el camino *1—2—3*

$$S_3-S_1=8{,}38 \ln 2 \text{ J/(mol}\cdot{}^\circ\text{K)}.$$

Camino *1—3*. $S_3-S_1=8{,}38 \ln 2$ J/(mol·°K).
Camino *1—4—3*. Como *1—4* es la adiabática, $S_4-S_1=0$.

$$S_3-S_4=c_v \ln\frac{T_3}{T_4}+8{,}38 \ln\frac{v_3}{v_4}=20{,}74 \ln 2^{1-\frac{5}{7}}+8{,}38 \ln 2^{1-\frac{5}{7}}=$$
$$=29{,}36 \ln 2 \text{ J/(mol}\cdot{}^\circ\text{K)}.$$

Puede verse que, en efecto, cualquiera que sea el camino seguido en la transición del gas del estado *1* al estado *3*, la variación de la entropía es la misma.

§ 63. *Principio del aumento de la entropía*

Como ya se dijo, transformaciones reversibles no existen, aunque con la exactitud alcanzable por la experiencia se pueden realizar multitud de transformaciones que prácticamente no difieren de las reversibles. No obstante, existen ejemplos de transformaciones que siempre son unilaterales, por cuya razón no pueden invertirse de manera alguna. Así, por ejemplo, un gas puede expandirse de por sí, pero no puede comprimirse si no se le aplican fuerzas exteriores. El calor puede espontáneamente pasar de un cuerpo caliente a otro frío, pero sólo a costa de trabajo (energía eléctrica, por ejemplo) puede pasar del cuerpo frío al más caliente. Cuando existe rozamiento, la energía cinética de un movimiento macroscópico se transforma siempre en energía interna, pero la transformación inversa nunca se produce espontáneamente. La irreversibilidad de todas las demás transformaciones se debe, en fin de cuentas, a que en cada una de ellas existe, en mayor o menor grado, alguna de las transformaciones unilaterales que hemos mencionado. En las transformaciones reales es imposible evitar las expansiones espontáneas, el rozamiento y la difusión de calor.

¿Existe algún indicio común a todas las transformaciones unilaterales antedichas? Sí, este indicio consiste en que en todas las transformaciones unilaterales aumenta la entropía.

En el caso del intercambio calorífico entre dos cuerpos, la variación total (de todo el sistema) de la entropía es igual a

$$S_2-S_1=\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2},$$

donde Q_1 es el calor recibido por el cuerpo más frío y Q_2, el calor perdido por el cuerpo más caliente.

Si T_2 es mayor que T_1, se tiene que $Q_1=-Q_2>0$, puesto que consideramos positivo el calor que se le transmite al cuerpo. Por lo tanto,

$$S_2-S_1=Q_1\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)>0,$$

es decir, cuando existe intercambio de calor, la entropía total del sistema en que ocurre dicho intercambio aumenta.

Otro caso. Dentro de un recipiente que contiene gas tiene lugar un intenso movimiento mecánico (por ejemplo, gira una rueda). El volumen no cambia, la temperatura aumenta, por lo tanto la entropía variará, $S_2-S_1=c_v\ln\frac{T_2}{T_1}$, es decir, aumentará.

Finalmente, cuando la expansión se produce en el vacío a temperatura constante, el incremento de la entropía $S_2-S_1=\mu R\ln\frac{v_2}{v_1}$,

es también positivo. Así, pues, en todas las transformaciones unilaterales aumenta la entropía del sistema.

No es difícil comprender la importancia que tiene esta conclusión para todas las transformaciones irreversibles. Como cada transformación va acompañada de efectos unilaterales que se desarrollan con aumento de la entropía, el incremento de ésta en una transformación irreversible será mayor que el que se producirá si la transición fuera reversible. Sea ΔQ el calor recibido por el cuerpo a la temperatura T en la transformación irreversible que nos interesa. Si la transformación fuera reversible, el incremento de la entropía sería igual a $\Delta Q/T$; en el proceso real dicho incremento será mayor que esta cantidad

$$dS > \frac{\Delta Q}{T}.$$

Si el sistema está aislado térmicamente, $\Delta Q=0$ y la afirmación anterior toma la forma

$$dS > 0,$$

es decir, en un sistema térmicamente aislado únicamente son posibles las transformaciones que se desarrollan con aumento de la entropía.

Se comprende perfectamente que la entropía, junto con la energía interna, son funciones importantísimas que definen la transformación termodinámica. Puede decirse que la entropía es el director de la transformación y que la energía interna es su contable: la entropía determina la dirección en que debe transcurrir la transformación, y la energía «paga los gastos» que ocasiona el realizarla.

Si en las fórmulas anteriores se sustituye el signo $>$ por el $\geqslant$, la ley de la entropia, tanto para las transformaciones reversibles como para las irreversibles, se expresa por medio de la fórmula abreviada

$$dS \geqslant \frac{\Delta Q}{T}.$$

Esta fórmula refleja el contenido del *segundo principio de la termodinámica*. Referido a los sistemas cerrados (aislados), el segundo principio dice: la entropía de un sistema térmicamente aislado aumenta o permanece invariable.

Conviene unificar ambos principios de la termodinámica en una sola fórmula

$$dS \geqslant \frac{dU + p\,dv}{T},$$

que resulta cómoda para resolver todos los problemas prácticos de la termodinámica.

El principio del aumento de la entropía se refiere a los sistemas aislados. Pero si el sistema está en contacto con el medio, es decir, si se trata de un sistema abierto, su entropía puede disminuir.

A continuación se demostrará que los procesos de ordenación molecular van ligados a una disminución de la entropía. Un organismo vivo construye, con el sistema desordenado de moléculas pequeñas que recibe durante los procesos de alimentación y respiración, estructuras altamente organizadas, las macromoléculas biológicas (pág. 696). Al ocurrir esto disminuye la entropía del organismo.

Si nos figuramos un sistema cerrado formado por el organismo + el medio, cuya entropía debe aumentar, está claro que la entropía del medio tiene que aumentar de manera que supere la disminución de la entropía del organismo.

El aumento de la entropía del medio se lleva a cabo a expensas de las secreciones del organismo.

Si el proceso es estacionario,

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_{org} = -\left(\frac{dS}{dt}\right)_{med}.$$

Puede decirse que la actividad vital del organismo consiste en hacer pasar por él un flujo de entropía sustancial. En este caso la entropía de la sustancia que entra en el organismo es menor que la entropía de que éste entrega al medio, es decir, el organismo degrada los alimentos.

Ejemplos. 1. En el ejemplo de la pág. 71 consideramos el choque inelástico de una bala con un péndulo balístico y dedujimos que durante el choque desaparece en el sistema bala — péndulo, una energía mecánica de 3920 J. Esto significa que $\Delta Q=3920$ J fueron cedidos al péndulo por la bala de un modo irreversible por medio de la conductibilidad térmica. Suponiendo que esta transformación fue isotérmica (es decir, que la conductibilidad térmica del péndulo es extraordinariamente grande) y que la temperatura del sistema era, por ejemplo, de 27°C, la entropía del sistema debió aumentar en esta transformación en

$$\Delta S=\frac{\Delta Q}{T}=13{,}1\ \text{J/°K}.$$

2. Una pelota de goma de 0,3 kg de masa, después de caer desde 2 m de altura, bota y sube hasta 1 m del suelo. En esta transformación isotérmica (sea $t=27°$C) se ceden irreversiblemente $\Delta Q=2{,}96$ J, es decir, la entropía del sistema pelota-suelo aumenta en

$$\Delta S=12{,}87\cdot 10^{-3}\ \text{J/°K}.$$

Si la pelota y el suelo fueran perfectamente elásticos, la entropía no variaría ($\Delta S=0$) y continuaría botando eternamente.

3. Consideremos el proceso irreversible de transmisión del calor de una caldera de vapor a un condensador. Supongamos que la caldera de vapor se halla a la temperatura $t_1=300$°C y el condensador, a $t_2=30$°C. Si la potencia térmica de la caldera es de 10 000 kW y su rendimiento es de un 25%, cada segundo pasarán

de la caldera al condensador $7,5\cdot 10^6$ J. Para la caldera, como pierde calor, este ΔQ será negativo, es decir, su entropía disminuye, en el condensador, por el contrario, la entropía aumenta. Pero como $T_1 > T_2$, la entropía del sistema caldera — condensador aumenta cada segundo en

$$\Delta S = \Delta Q \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) = 11,8\cdot 10^3 \ \mathrm{J/^\circ K}.$$

§ 64. Principio del funcionamiento de una máquina térmica

La máquina térmica transforma el calor en trabajo, es decir, recibe calor de unos cuerpos y lo transmite a otros en forma de trabajo mecánico. Para efectuar esta transformación hay que disponer de dos cuerpos a temperaturas diferentes entre los cuales sea posible el intercambio calorífico. Para simplicar llamaremos al cuerpo más caliente, foco caliente y al más frío, foco frío. Existiendo estos dos cuerpos, el proceso de transformación del calor en trabajo se lleva a cabo del modo siguiente: un cuerpo capaz de expandirse (sustancia activa o agente de transformación) se pone en contacto con el foco caliente. El calor Q_1 se toma de dicho foco y se gasta en el trabajo de expansión A_1 que se cede a los cuerpos circundantes. Después el agente de transformación se pone en contacto con el foco frío, al cual le cede el calor Q_2 a expensas del trabajo A_2 que las fuerzas externas realizan sobre el agente.

Para obtener una máquina térmica que funcione continuamente es necesario que el tiempo de compresión termine en el punto en que comienza el tiempo de expansión; el proceso debe ser cíclico. El agente de transformación después de realizar cada ciclo retorna al estado inicial. La ley de conservación de la energía impone en este caso que la energía recibida de los cuerpos circundantes sea igual a la energía cedida a dichos cuerpos. Del medio se recibe: el calor Q_1 durante la expansión y el trabajo A_2 durante la compresión del agente de transformación. Al medio se le cede: el trabajo A_1 durante la expansión del agente y el calor Q_2 durante su compresión. Por consiguiente, $Q_1+A_2=Q_2+A_1$ o $A_1 - A_2=Q_1 - Q_2$. Si el ciclo se cumple en el sentido de las agujas del reloj, el trabajo de compresión es menor que el de expansión. Por esto, la última igualdad expresa el hecho de que el trabajo neto, que el agente de transformación cede al medio exterior, es igual a la diferencia entre el calor recibido del foco caliente y el cedido al foco frío. Respectivamente, el rendimiento o eficiencia del ciclo, y, por lo tanto, de toda la máquina será $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$.

El proceso de funcionamiento de la máquina térmica que acabamos de describir es, naturalmente, un esquema abstracto. No

obstante, los rasgos más esenciales de cada motor térmico se reflejan en este esquema. El agente de transformación es el gas o vapor que se expande y comprime, y el papel de foco frío lo desempeña el medio circundante. De foco caliente sirve una caldera de vapor o, en los motores de combustión interna, la mezcla combustible.

Estos tres sistemas son necesarios también para el funcionamiento de una máquina frigorífica, en la cual el ciclo transcurre en sentido contrario. El principio del funcionamiento de esta máquina consiste en lo siguiente: la expansión del agente de transformación se efectúa cuando está en contacto con el foco frío. Con esto, dicho foco se enfría aún más, que es, precisamente, el fin que cumple la máquina frigorífica. Luego, para que el ciclo sea posible, hay que comprimir el agente de transformación y trasmitir el calor recibido del foco frío. Esto se realiza cuando el agente está en contacto con el foco caliente. De este modo el cuerpo más caliente se calienta aún más. El paso «antinatural» del calor de un cuerpo menos caliente a otro más caliente se «paga» en trabajo. En efecto, cuando el ciclo se efectúa en sentido contrario al de las agujas del reloj, la igualdad de la energía cedida al medio y la energía tomada de él (es decir, $Q_1+A_2=Q_2+A_1$ o $Q_2-Q_1=-(A_1-A_2)$, donde, lo mismo que antes, designamos con el subíndice 1 la parte del proceso que transcurre en contacto con el cuerpo más caliente) tiene el sentido siguiente: la cantidad de calor absorbida del sistema debe ser compensada por una cantidad igual de trabajo mecánico.

El segundo principio de la termodinámica impone cierta condición al funcionamiento de una máquina térmica. Si suponemos que la transformación es reversible, la variación de la entropía del agente de transformación después de recorrer el ciclo debe ser nula. Dicho de otra forma: la variación de la entropía en la transformación de expansión debe ser igual (con signo contrario) a la variación de la entropía durante la compresión, es decir,

$$\int \frac{dQ}{T_1} = -\int \frac{dQ}{T_2}.$$

Pero en el caso de una transformación irreversible, la entropía del sistema aislado, constituido por el foco caliente, el foco frío y el agente de transformación, aumenta y, por lo tanto,

$$\int \frac{dQ}{T_1} + \int \frac{dQ}{T_2} > 0.$$

(Recordemos que Q es una magnitud algebraica. El calor que entra en el sistema se considera positivo). Calculando el valor de estas integrales para procesos concretos, en una serie de casos se puede hallar con bastante facilidad el valor del rendimiento máximo de uno u otro ciclo de la máquina térmica.

§ 65. Ciclo de Carnot. Rendimiento máximo

Ahora se plantea el problema de hallar la expresión del rendimiento máximo posible de una máquina térmica, alcanzable por una máquina ideal que trabaje sin pérdidas cumpliendo un ciclo reversible.

En primer lugar estudiaremos el ciclo teórico de cuatro tiempos, representado en la fig. 81, que se conoce con el nombre de *ciclo de Carnot*. Este ciclo consta de dos isotermas (para las temperaturas T_1 y T_2) y dos adiabáticas. Supongamos que el primer tiempo de este proceso es la expansión isotérmica desde el estado *1* hasta el estado *2*, el agente de transformación está en contacto con el foco caliente, cuya temperatura es T_1 y la transformación se hace muy despacio. Al llegar al estado *2* se interrumpe el contacto con el foco caliente, se aisla térmicamente el agente y se le da la posibilidad de que se expanda más. El trabajo se realiza a expensas de la energía interna y la temperatura del agente supongamos que desciende hasta T_2. A partir de este punto (estado *3*) comienza una compresión en dos tiempos. El agente se pone en contacto con el foco frío, que está a la temperatura T_2, y se comprime isotérmicamente hasta el estado *4*. Aquí vuelve a aislarse térmicamente el agente y la compresión continúa por vía adiabática, calentándose el agente a costa del trabajo realizado hasta la temperatura T_1.

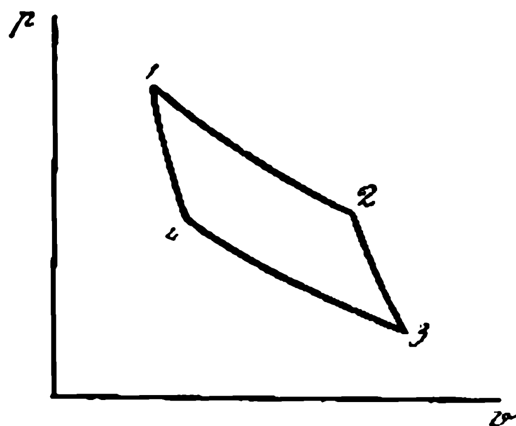


FIG. 81.

Las transformaciones adiabáticas del ciclo de Carnot tienen carácter auxiliar: ayudan a pasar de una isoterma a otra. En el balance energético no intervienen estas transformaciones, ya que el trabajo de expansión adiabática $c_v(T_1 - T_2)$ y el trabajo de compresión adiabática $c_v(T_2 - T_1)$ se compensan entre sí.

En el proceso adiabático no varía la entropía del sistema. Durante la expansión isotérmica la entropia del foco caliente disminuye en la cantidad $\frac{Q_1}{T_1}$ y la entropía del foco frío aumenta en $\frac{Q_2}{T_2}$. La entropia del agente de transformación al volver al estado inicial permanece invariable. Si el proceso es reversible, $\frac{Q_1}{T_1}=\frac{Q_2}{T_2}$. En los procesos irreversibles la entropía del sistema, formado por el foco frío, el foco caliente y el agente de transfor-

mación, aumenta y su incremento $\frac{Q_2}{T_2}$ es mayor que la disminución $\frac{Q_1}{T_1}$, es decir,

$$\frac{|Q_2|}{T_2} > \frac{|Q_1|}{T_1},$$

de donde $\left|\frac{Q_2}{Q_1}\right| \geqslant \frac{T_2}{T_1}$ y, por consiguiente, el rendimiento máximo del ciclo de Carnot es

$$\eta_{máx} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

El rendimiento de este ciclo depende únicamente de las temperaturas del foco frío y foco caliente. Cuanto mayor es la diferencia de temperaturas, tanto mayor es el rendimiento de la máquina. No es difícil ver que el rendimiento del ciclo de Carnot da los valores óptimos de rendimiento. No hay ciclo mejor que el de Carnot y, en este sentido, él debe ser el modelo para los constructores de máquinas térmicas, los cuales deben tender a aproximar los ciclos reales al ciclo de esta máquina ideal.

Demostrar que esto es así no es difícil. En la fig. 82 se muestra un ciclo arbitrario inscrito en un ciclo de Carnot. La disminución de la entropía del foco caliente se puede representar por la integral

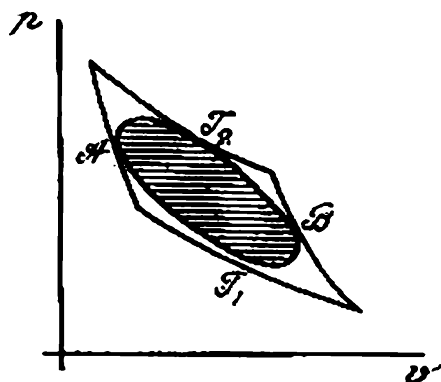


FIG. 82.

$$\int_B^A \frac{dQ}{T},$$

para la cual es correcta indudablemente la desigualdad

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} > \frac{1}{T_1}\int_A^B dQ = \frac{Q_1}{T_1},$$

puesto que T_1 es el número mayor de todos los valores que recorre T en la integración. El aumento de la entropía del foco frío vendrá expresado por la integral $\int_B^A \frac{dQ}{T}$, para la cual es válida la desigualdad

$$\int_B^A \frac{dQ}{T} < \frac{1}{T_2}\int_B^A dQ = \frac{Q_2}{T_2},$$

ya que T_2 es el número más pequeño de los valores que recorre T en la integración. Si el proceso es reversible

$$\left|\int_B^A \frac{dQ}{T}\right| = \left|\int_A^B \frac{dQ}{T}\right|,$$

por consiguiente,

$$\frac{|Q_2|}{T_2} > \frac{|Q_1|}{T_1},$$

lo que da la condición

$$\eta_{máx} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Así, pues, de todos los procesos cíclicos posibles, el que posee el rendimiento máximo es el ciclo de Carnot.

La fórmula del rendimiento máximo muestra la causa del bajo rendimiento de las máquinas de vapor. Cuando $T_2=300°K$ y $T_1=400°K$, el rendimiento es igual a un 25%. Pero esto es el rendimiento máximo alcanzable con una máquina ideal de funcionamiento reversible y sin pérdidas algunas de energía. Por esto, no es de extrañar que el rendimiento de las máquinas de vapor reales sea inferior a un 10%. En el curso de termotecnia se habla de las vías que sigue la técnica para aumentar el rendimiento. Está claro que la más importante es la elevación de la temperatura del foco caliente, es decir, del vapor o de la mezcla combustible.

§ 66. Segundo principio de la termodinámica

Como dijimos antes, el segundo principio de la termodinámica consiste en la afirmación de que la entropía de un sistema térmicamente aislado aumenta. Esta aseveración puede parecer algo abstracta. Además, esta enunciación no corresponde al desarrollo histórico de la idea. Teniendo en cuenta la enorme importancia de esta ley de la naturaleza, conviene detenerse brevemente en otros enunciados existentes del segundo principio de la termodinámica y demostrar su equivalencia con el mencionado antes.

Históricamente, el segundo principio de la termodinámica entró en la ciencia bajo la forma del postulado de Thomson acerca de la imposibilidad de crear un móvil perpetuo de segunda especie. Se llama móvil perpetuo de primera especie una máquina capaz de producir trabajo «de la nada», es decir, una máquina cuyo funcionamiento contradice el primer principio de la termodinámica. Móvil perpetuo de segunda especie es un motor que realiza trabajo, por medio de una máquina de acción periódica, a expensas únicamente del calor que toma del medio circundante. Si fuera posible construir este motor, sería prácticamente un móvil perpetuo, ya que las reservas de energía en el medio circundante son casi ilimitadas y, por ejemplo, el enfriamiento de las aguas de los océanos en un grado daría una cantidad de energía tan enorme que es difícil imaginar. La masa de agua que hay en el océano mundial es del orden de

$\sim 10^{18}$ t. Si esta masa de agua se enfriase tan sólo en 1°, se liberarían 10^{21} kcal$=4,18\cdot 10^{21}$ J de calor, lo que equivale a la combustión completa de 10^{14} t de carbón. Un tren cargado con esta cantidad de carbón tendría $\sim 10^{10}$ km de longitud, lo que en orden de magnitud coincide con las dimensiones del sistema solar.

El móvil perpetuo de segunda especie es una máquina térmica capaz de funcionar con foco caliente, pero sin foco frío. Esta máquina podría funcionar un solo tiempo; el gas que se encontrara en el recipiente con émbolo podría expandirse, pero aquí terminaría el funcionamiento del motor, ya que para su continuación es necesario transmitirle al foco frío el calor recibido por el gas. De un modo formal, la imposibilidad del móvil perpetuo de segunda especie se deduce de la fórmula del rendimiento máximo. Si no existe transmisión de calor ($T_2=T_1$), el valor máximo del rendimiento es igual a cero.

Es imposible construir un móvil perpetuo de acción periódica combinando una expansión isotérmica con un proceso adiabático de compresión. Este proceso sería imposible incluso si se consiguiera hacerlo reversible. Durante la expansión isotérmica del agente de transformación, la entropía disminuye. Esto significa que el proceso de compresión debe efectuarse con aumento de la entropía. Pero esto es imposible de conseguir en una transformación adiabática, ya que ésta transcurre a entropía constante.

También está en completo acuerdo con el enunciado aceptado aquí del segundo principio de la termodinámica el postulado de Clausius, que consiste en la afirmación de la imposibilidad de que el calor pase de un cuerpo menos caliente a otro más caliente sin compensación. Un proceso que contradiga el postulado de Clausius debe transcurrir con disminución de la entropía; esta propiedad de la entropía se demostró desde el principio.

Volveremos a tratar del segundo principio de la termodinámica en el § 77, donde lo juzgaremos desde el punto de vista de la teoría cinético-molecular.

12

TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES

§ 67. Conceptos fundamentales

Teniendo en cuenta que en los cuerpos sólidos las moléculas están estrechamente ajustadas unas a otras, se pueden determinar con buena precisión, por medio del análisis estructural roengenográ-

fico (pág. 411), las dimensiones de las moléculas. Comparando estas dimensiones con el volumen correspondiente a una molécula de gas, se descubren inmediatamente las peculiaridades fundamentales del estado gaseoso de la materia.

La dimensión lineal máxima de las moléculas diatómicas de oxígeno es aproximadamente igual a 4 Å, esta misma dimensión tienen las moléculas de nitrógeno; las moléculas de hidrógeno son mucho más pequeñas. El volumen de una molécula de oxígeno será aproximadamente igual a 10^{-23} cm^3. En condiciones normales, en 1 cm^3 de oxígeno hay $2,7 \cdot 10^{19}$ moléculas. Por consiguiente, a cada molécula le corresponde un volumen de cerca de $0,4 \cdot 10^{-19}$ cm^3. Comparando estas dos cifras —el volumen propio de la molécula y el volumen que le corresponde a cada una— vemos lo espaciadas que se encuentran las moléculas. Está claro que siendo tan pequeña la densidad, los encuentros entre moléculas serán relativamente raros. Por término medio, el camino recorrido por una molécula entre dos choques consecutivos es de 1000 Å. Pero la velocidad de las moléculas es grande, de cerca de 500 m/s. Por esto los choques ocurrirán, en promedio, cada diezmilmillonésima fracción de segundo (10^{-10} s). De dónde salen estas cifras quedará claro de lo que sigue.

Las moléculas sólo comienzan a atraerse cuando la distancia entre ellas se hace comparable con sus dimensiones propias. Por esto, la mayor parte de su camino lo recorren las moléculas con movimiento rectilíneo y uniforme. Las fuerzas de interacción entre las moléculas sólo se manifiestan cuando en el camino de una de ellas se encuentra otra. Como la interacción se pone de manifiesto en una parte insignificante del recorrido de las moléculas, puede hablarse de choques entre ellas. El tiempo durante el cual interaccionan sensiblemente las moléculas, es decir, el tiempo de colisión, es igual aproximadamente a 10^{-13} s. De este modo, la molécula pasa la parte inmensamente mayor de su «vida» en movimiento libre por inercia.

Esto tiene lugar en los gases que se hallan en las condiciones ordinarias. Un aumento de la presión conducente al aumento de la densidad puede hacer que todo varíe sensiblemente.

La energía interna de los gases en los cuales la interacción entre las moléculas se produce únicamente durante colisiones casi instantáneas no contiene energía potencial de acción mutua entre las moléculas. Estos gases son los que llamamos *perfectos* o *ideales* y justificamos por segunda vez el empleo de este término demostrando la validez de la ecuación del estado gaseoso para estos gases.

Así, pues, una sustancia gaseosa es de por sí un número enorme de partículas pequeñísimas que recorren grandes espacios sin chocar, por fin chocan como un par de bolas de billar y salen despedidas

en sentidos distintos, con otras velocidades, hasta que se produce una nueva colisión. Si siguiéramos a una molécula de un gas (lo que únicamente puede hacerse, como es natural, mentalmente), veríamos que unas veces se mueve hacia la izquierda, otras hacia la derecha, ya hacia adelante, ya hacia atrás. En unas ocasiones se desplazará a gran velocidad, en otras, lentamente. En virtud del carácter totalmente caótico del movimiento térmico en el gas, se puede afirmar que las moléculas de un gas libre, que se encuentre en equilibrio térmico, estarán uniformemente repartidas en el espacio según la densidad. También es indudable que, en un instante dado, en todas las direcciones se moverán cantidades iguales de moléculas. Así mismo estarán uniformemente distribuidos otros sucesos casuales. Por ejemplo, en todos los puntos serán iguales las cantidades de moléculas que recorren sin chocar caminos de 100 a 200 Å por segundo de observación.

Sin embargo hay que hacer una salvedad: todos los razonamientos expuestos anteriormente tienen carácter estadístico. Son correctos tomados como promedio y en un grado tanto mayor, cuanto más elevado sea el número de moléculas de gas.

Hemos afirmado, por ejemplo, que el número de moléculas que se mueven «hacia la derecha» y «hacia la izquierda» será igual. Está claro que esto no significa que dichas cantidades serán iguales con la exactitud de hasta una unidad. Pero el número de moléculas en movimiento es tan enorme, que si estas cantidades difieren no ya en una unidad, sino en millones, la diferencia expresada en tantos por ciento será insignificante.

Si se «cuentan» repetidas veces las moléculas que hay en un volumen cualquiera, cada cómputo arrojará una cantidad algo distinta de los demás. Midiendo la densidad se establece el valor medio del número de moléculas que hay en el volumen que nos interesa. Si fuera posible hacer la medición con una exactitud de mil moléculas por lo menos, cada medida oscilaría muy poco en torno a dicho valor medio (muy poco en tantos por ciento).

Cuando se dice que cierto número de moléculas tiene una velocidad, o se mueve en una dirección o choca según un mecanismo cualquiera, siempre se trata del valor medio del número correspondiente. Si el número de moléculas del gas es grande, las desviaciones de los valores instantáneos respecto a los medios *(fluctuaciones)* serán insignificantes. En los gases muy enrarecidos las fluctuaciones pueden ser considerables.

En el cálculo de probabilidades se demuestra que la desviación media, en valor absoluto, de la densidad de un gas con respecto al número medio de moléculas que hay en la unidad de volumen es aproximadamente igual a $1/\sqrt{n}$, donde n es el número de moléculas. Como en un cm^3 de gas hay $2{,}7\cdot10^{19}$ moléculas, la fluctua-

ción de la densidad del gas dentro de los límites de un centímetro cúbico constituirá el

$$\frac{1}{\sqrt{2{,}7\cdot 10^{19}}},$$

es decir, el $2\cdot 10^{-10}$ del valor medio. Está claro que semejantes desviaciones quedan fuera de los límites de detección experimental.

Lo mismo ocurre con todas las demas propiedades de los gases que dependen de las cantidades medias de moléculas.

El origen de la teoría cinética de los gases se remonta a Daniel Bernoulli (1700—1788). En los trabajos de M. V. Lomonósov (1711—1765) adquiere la teoría cinética un desarrollo considerable. En el siglo XIX fue perfeccionada y extendida por Clausius (1822—1888), Maxwell (1831—1879) y Ludwig Boltzmann (1844—1906) y tomó ya su forma actual.

§ 68. Recorrido libre

La distancia que recorre una molécula entre dos colisiones consecutivas (recorrido de la molécula) es, naturalmente, una magnitud casual que, para moléculas aisladas, puede ser a veces muy pequeño o muy grande. Sin embargo, en virtud del carácter caótico del movimiento de las partículas, el valor medio de dicha magnitud, para un estado dado del gas, será indudablemente constante. El recorrido libre medio o, simplemente, recorrido l puede ligarse con la velocidad media v del movimiento de las moléculas y con el tiempo medio entre dos colisiones τ por medio de la simple relación $l=v\tau$ *). En la pág. 197 damos los valores típicos de estas magnitudes.

El recorrido de las moléculas debe depender, ante todo, del número de moléculas que haya en la unidad de volumen del gas. Está claro, además, que cuanto mayores sean las dimensiones de las moléculas, tanto menor será el recorrido libre.

Para poder figurarnos el carácter de esta relación, consideraremos un volumen cilíndrico de gas por el cual, y a lo largo del eje del cilindro, se mueve una molécula. ¿Qué espacio logrará recorrer esta molécula?

Las moléculas no son puntos, sino que tienen dimensiones que se determinan por las distancias a las cuales comienza a notarse la interacción molecular.

*) Como sólo se trata de hallar las relaciones existentes entre magnitudes físicas, y no fórmulas exactas, no haremos distinción entre velocidad media y velocidad media cuadrática (véase más adelante).

Basándose en las mediciones cristaloquímicas (véase la pág. 658), a las moléculas se les puede atribuir con bastante exactitud cierta forma. A distancias que estén fuera del «ámbito» de la molécula, desde el punto de vista de este simple modelo geométrico, no actúan las fuerzas de interacción. Si el gas no es muy denso, este modelo coincide con la realidad.

Proyectemos las moléculas sobre el fondo del cilindro representando sus secciones máximas. Cada molécula se proyecta de una forma distinta; pero como hay muchas moléculas, la superficie media de la sección será una característica bastante exacta de las moléculas. Esta superficie media de la sección σ se llama *sección eficaz* o *diámetro eficaz* de la molécula.

La colisión tendrá lugar con toda seguridad en el transcurso del cilindro, si la superficie de su base está llena de secciones de moléculas. Si el área de la base del cilindro es igual a 1 cm², la longitud del cilindro es l y el número de moléculas en la unidad de volumen es n, en todo el cilindro habrá nl moléculas. Las proyecciones de las secciones de estas moléculas taparán el fondo del cilindro si $nl \cdot \sigma = 1$. En estas condiciones el valor de l, por el orden de magnitud, debe aproximarse al recorrido medio de la molécula, es decir, $l \approx 1/n\sigma$. Un cálculo más riguroso, que no haremos aquí, confirma este cómputo aproximado. En la fórmula exacta figura en el denominador la cantidad $\sqrt{2}$:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} n\sigma}.$$

σ es una magnitud constante para cada gas. Por lo tanto, el recorrido libre viene determinado únicamente por la densidad; disminuyendo 100 veces, por ejemplo, la densidad, el recorrido libre aumentará la misma cantidad de veces.

Para el aire en condiciones normales la sección eficaz es igual aproximadamente a $5 \cdot 10^{-15}$ cm². Esto concuerda perfectamente con las dimensiones de las moléculas de oxígeno y nitrógeno que conocemos por las mediciones llevadas a cabo en los cristales. La dimensión máxima es igual a 4,3 Å, y la mínima, a 3 Å; el radio de un círculo de $5 \cdot 10^{-15}$ cm² de superficie es igual a 4 Å.

Las dimensiones de las moléculas, como ya dijimos, se determinan por las investigaciones realizadas en los cristales. No obstante, el estudio de los choques de partículas se puede considerar como un método para establecer su sección eficaz. Este procedimiento es válido para la investigación de los núcleos atómicos (pág. 606).

Recorrido libre medio en condiciones normales: en el aire 600 Å, en el nitrógeno 600 Å, en el hidrógeno 1100 Å, en el helio 1800 Å.

§ 69. Presión de un gas. Velocidad cuadrática media de las moléculas

Se nos plantea el problema siguiente: aplicando los conceptos simplificados acerca del movimiento y de la interacción de las moléculas gaseosas, expresar la presión del gas en función de las magnitudes que caracterizan la molécula.

Consideremos el gas contenido en un espacio esférico de radio R y volumen v. Prescindiendo de las colisiones entre las moléculas

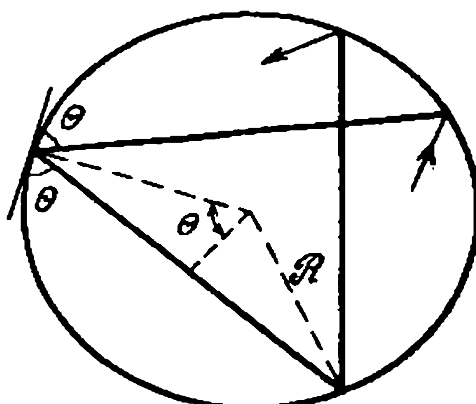


FIG. 83.

del gas, es correcto admitir el siguiente esquema del movimiento de cada molécula. La molécula se mueve rectilínea y uniformemente con cierta velocidad v, choca con la pared del recipiente y es rechazada formando con ella un ángulo igual al de incidencia (fig. 83). Recorriendo durante todo el tiempo cuerdas de igual longitud, $2R \times \text{sen}\ \theta$, la molécula le dará a la pared del recipiente $v/(2R\ \text{sen}\ \theta)$ golpes en 1 s. En cada choque el impulso de la molécula variará en $2mv\ \text{sen}\ \theta$ (véase la pág. 71). La variación del impulso en 1 s será igual a mv^2/R.

Vemos que el ángulo de incidencia se reduce. Si la molécula incide sobre la pared formando un ángulo muy agudo, los choques serán frecuentes pero débiles; si incide formando un ángulo próximo a 90°, los choques serán menos frecuentes pero más fuertes.

La variación del impulso en cada choque de una molécula con la pared da su aportación a la fuerza total de presión del gas. De acuerdo con la ley fundamental de la mecánica se puede admitir que la fuerza de presión no es más que la variación del impulso de todas las moléculas que se produce en un segundo $\frac{mv_1^2}{R}+\frac{mv_2^2}{R}+\ \ldots$ o, sacando fuera del paréntesis el factor constante, $\frac{m}{R}(v_1^2+v_2^2+\ \ldots)$.

Supongamos que en el gas hay n moléculas. En este caso se puede introducir en la consideración el cuadrado medio de la velocidad de las moléculas, que se determina por la fórmula

$$\overline{v^2} = \frac{1}{n}(v_1^2 + v_2^2 + \ldots).$$

La expresión de la fuerza de presión se escribe ahora brevemente:

$$F = \frac{mn\overline{v^2}}{R}.$$

La presión del gas la obtenemos dividiendo la expresión de la fuerza por el área de la esfera $4\pi R^2$:

$$p = \frac{mn\overline{v^2}}{4\pi R^3}.$$

Sustituyendo $4\pi R^3$ por $3V$, se obtiene una fórmula interesante:

$$pV = \frac{1}{3}nm\overline{v^2} \quad \text{ó} \quad pV = \frac{2}{3}n\left(\frac{m\overline{v^2}}{2}\right).$$

Por consiguiente, la presión del gas es proporcional al número de moléculas de gas y al valor medio de la energía cinética de su movimiento de traslación.

Comparando la ecuación que hemos obtenido con la ecuación del estado gaseoso llegamos a una conclusión muy importante. La confrontación de los segundos miembros de dichas igualdades demuestra que

$$\mu RT = \frac{2}{3}n\left(\frac{m\overline{v^2}}{2}\right) \quad \text{o} \quad \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}\frac{\mu R}{n}T,$$

es decir, la energía cinética media del movimiento de traslación de las moléculas depende únicamente de la temperatura absoluta y es directamente proporcional a ella.

La deducción hecha demuestra que los gases que cumplen la ley del estado gaseoso son perfectos o ideales en el sentido de que se aproximan al modelo ideal del conjunto de partículas cuya interacción carece de importancia. Esta deducción demuestra también que el concepto, introducido empíricamente, de temperatura absoluta como magnitud proporcional a la presión de un gas enrarecido, tiene un sentido cinético molecular simple. La temperatura absoluta es proporcional a la energía cinética del movimiento de traslación de las moléculas. $n\mu = N$ es el número de Avogadro, es decir, el número de moléculas que hay en una molécula-gramo, este número es una constante universal: $N = 6{,}02 \times \times 10^{23}$. La magnitud inversa $1/N$ será igual a la masa del átomo de

hidrógeno:

$$m_{\text{H}} = \frac{1}{N} = 1{,}66 \cdot 10^{-24} \text{ g}.$$

También es universal la magnitud

$$k = \frac{\mu R}{n} = \frac{R}{N} = 1{,}38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/°K}.$$

Esta magnitud se conoce con el nombre de *constante de Boltzmann*. Entonces

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Si el cuadrado de la velocidad v^2 se representa por la suma de las componentes, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, es evidente a cualquier componente le corresponderá en promedio la energía

$$\frac{1}{2} kT.$$

Esta magnitud se llama energía correspondiente a un grado de libertad.

La constante universal de los gases es bien conocida por los experimentos con gases. La determinación del número de Avogadro o de la constante de Boltzmann (que se expresan la una en función de la otra) es un problema relativamente difícil, para cuya resolución hay que realizar mediciones exactas.

La deducción que hemos hecho pone a nuestra disposición unas fórmulas que permiten calcular la velocidad media de las moléculas y el número de moléculas que hay en la unidad de volumen.

Así, para el cuadrado medio de la velocidad obtenemos

$$\overline{v^2} = \frac{3RT}{mN} = \frac{3RT}{M},$$

donde M es el peso molecular. La raíz cuadrada del cuadrado medio de la velocidad se llama *velocidad cuadrática media*. Esta velocidad

$$v_{\text{med}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad \text{o} \quad v_{\text{med}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

es decir, es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura e inversamente proporcional a la raíz cuadrada del peso molecular. Se halla con facilidad que, a la temperatura ambiente, las moléculas de oxígeno tienen la velocidad de 480 m/s, y las de hidrógeno, 1900 m/s. A la temperatura del helio líquido estas mismas moléculas tendrían respectivamente las velocidades

de 40 m/s y 160 m/s, y a la temperatura de la superficie del Sol, 6000°, las velocidades de 2160 m/s y 8640 m/s. Es cierto que hemos puesto unos ejemplos irreales, porque a la temperatura del helio líquido tanto el hidrógeno como el oxígeno se solidifican y en ellos no existe movimiento de traslación de las moléculas, y a la temperatura de la superficie del Sol las moléculas se disgregan en átomos.

Para el número de moléculas en la unidad de volumen obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{n}{V}=\frac{3p}{m\overline{v^2}}=\frac{p}{kT}.$$

De aquí se deduce la *ley de Avogadro*: a igualdad de presión y temperatura todos los gases contienen el mismo número de moléculas en la unidad de volumen. Por ejemplo, en condiciones normales (1 atm de presión y 0°C de temperatura) en 1 cm^3 hay $2{,}683\times\times 10^{19}$ moléculas *(número de Loschmidt)*.

§ 70. Energía interna de un gas

Las propiedades de los gases monoatómicos se determinan por la energía cinética del movimiento de traslación de las moléculas. La energía interna del átomo no influye en la termodinámica del gas. Es evidente que esta energía interna deberá tenerse en cuenta únicamente en aquellos casos en que el gas se halle a una temperatura muy alta y cuando los choques de los átomos pueden ocasionar su excitación e ionización. Sobre esto hablaremos detenidamente a su debido tiempo.

De este modo tendrá gran aplicación la fórmula de la energía interna del gas monoatómico

$$U=N\frac{m\overline{v^2}}{2},$$

donde N es el número de moléculas. Valiéndonos de las fórmulas del párrafo anterior, para 1 mol de gas monoatómico perfecto obtenemos la expresión

$$U=\frac{3}{2}RT.$$

De donde, por las fórmulas dadas en el § 60, para las capacidades caloríficas de 1 mol de gas monoatómico obtenemos los valores

$$c_v=\frac{3}{2}R$$

y

$$c_p=\frac{5}{2}R.$$

La proporcionalidad directa a la temperatura de la energía interna y la correspondiente constancia de las capacidades caloríficas de un gas monoatómico se verifica en un amplio intervalo de condiciones externas.

En los gases poliatómicos, esta simple circunstancia, si se da, sólo es en un intervalo de temperaturas mucho más estrecho. La causa de que esto sea así consiste en que la energía de las moléculas poliatómicas está formada por la energía del movimiento de traslación, por la energía de rotación y por la energía de oscilación de unas partes de la molécula (es decir, de los átomos que la componen) con respecto a otras. El cálculo de la energía media correspondiente a una molécula se hace bastante complicado. Resulta que la energía de la molécula no dependerá ya linealmente de la temperatura y, respectivamente, la capacidad calorífica del gas ya no será constante ni dependiente del valor de T. No obstante, por lo general se consigue hallar un estrecho intervalo de temperaturas dentro del cual la capacidad calorífica del gas no depende de la temperatura. Esto suele ocurrir a aquellos valores de la temperatura en las que la energía media de la molécula es todavía insuficiente para que las colisiones entre moléculas puedan ocasionar la variación de su estado oscilatorio y, al mismo tiempo, dicha energía es lo suficientemente grande para que no se note el carácter discreto (cuántico) de la energía de rotación. Adelantándonos, y remitiendo al lector a la fig. 266 (pág. 673), podemos decir que la marcha lineal de la energía con la temperatura y la constancia de la capacidad calorífica se cumplirán si la magnitud kT, que caracteriza, por su orden de magnitud, la energía del movimiento de traslación de la molécula, es considerablemente mayor que la distancia entre los niveles rotacionales de la energía y menor que la distancia entre los niveles oscilatorios de la energía.

Si este intervalo existe, la energía de 1 mol de gas y su capacidad calorífica vienen expresadas por las siguientes fórmulas simples:

$$U = 3RT, \qquad c_v = 3R, \qquad c_p = 4R.$$

El aumento al doble de la energía interna y de c_v con respecto al gas monoatómico se puede interpretar del modo siguiente. La molécula poliatómica tiene seis grados de libertad, mientras que la monoatómica sólo tiene tres. La duplicación del número de grados de libertad acarrea la duplicación de la energía interna. En esta afirmación, como es natural, no hay nada indudable. Sin embargo hallamos la confirmación de este punto de vista al considerar un gas de moléculas diatómicas. Como una molécula diatómica es un sistema de dos puntos materiales, tiene cinco grados de libertad (véase la pág. 46). Si la energía interna es en realidad proporcional

al número de grados de libertad, el gas de moléculas diatómicas deberá satisfacer las fórmulas

$$U=\frac{5}{2}RT, \qquad c_v=\frac{5}{2}R \quad \text{y} \quad c_p=\frac{7}{2}R.$$

La experiencia demuestra que, en el intervalo de temperaturas en que la capacidad calorífica permanece invariable, estas fórmulas se cumplen bien. La energía interna de un mol de gas diatómico a la temperatura ambiente de 300°K será igual a 1500 cal=6250 J.

La marcha típica de la curva de capacidad calorífica en un amplio intervalo de temperatura se representa en la fig. 84.

§ 71. Distribución estadística

Existen muchos sucesos imposibles de predecir. Estos sucesos se llaman casuales. La estatura de los mozos que se incorporan al ejército, el número de peatones que pasan por un cruce de calles

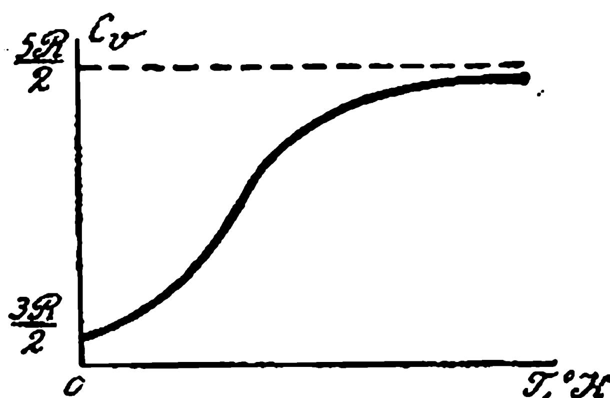


FIG. 84.

dado a una hora determinada, el número de billetes de lotería premiados en un sorteo correspondientes a cada serie de cien números, todos éstos son ejemplos de sucesos casuales. Observando una multitud de sucesos del mismo tipo, por ejemplo, midiendo la estatura de un gran número de mozos, contando durante muchos días el número de transeúntes que pasan en un minuto o analizando el número de billetes premiados en muchos sorteos de lotería, podemos representar los resultados de estas observaciones en forma de las llamadas curvas de distribución. Si se trata de la talla de los reclutas, los datos se pueden preparar en forma de cifras que indiquen cuántos de ellos medían de 1,70 a 1,71 m, de 1,71 a 1,72 m y así sucesivamente. La probabilidad de encontrar entre los llama-

dos a filas uno que tenga exactamente una estatura dada (por ejemplo, 171,34 cm) es en realidad igual a cero. Por esto tiene sentido hablar únicamente del número de reclutas cuya talla se encuentre en cierto intervalo.

Si nos referimos al análisis de las listas de número premiados en la lotería, la curva de distribución se puede construir sobre la base de los datos acerca de la cantidad de series de cien números en que no cayó ni un solo premio, en que salió un número premiado, en que salieron dos, etc.

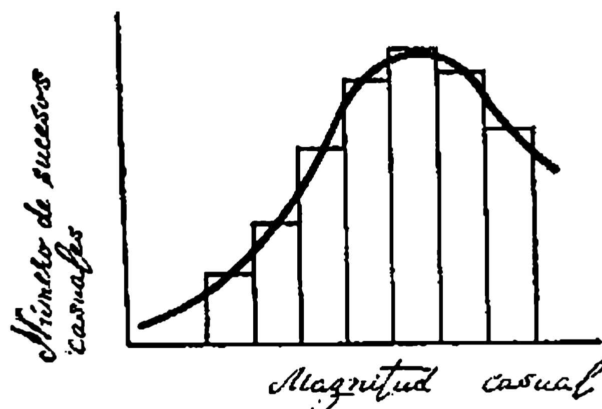


FIG. 85.

Construyendo la gráfica de modo que sobre el eje horizontal se tome la magnitud casual (la estatura, el número de transeúntes, la cantidad de números premiados) y sobre el eje vertical, el número de sucesos casuales (el número de reclutas cuya estatura se encuentra en un intervalo dado, el de casos en que una cantidad dada de premios cae en una centena de números, etc.), la curva que se obtiene es la de distribución. La fig. 85 representa un ejemplo de curva de este tipo. La curva se ha trazado por los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos. Cada rectángulo tiene un área numéricamente igual a la cantidad de casos en que el suceso casual ocurre de acuerdo con la magnitud comprendida en el intervalo dado.

Una peculiaridad notable de las curvas de distribución es la de reproducirse. Si durante una serie de años se construyen curvas de distribución que analicen la talla de los reclutas, puede comprobarse que su semejanza es completa. Esta semejanza no la encontraremos si estudiamos curvas de distribución de la talla construidas sobre la base de un número pequeño de mediciones. Si aumenta el material que sirve de base para la construcción de cada curva, las correspondientes a diversos años serán cada vez más semejantes. Esto ocurre con las curvas de distribución de cualquier tipo de

sucesos, siempre que estos sean casuales y las condiciones de las curvas de distribución obtenidas no varíen.

La ley de distribución de cualquier magnitud, que se cumple tanto mejor cuanto mayor sea el número de sucesos en que se base la construcción de cada ordenada de la curva, se llama *ley estadística.*

El conocimiento de la curva de distribución no puede, claro está, predecirnos el número de la lotería que saldrá premiado en el sorteo próximo. Sin embargo, puede indicarnos cuál será la fracción de las series de cien números en que toque un premio. Esta predicción será tanto más exacta cuanto mayor sea la cantidad de números de lotería que se sometan a análisis.

La enorme cantidad de moléculas que hay incluso en el volumen más pequeño de una sustancia hace que sea extraordinaria la exactitud de todo género de predicciones acerca del comportamiento de las moléculas. La curva de distribución de cualquier magnitud casual, construida para las moléculas de una sustancia, se reproducirá con una enorme precisión, porque a cada «rectángulo» de dicha curva corresponderán millares de millones de moléculas.

§ 72. *Ley de Boltzmann*

Algunos conceptos sobre la distribución de las moléculas se deducen inmediatamente del carácter caótico del movimiento térmico. Esto se refiere a la distribución de las moléculas según las direcciones de las velocidades o a la distribución de las moléculas por el volumen en el caso en que sobre el gas no actúan fuerzas algunas. No obstante, hay muchos casos en que no son evidentes a priori las consecuencias de la hipótesis sobre el carácter caótico del movimiento térmico.

Ante todo se plantea el problema de la distribución de las moléculas según los valores de las velocidades. ¿Cuál es el porcentaje de moléculas rápidas, de velocidad media y lentas? Puede plantearse después el problema de hallar cómo varía la distribución uniforme de las moléculas por densidades al someter el gas a un campo de fuerzas, por ejemplo, al campo de la gravedad o a un campo eléctrico o magnético si las moléculas poseen propiedades eléctricas o magnéticas. A éstos y otros problemas da respuesta la ley de Boltzmann, que se puede deducir aplicando el formalismo de la teoría de probabilidades.

Consideremos un pequeño volumen del espacio —un cubo de lados Δx, Δy, Δz, construido en el punto x, y, z—. Supongamos que en este cubo hay un número considerable de moléculas. Entre ellas elegimos aquellas que tienen componentes de velocidad com-

prendidas entre los límites de v_x a $v_x+\Delta v_x$, de v_y a $v_y+\Delta v_y$ y de v_z a $v_z+\Delta v_z$. Las magnitudes Δv_x, Δv_y, Δv_z se eligen de tal modo que en dicho intervalo de velocidades se encuentre un gran número de moléculas. Esto es necesario para que a estos datos se les puedan aplicar las leyes de la física estadística (volúmenes físicamente infinitesimales). En adelante diremos de estas moléculas que poseen coordenadas *próximas* a x, y, z y velocidades *próximas* a v_x, v_y, v_z. Subrayamos una vez más que no se puede hablar de una cantidad de moléculas que poseen *exactamente* una velocidad determinada, ya que la probabilidad de encontrar una molécula de este tipo es infinitamente pequeña. Como la energía cinética de una molécula se determina por el valor de la velocidad, y su energía potencial en un campo exterior depende de sus coordenadas en el espacio, todas las moléculas elegidas por nosotros tendrán prácticamente una misma energía $\mathscr{E}$.

La ley de Boltzmann, cuyo fundamento debe buscarse en los cursos de física teórica, da la expresión general para el número de moléculas que poseen coordenadas próximas a x, y, z y velocidades próximas a v_x, v_y, v_z; este número es

$$\Delta n = Ae^{-\mathscr{E}/kT}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta v_x\,\Delta v_y\,\Delta v_z;$$

aquí A es una constante que puede hallarse para un problema concreto, T es la temperatura absoluta y k es la constante de Boltzmann.

La energía que figura en el exponente es la suma de la energía cinética del movimiento de traslación de la molécula y de su energía potencial en el campo exterior: $\mathscr{E}=\frac{mv^2}{2}+U$. Por esto

$$\Delta n = Ae^{-\frac{1/2\,mv^2+U}{kT}}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta v_x\,\Delta v_y\,\Delta v_z.$$

Esta fórmula se extiende también al caso en que la molécula posee otras formas de la energía, por ejemplo, rotacional u oscilatoria. En este caso estas componentes de la energía deben incluirse en $\mathscr{E}$.

La ley de Boltzmann, o, como también se llama, la *distribución de Boltzmann*, demuestra que a la mayor energía corresponde el menor número de partículas cuyas velocidades y coordenadas se hallan en el intervalo dado.

La ley de Boltzmann la aplicaremos para resolver dos problemas importantes concernientes a la distribución de las partículas por alturas y a la distribución de las moléculas por velocidades.

§ 73. Distribución de las partículas por alturas en el campo de la gravedad

Si en un líquido se encuentra una gran cantidad de partículas pequeñas indisolubles y más pesados que él, a primera vista puede parecer que más pronto o más tarde estas partículas deben bajar al fondo. Sin embargo no ocurre así, aunque sí ocurriría de no existir el movimiento térmico.

En efecto, la fuerza de gravedad tira de la partícula hacia abajo, pero el movimiento térmico caótico, que es una propiedad inseparable de todas las partículas, dificultará constantemente la acción de dicha fuerza. La partícula se mueve hacia abajo, pero por el camino puede sufrir un choque que la rechaza hacia arriba; vuelve a comenzar el movimiento hacia abajo y otro choque puede lanzar a la partícula hacia arriba o hacia un lado. Si una partícula cualquiera consigue llegar al fondo del recipiente, los choques casuales con otras partículas pueden levantarla del fondo y otros choques casuales pueden hacer que suba hasta las capas altas del líquido. Está claro que como resultado de esto se establece cierta distribución irregular de las partículas. En las capas superiores habrá menos partículas, cerca del fondo del recipiente será donde haya más. Cuanto más pesadas sean las partículas y menor la temperatura, tanto más «apretada al fondo» estará la distribución de las partículas por alturas.

La parte cuantitativa de este interesante fenómeno, que ocurre con cualquier tipo de partículas que se hallen en el campo de la gravedad (sean las moléculas de un gas o partículas de una emulsión suspendidas en un gas o en un líquido), es interpretada por la ley de Boltzmann. En este caso el factor exponencial de la fórmula de la distribución de Boltzmann se escribe de la forma

$$e^{-\frac{mv^2}{2kT}}e^{-\frac{mgh}{kT}};$$

en lugar de la energía potencial de la gravedad U hemos puesto su expresión mgh. Nos interesa conocer el número total de moléculas (de velocidades cualesquiera) que se encuentren a una altura entre h y $h+\Delta h$. Este número será

$$\Delta n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}\Delta h.$$

Aquí el coeficiente de proporcionalidad n_0, por su sentido, no es más que el número específico de partículas $\frac{\Delta n}{\Delta h}$ cuando $h=0$. La ley de disminución del número de partículas con la altura se muestra en la fig. 86.

La forma de la fórmula demuestra que la afirmación hecha anteriormente era correcta: cuanto mayor sea la masa de las partículas y menor la temperatura, más rápido será el descenso de la curva. Por la fórmula puede verse también que la rapidez de la disminución depende de la aceleración de la gravedad. En planetas distintos deberá ser diferente la distribución de las partículas por alturas.

De acuerdo con la fórmula que hemos dado, cierto número (aunque sea muy pequeño) de moléculas existe a cualquier altura sobre la superficie de la Tierra. Esto significa que las moléculas se pueden alejar de la Tierra, escapar al espacio universal, puesto que no está excluido que, por choques fortuitos, ya una, ya otra molécula reciba la velocidad de 11,5 km/s, suficiente, como sabemos, para que salga de la esfera de atracción de la Tierra. Por esto puede decirse que la Tierra pierde paulatinamente su atmósfera. Pero la evaluación de la velocidad con que se dispersa la atmósfera demuestra que ésta es insignificante. La cantidad de aire perdida durante todo el tiempo de existencia de la Tierra carece de importancia. Otra cosa es lo que ocurre en la Luna, donde la velocidad necesaria para vencer la atracción es igual a ~ 2 km/s. Esta velocidad es relativamente pequeña y las moléculas la alcanzan con mucha facilidad, por esto no hay atmósfera en la Luna.

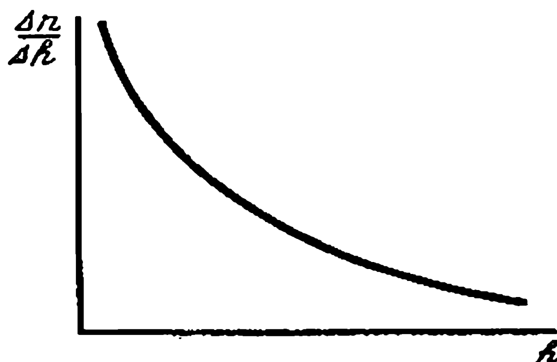


FIG. 86.

La fórmula de la disminución del número de partículas al aumentar la altura se puede escribir para la densidad y para la presión del gas. Como la presión del gas es proporcional al número de moléculas por unidad de volumen, la fórmula se puede escribir de la forma

$$p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} .$$

Aquí p_0 es la presión en el nivel cero. Esta fórmula se llama *barométrica*. Valiéndose de esta fórmula, los meteorólogos, que miden la presión atmosférica a grandes alturas, reducen los resultados de sus mediciones «al nivel del mar».

Conviene señalar otra aplicación importante de la fórmula de la distribución de las partículas por altura: esta fórmula fue utilizada por el científico francés Perrin para determinar empíricamente el número de Avogadro. De acuerdo con las

condiciones del experimento, Perrin tuvo que modificar un poco dicha fórmula. El estudió la emulsión resultante de disolver gomaguta (una variedad de resina) en agua. En esta emulsión se puede observar con un microscopio todo un hormiguero de gránulos de forma esférica. Valiéndose de una centrifugadora, Perrin clasificó los gránulos de gomaguta por dimensiones. Al cabo de varios meses de trabajo obtuvo 20—30 g de granos de dicha resina de 0,74 micras de diámetro. La densidad de la gomaguta $D=1,195$ g/cm^3, es decir, la masa de un gránulo era igual a $7\cdot 10^{-14}$ g. La determinación exacta de las dimensiones de los granos fue un problema complicado. Perrin hizo esto utilizando tres procedimientos independientes:

1) observándolos al microscopio, determinaba la longitud de una cadena de varias decenas de granos apretados entre sí;

2) pesando varios millares de granos, las dimensiones de éstos se calculaban partiendo de la conocida densidad de la gomaguta;

3) por la fórmula de Stokes (véase la pág. 233), observando la velocidad de descenso, en la emulsión, de una nube de granos. En este caso se suponía que, por la ley de Arquímedes, cada grano desciende por la acción de la fuerza $\frac{3}{4}\pi r^3(D-d)g$, donde d es la densidad del líquido y r el radio del gránulo. Esta fuerza, cuando el descenso es uniforme, está equilibrada por la del rozamiento viscoso, que se calcula por la fórmula de Stokes. Partiendo de esta condición se determina r.

Los tres procedimientos dieron resultados que coincidían bien. Esto significaba que el peso activo de un grano microscópico suspendido en el líquido se podía escribir de la forma $mg\,(1-d/D)$. Recordemos que $k=R/N$. De aquí se obtiene la fórmula barométrica para la «atmósfera» de granos de gomaguta suspendidos en el agua.

$$n=n_0e^{-\frac{Nmgh}{RT}\left(1-\frac{d}{D}\right)}.$$

El experimento se reducía, pues, a determinar la relación de las concentraciones de n a niveles situados a distancias iguales. Esto se conseguía enfocando un microscopio a una capa suficientemente delgada de emulsión y contando el número de partículas que aparecían en el campo visual en espacios de tiempo iguales. Variando la viscosidad de la emulsión en cientos de veces, Perrin observó rigurosamente que la relación de las concentraciones concordaba con la fórmula barométrica. Sustituyendo n_0, n, h, m, d, D y T por sus valores, se podía determinar N. Resultó que a pesar de las amplias variaciones de la viscosidad de la emulsión y de las dimensiones de los granos, el valor de N hallado por este procedimiento coincide brillantemente con los valores predichos por la teoría cinético molecular: Perrin obtuvo $6\cdot 10^{23}<N<7\cdot 10^{23}$ (según los datos modernos $N=6,0225\cdot 10^{23}$). Esto evidenciaba, sin lugar a dudas, que la distribución de Boltzmann por energías puede aplicarse incluso a aquellas partículas cuya «molécula-gramo» es igual a 50 000 toneladas (!).

§ 74. *Distribución de las moléculas por velocidades*

La distribución de moléculas por velocidades deducida teóricamente por el eminente físico inglés Maxwell, se puede considerar como una consecuencia de la ley de Boltzmann.

El número de moléculas cuyas velocidades se encuentran en el intervalo de v_x a $v_x+\Delta v_x$, de v_y a $v_y+\Delta v_y$ y de v_z a $v_z+\Delta v_z$ será,

según la ley de Boltzmann

$$\Delta n = Ce^{-\frac{mv^2}{2kT}} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z.$$

Se sobrentiende que nos interesa la distribución de las velocidades en un pequeño volumen de gas y que la distribución de las moléculas según las coordenadas se tiene en cuenta por medio del factor constante C, que ahora carece de interés para nosotros.

La fórmula que hemos escrito toma en consideración la distribución de las moléculas tanto por sus magnitudes como por las direcciones de sus velocidades. Pero la distribución por direcciones ya la conocemos, puesto que el número de moléculas lanzadas en una u otra dirección debe ser el mismo, si el movimiento de éstas es totalmente caótico. Nos interesa conocer el número total de moléculas que, independientemente de sus direcciones, tienen una velocidad comprendida entre v y $v+\Delta v$, donde $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$.

Si se construye una gráfica tridimensional, sobre cuyos ejes se toman las proyecciones de las velocidades de las moléculas v_x, v_y, v_z y se divide mentalmente este espacio en cubos infinitesimales de volumen $\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$, nos podremos figurar claramente los datos acerca de la distribución de las velocidades de las moléculas en forma de los números de moléculas correspondientes a un cubo infinitesimal. La fórmula de Boltzmann nos da precisamente el número de moléculas que hay en cada uno de los cubitos. Pero examinando atentamente la fórmula vemos que el número de moléculas será igual para todos los cubos infinitesimales que se hallen dentro de una zona esférica cuyo radio sea de v a $v+\Delta v$, porque en el factor exponencial de la fórmula figura únicamente el valor absoluto de la velocidad. El número de moléculas que poseen velocidades dentro de los límites de v a $v+\Delta v$ será proporcional al volumen de la capa esférica, es decir, a $4\pi v^2 \Delta v$; de este modo, si el número de moléculas que se encuentran en un cubo infinitesimal es igual a

$$Ce^{-\frac{mv^2}{2kT}} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z,$$

el número de aquellas que hay en la zona esférica, es decir, que poseen velocidades dentro de los límites de v a $v+\Delta v$, vendrá representado por la fórmula

$$\Delta n = Ce^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 \Delta v.$$

¿Qué carácter tiene esta dependencia? Cuando $v=0$ y $v=\infty$ el número de moléculas se anula. Está claro que la curva debe tener un máximo. Por las reglas generales hallamos el máximo del factor de Δv. Tomando la derivada de esta expresión e igualándola

a cero, obtenemos

$$\frac{d}{dv}\left(e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2\right)=0,$$

de donde el valor de la velocidad con el cual la función de distribución tiene el máximo es

$$c=\sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

¿Qué velocidad es ésta? Como sobre el eje de ordenadas de la curva de distribución se toma el número de moléculas que poseen la velocidad v, resulta que c es una especie de frontera: las moléculas que se mueven con velocidades tanto mayores como menores que c se encuentran con menos frecuencia que las que lo hacen con velocidades c.

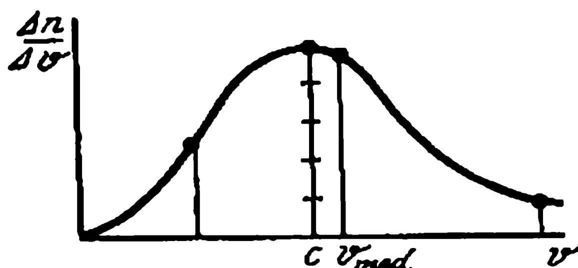


FIG. 87.

Esta velocidad se llama la más probable. La curva de distribución de las moléculas de un gas por velocidades (distribución de Maxwell) se da en la fig. 87.

Conviene comparar las fórmulas de la velocidad más probable y de la cuadrática media:

$$c=\sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad \text{y} \quad v_{med}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

La velocidad media es mayor que la probable. La causa de que esto sea así se ve claramente en la curva de distribución. como la curva de distribución se aleja mucho hacia la derecha, hacia allí se desplazan también los valores medios de la velocidad.

Citaremos algunos números que caracterizan la distribución de las velocidades de las moléculas de los gases. El número de moléculas con velocidades próximas a la más probable c es 1,1 veces mayor que el de moléculas con velocidades próximas a la cuadrática media; 1,9 veces mayor que el de moléculas con velocidades próximas a 0,5 c y 5 veces mayor que el de moléculas con velocidades próximas a 2 c (véase la fig. 87).

§ 75. *Medición de las velocidades de las moléculas de un gas*

Aunque la ley de distribución de las moléculas por velocidades se deduce de condiciones teóricas extraordinariamente precisas, cuya corrección ha sido confirmada por una enorme cantidad de hechos, sería interesante someter la fórmula de la distribución a una comprobación experimental directa.

Las velocidades de las moléculas de un gas en un volumen solamente se pueden medir de un modo indirecto: si la molécula emite luz, la velocidad de su movimiento se refleja en la anchura de las rayas espectrales (efecto Doppler). El método de los haces moleculares ofrece posibilidades directas.

En un tubo largo y ancho se disponen dos diafragmas con orificios bastante pequeños. En uno de los compartimientos extremos se introduce un gas. Las moléculas comienzan entonces a penetrar primero en el compartimiento de en medio y a veces llegan hasta el segundo compartimiento extremo. Es evidente que sólo podrán pasar todo el tubo aquellas moléculas cuyo vector velocidad esté dirigido a lo largo del eje del tubo en el instante en que atraviesan el primer orificio. Por este procedimiento se separa del gas un haz molecular. Las moléculas de este haz tienen las velocidades igualmente dirigidas. En cuanto al valor de la velocidad, es evidente que, por el principio del caos molecular, la distribución de estas moléculas por velocidades será la misma que la de las moléculas de otra dirección cualquiera de movimiento.

Para medir las velocidades de las moléculas del haz se puede recurrir a un dispositivo que recuerda el aparato de medir la velocidad de las balas. Figurémonos dos discos de cartón ajustados rígidamente a un eje, que giran con la velocidad ω alrededor de éste. Si una bala se dispara paralelamente al eje de rotación, los discos serán agujereados por ella sucesivamente en dos puntos, que estarán desplazados en el ángulo acimutal φ en que giró el sistema mientras la bala recorrió la distancia l entre los discos. El tiempo de giro en el ángulo φ es igual a φ/ω, por lo tanto, la velocidad de la bala

$$v = l : \frac{\varphi}{\omega} = \frac{l\omega}{\varphi}.$$

Como las moléculas no agujerean el cartón, el experimento análogo para los haces moleculares se hace con discos en los cuales se practican ranuras radiales a todo el rededor. La distancia angular entre las ranuras es igual a φ. Es evidente que las moléculas, cuya velocidad es v, sólo podrán pasar por los dos discos giratorios ranurados cuando éstos tengan una velocidad ω determinada que satisfaga la condición $\varphi/\omega = l/v$. De este modo, cambiando ω, se

pueden filtrar las moléculas por velocidades, recoger las moléculas de una misma velocidad y medir sus cantidades relativas.

Multitud de experimentos realizados han confirmado las fórmulas de distribución por velocidades antes expuestas y, por lo tanto, las fórmulas de los valores medio y probable de la velocidad de las moléculas.

§ 76. *Probabilidad de un estado*

Consideremos una caja dividida en dos partes iguales por un tabique. El tabique tiene un orificio. Si en la caja hay moléculas de un gas, éstas serán capaces, a consecuencia de las colisiones fortuitas con las paredes de la caja y entre sí, de pasar de una mitad a otra. A pesar de que el movimiento de las moléculas en la caja sea totalmente desordenado, existe un método mediante el cual se puede predecir cuántas moléculas habrá en la parte izquierda y cuántas en la parte derecha. Este método se basa en aplicar a la sustancia la teoría de probabilidades.

Si en la caja hubiera una sola molécula, podría encontrarse con la misma probabilidad en la parte derecha o en la izquierda. Como en total son posibles dos casos (la molécula puede estar o en la parte izquierda o en la derecha de la caja) y a nosotros nos interesa la realización de uno de estos dos casos, se dice que la probabilidad de que la molécula se encuentre en una mitad de la caja será igual a 1/2. Supongamos ahora que en la caja hay dos moléculas, que designaremos con las cifras 1 y 2. Las situaciones de las moléculas en este caso pueden ser en total cuatro: las dos moléculas en la parte izquierda, las dos en la derecha, la molécula № 1 en la izquierda y la № 2 en la derecha y, finalmente, la № 2 en la izquierda y la № 1 en la derecha. Nos interesa conocer la probabilidad de que las dos moléculas se hallen en la parte izquierda; éste es un caso de los cuatro posibles y su probabilidad es igual a 1/4, es decir, $(1/2)^2$. Para tres moléculas tendremos el cuadro siguiente:

en la izquierda	1, 2, 3	0	1,2	1,3	2,3	3	2	1
en la derecha	0	1, 2, 3	3	2	1	1,2	1,3	2,3

Está claro que la probabilidad de que las tres moléculas se encuentren en la mitad izquierda será igual a 1/8, o sea, $(1/2)^3$. No es difícil comprender que en el caso de N moléculas la probabilidad de que todas ellas se encuentren en una parte de la caja será igual a $(1/2)^N$. Porque al añadir una nueva molécula siempre tenemos la posibilidad de colocarla bien en la izquierda o bien en la derecha. Esto quiere decir que, al añadir cada nueva molécula, la probabili-

dad de que todas las moléculas se encuentren en una de las dos partes de la caja se reduce a la mitad.

Para un ciento de moléculas el número $(1/2)^N$ es ya tan pequeño que podemos prácticamente no tener en cuenta la probabilidad de que todas las moléculas se concentren en una mitad de la caja. Pero en un centímetro cúbico de gas no hay un ciento de moléculas, sino cerca de 10^{20}. Si dividimos mentalmente en dos partes el recipiente que lo contiene, la probabilidad de que todas las moléculas se concentren en una mitad de dicho recipiente será igual a $(1/2)^{10^{20}}$. Tomando logaritmos, este mismo número se puede expresar en la forma $10^{-3\cdot 10^{19}}$. Para poner la unidad en esta fracción decimal habría que escribir previamente $3\cdot 10^{19}$ ceros (!). Admitiendo que se pueden escribir tres cifras por segundo (que ya es bastante), se necesitarían para escribir dicho número 10^{19} segundos, es decir, más de 300 mil millones de años, lo que supera diez veces la edad del sistema solar.

Volvamos a referirnos ahora a la tabla de ubicación de las tres moléculas. Sólo en una ubicación, de las ocho posibles, todas las moléculas se concentran en la izquierda. Cualquier otra ubicación se presenta también una sola vez. Pero hay que recordar que las moléculas se numeran convencionalmente. No existen procedimientos que hagan posible distinguir las ubicaciones en que a la izquierda se encuentran las moléculas №№ 1, 2 de las que en esta posición se hallen las №№ 2, 3 ó 1,3. Por consiguiente, a una ubicación, en que en la parte izquierda hay tres moléculas, le corresponden tres ubicaciones en las cuales hay dos moléculas y la misma cantidad de ubicaciones en las cuales se encontrará en la parte izquierda una sola molécula. Por esto, la probabilidad de cierta distribución característica, independiente de los números que tengan las moléculas que la creen, puede medirse por el número de ubicaciones que pueden hacer efectiva dicha distribución. Cuanto mayor sea este número, con tanta más frecuencia se encontrará esta distribución y tanto más probable será.

Este ejemplo nos conduce al concepto de probabilidad del estado de un cuerpo.

Los átomos que constituyen un cuerpo poseen en cada instante unas coordenadas y unas velocidades determinadas. A esta estructura instantánea le llamaremos microestado.

Cualquier cuerpo que se halle en estado de equilibrio con un medio y que conserve invariables todas sus propiedades no se encontrará siempre, sin embargo, en un mismo microestado. Debido al movimiento térmico de las partículas, el cuerpo cambiará continuamente de microestado. Si se trata de un gas, estas variaciones se deben a los movimientos de traslación, a las oscilaciones y a las rotaciones de las moléculas; si de un líquido, a las oscilaciones de

las partículas y al paso de un medio a otro, y si de un sólido, principalmente a las oscilaciones. En cualquier caso, el equilibrio del cuerpo será dinámico.

Pasando de un microestado a otro, el cuerpo retornará repetidas veces a unos mismos estados. Unos de ellos se verificarán con más frecuencia y otros con menos, como se deduce claramente del ejemplo que hemos puesto.

Si durante un gran espacio de tiempo T el cuerpo «vivió» en cierto microestado un tiempo Δt, la probabilidad de este microestado será $\Delta t/T$.

La probabilidad de un microestado viene expresada por la fórmula, hallada por Gibbs, siguiente:

$$w = Ae^{-\mathscr{E}/kT},$$

donde $\mathscr{E}$ es la energía. La constante A tiene en cuenta el número de ubicaciones con las cuales se puede efectuar dicho microestado. Cuando los valores de A son iguales, la probabilidad de un microestado viene determinada por su energía.

La fórmula de Gibbs coincide por su forma con la ley de Boltzmann. ¿En qué relación se encuentra el contenido de estas dos leyes? La fórmula de Boltzmann considera un gran número de moléculas (cuerpos) en un instante y nos dice cómo están distribuidas estas moléculas (cuerpos) por energías. La de Gibbs se aplica a un solo cuerpo (molécula), que «observamos» durante mucho tiempo, y nos da información acerca de la distribución de la energía de dicho cuerpo con el tiempo. Se comprende que esta coincidencia no es casual, pero nosotros no podemos detenernos en esto.

Una de las leyes fundamentales de la naturaleza, como ya dijimos, es el carácter discreto (cuántico) del estado del cuerpo.

Por esto puede hablarse del número de microestados con que se realiza un macroestado dado del cuerpo. Este número se llama peso estadístico del estado macroscópico (o probabilidad termodinámica).

La probabilidad termodinámica W va ligada univocamente a las funciones termodinámicas del cuerpo. No es difícil comprender que el peso estadístico de un estado crece al aumentar la temperatura, crece cuando se funde y se vaporiza el cuerpo, etc. Puede decirse que la probabilidad termodinámica del estado de un cuerpo será tanto más elevada cuanto mayor sea la libertad de movimiento de las partículas que lo constituyen.

La relación entre las magnitudes (microscópicas) que se observan y la probabilidad de los microestados nos la podemos figurar claramente. Se comprende, claro está, que las magnitudes que se observan son el promedio de los valores que la magnitud dada

toma para los microestados. Si, por ejemplo, en el n-ésimo microestado la energía es igual a E_n, la energía media (observada) será

$$E = w_1 E_1 + w_2 E_2 + w_3 E_3 + \dots$$

Las probabilidades w_n deben normalizarse, como es natural, a la unidad ($\sum w_n = 1$).

§ 77. *Transformaciones irreversibles desde el punto de vista molecular*

Del ejemplo que hemos puesto de la caja con el gas, se deduce claramente que la mayor probabilidad la tiene el grupo de estados en que las moléculas están repartidas «uniformemente». Toda desviación de la «uniformidad» —como el desplazamiento de una parte de las moléculas hacia el lado izquierdo de la caja, la ubicación a la izquierda de las moléculas más rápidas, el movimiento dirigido de la mayor parte de las moléculas y, en general, cualquier desviación del desorden en la distribución de las moléculas por puntos y velocidades—, reporta una disminución de la probabilidad del estado. Esta observación nos permite comprender el sentido cinético-molecular del carácter irreversible de las transformaciones reales.

Como quedó antes establecido, el segundo principio de la termodinámica para las transformaciones irreversibles, es decir, la ley del crecimiento de la entropía en los sistemas térmicamente aislados, es una generalización del hecho de que prácticamente sean imposibles una serie de transformaciones. Así, el calor no puede pasar sin compensación de un cuerpo frío a otro caliente, un cuerpo no puede adquirir energía cinética a expensas únicamente de la pérdida de energía interna del medio circundante, un gas puede expandirse espontáneamente, pero no puede comprimirse.

La existencia de las transformaciones irreversibles es una peculiaridad de los fenómenos moleculares. En un fenómeno puramente mecánico, es decir, en una transformación sin rozamiento, el proceso siempre puede invertirse. Un péndulo, al moverse hacia la derecha, pasa en orden inverso por los mismos estados que recorrió cuando se movía hacia la izquierda; una bola de billar despedida por una banda en una dirección cualquiera, si se coloca en su camino una pared elástica, será rechazada por ella y recorrerá en sentido contrario todo el camino que hizo a la «ida». La completa equivalencia de la «ida» y la «vuelta» es evidente en las transformaciones puramente mecánicas. ¿Por qué, entonces, carecen de la propiedad de ser reversibles los procesos moleculares que consideramos como conjunto de movimientos mecánicos de las moléculas? La causa no es más que una. En todas las transformaciones irreversibles au-

menta la probabilidad del estado. Una transformación reversible es un proceso imaginable: su realización es posible en esencia, pero, observado en los espacios de tiempo, de que dispone el hombre, este proceso es prácticamente imposible.

Esto no es difícil de demostrar para cualquiera de las transformaciones irreversibles. El calor pasa del cuerpo caliente al frío, pero no al contrario. En el caso de cuerpos gaseosos, esta transformación se puede representar gráficamente como un proceso de mezcla de moléculas rápidas con moléculas lentas. El proceso inverso no puede ocurrir por la ley del azar, ya que representa la clasificación de las moléculas en rápidas y lentas, es decir, el paso a un estado más ordenado.

Por esta misma causa podemos, con bastante rapidez, mezclar con una pala dos sacos de granos diferentes. Pero aunque continuásemos removiendo el contenido de los dos sacos durante siglos, los granos no se separarían de tal modo que arriba quedasen los de un tipo y abajo los de otro. Y esto a pesar de que el número de granos que hay en los sacos es infinitamente menor que el de moléculas en un milímetro cúbico de sustancia.

Tampoco es difícil comprender la completa improbabilidad del fenómeno inverso a la expansión espontánea de un gas. Si en la caja con tabique que consideramos hace poco hay un gas en la parte izquierda, mientras que en la derecha existe el vacío, al cabo de un corto espacio de tiempo las dos partes de la caja se llenarán uniformemente de gas. Teóricamente puede ocurrir que las moléculas vuelvan a concentrarse en la parte izquierda de la caja. Pero la probabilidad de que esto ocurra es extremadamente pequeña. Su valor, que ya calculamos antes, es de $(1/2)^N$.

Cualquiera que sea la transformación irreversible que sometamos a consideración, el resultado será siempre el mismo: cada proceso irreversible está ligado al crecimiento de la probabilidad del estado.

Así, pues, tenemos dos magnitudes que aumentan cuando las transformaciones son irreversibles: la entropía S, que estudiamos antes, y la probabilidad termodinámica W, que acabamos de considerar. Se nos figura natural que estas dos magnitudes físicas estén relacionadas entre sí. La existencia de esta ligazón fue demostrada por Boltzmann. La fórmula dada por él tiene la forma $S = k \ln W$. La entropía es proporcional al logaritmo de la probabilidad termodinámica del estado.

De este modo, el segundo principio de la termodinámica adquiere otro enunciado: en las transformaciones reversibles no varía la probabilidad del estado; en las irreversibles (refiriéndonos a sistemas aislados) aumenta dicha probabilidad.

§ 78. Fluctuaciones. Límites de aplicación del segundo principio

Cualquier propiedad física será invariable si no varía la distribución de las moléculas por puntos y velocidades. En principio las moléculas de una sustancia pueden cambiar con el tiempo el carácter de la distribución. Pero, como acabamos de decir, entre todas las distribuciones se destacan tan ostensiblemente las más probables, que las desviaciones de ellas deben considerarse como sucesos muy raros. Las características físicas correspondientes a esta distribución más probable se pueden llamar *características medias.* La discrepancia de una característica física medida, respecto de su valor medio para un sistema con gran número de moléculas, es prácticamente imposible de descubrir. Así ocurre cuando las propiedades físicas se estudian en volúmenes que contienen un gran número de moléculas. Pero si el número de partículas que hay en el sistema se hace pequeño, resulta posible observar distribuciones menos frecuentes de las moléculas por puntos y velocidades. Estas distribuciones menos frecuentes corresponderán a valores de las características físicas distintos de los valores medios. Las desviaciones de las características físicas, respecto de sus valores medios, que se ponen de manifiesto en los sistemas con un número de partículas relativamente pequeño, reciben el nombre de *fluctuaciones.* La temperatura y la presión, la capacidad calorífica y la conductibilidad térmica y, en general, cualesquiera propiedades de las partes de un cuerpo que contengan cantidades pequeñas de moléculas, están sujetas a fluctuaciones en torno a los valores medios. Este mismo problema puede abordarse de un modo algo distinto.

Si en un medio gaseoso se sitúa un pequeño espejo suspendido de un hilo delgado, desde el punto de vista macroscópico no puede manifestarse la presión del gas sobre el espejo, ya que las fuerzas que actúan sobre él por todas partes son iguales. Sin embargo, desde el punto de vista molecular, en principio, las variaciones del impulso producidas por los choques de las moléculas en el espejo no tienen que estar necesariamente equilibradas en las diversas partes de su superficie. El espejito, como es muy liviano, puede entrar en oscilaciones de fluctuación. Como se dijo antes, a un grado de libertad del movimiento de cualquier partícula (moléculas, partículas brownianas, gránulos) le corresponde una energía del movimiento térmico caótico igual a $\frac{1}{2}kT$. Esta energía es la que percibe en promedio el espejito. Por otra parte, el trabajo de torsión del hilo en el ángulo $\Delta\varphi$ es igual a $M\Delta\varphi$. Por esto las desviaciones en un ángulo igual, por el orden de magnitud, a $\Delta\varphi\approx\frac{kT}{M}$ serán bastante frecuentes.

Estas fluctuaciones se observan en realidad y su medición puede utilizarse para determinar empíricamente la constante de Boltzmann y, por consiguiente, el número de Avogadro.

Los fenómenos de fluctuación limitan la exactitud de las mediciones. El índice, el espejo o alguna otra pieza del aparato indicador están sometidos a fluctuaciones. A la temperatura ambiente, el límite del error en unidades de energía está próximo a 10^{-20} J. En muchos instrumentos no hemos alcanzado aún este límite, sin embargo, en los mejores aparatos de medida este límite ya se ha conseguido.

Las fluctuaciones limitan las posibilidades de aplicación del segundo principio de la termodinámica. En las oscilaciones de fluctuación se observan transformaciones en las cuales el sistema pasa de un estado más probable a otro menos probable, es decir, la entropía disminuye.

De magnífico ejemplo puede servir el movimiento browniano. En estos experimentos observamos las fluctuaciones de la presión en el pequeño volumen correspondiente a una partícula. Debido a estas oscilaciones casuales de la presión, la partícula puede ser lanzada, por ejemplo, hacia arriba. Pero el movimiento en contra de la fuerza de la gravedad exige trabajo. En este caso el trabajo se realiza a costa del movimiento térmico caótico de las moléculas, o sea, a expensas únicamente de la energía interna de la sustancia y en completa contradicción con el segundo principio de la termodinámica.

A pesar de que en algunos pequeños volúmenes se produzcan a veces efectos con disminución de la entropía, es decir, que contradicen el segundo principio, el sistema en conjunto se subordinará siempre a dicha ley. Debido al carácter fortuito de estos sucesos, el número de transformaciones que se realizan a costa de la energía interna será igual al número de las que se efectúan en sentido contrario. Se puede demostrar rigurosamente que serán inútiles todos los intentos que se hagan de «seleccionar» las transformaciones que contradicen el segundo principio, y que ocurren en pequeños volúmenes aislados, para utilizarlas en la creación de un móvil perpetuo de segunda especie.

El segundo principio de la termodinámica también tiene un límite «por el extremo opuesto». Además de ser inaplicable a los sistemas constituidos por un número muy pequeño de partículas, deja de ser correcto para los sistemas cuyo número de partículas es infinito, como ocurre en el universo o en cualquier parte infinita de él. Como se explicó antes, la esencia del segundo principio de la termodinámica consiste en que el número de estandos de equilibrio es inmensamente mayor que el de distribuciones no equilibradas. Pero en el universo, que está formado por un número infinito de

partículas, esta afirmación pierde su sentido. En efecto, tanto el número de estados de equilibrio como el de estados no equilibrados se hacen, en este caso, infinitos. Como resultado de esto es imposible hablar, refiriéndose al universo en conjunto, de estados distintos por su probabilidad.

13

PROCESOS DE TRANSICIÓN AL ESTADO DE EQUILIBRIO

§ 79. Difusión

Un cuerpo que interacciona con el medio, cambia de estado para establecer el equilibrio con los cuerpos que lo rodean. El estado del cuerpo varia en este caso de manera que su energía interna tiende a un mínimo y la entropía aumenta y se hace máxima cuando el equilibrio se establece. Estas dos tendencias son de ordinario contradictorias y, por esto, es difícil predecir el fenómeno cuando pueden variar la energía y la entropía. Ahora queremos estudiar los fenómenos de difusión, conductibilidad térmica y rozamiento interno que tienen lugar en los sistemas aislados. En otras palabras, vamos a referirnos a la igualación de las concentraciones, temperaturas y velocidades de unas partes del cuerpo con respecto a otras (esto último sólo atañe a los cuerpos líquidos y gaseosos). Como la energía de estos sistemas no puede cambiar, el paso al estado de equilibrio consiste únicamente en un aumento de la entropía.

Las leyes fundamentales de los fenómenos de difusión, conductibilidad térmica y rozamiento interno son bastante semejantes. Comenzaremos su estudio por los procesos de difusión. De igual modo podríamos hablar del equilibrio de la concentración de un gas o de una disolución. Nuestros razonamientos son correctos incluso para las disoluciones sólidas (véase la pág. 689), ya que también en este caso la tendencia al máximo de la entropía obliga a los átomos o a las moléculas de las sustancias a mezclarse, para que en todas las partes del cuerpo se establezca la misma concentración.

Consideremos dos volúmenes, físicamente próximos e infinitesimales, de sustancia, en los cuales las concentraciones de los átomos (o moléculas) que se difunden son respectivamente c y $c+$ $+dc$. Si estos dos volúmenos se hallan entre sí a la distancia dx, la relación $\frac{dc}{dx}$ caracterizará la rapidez con que varía la concentra-

ción. Esta relación se llama *gradiente de concentración*. Si el eje x se elige de manera que su sentido positivo coincida con la dirección de la difusión, $\frac{dc}{dx}$ será una magnitud negativa. La sustancia se desplazará hacia la parte en que las concentraciones son menores.

Esto no significa que todas las moléculas, formando un flujo continuo, se desplacen incesantemente hacia un lado. Al contrario, el movimiento de difusión conserva en un grado considerable los rasgos del desorden propios del movimiento molecular. Las moléculas se mueven desordenadamente, se mueven en todos los sentidos, incluso hacia la parte en que la concentración es mayor, pero la probabilidad de que las moléculas se desplacen hacia el lado «correcto», es mayor. Esto quiere decir que, a través de una superficie imaginaria colocada transversalmente al flujo, serán más las partículas que pasen de la parte de mayor concentración a la de menor que al contrario.

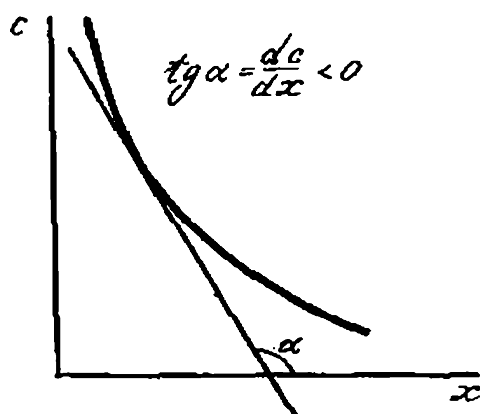


FIG. 88.

La ley fundamental de la difusión afirma que el flujo de sustancia μ, es decir, la masa de dicha sustancia que pasa en la unidad de tiempo por la unidad de superficie, debe ser directamente proporcional al gradiente de concentración negativo:

$$\mu = -D\frac{dc}{dx}.$$

El coeficiente de proporcionalidad D se llama *coeficiente de difusión* Esta ley se justifica porque, dentro de unos límites amplios, el coeficiente de difusión es una constante de la sustancia y del medio.

Tanto la concentración como el flujo de masa deben medirse en las unidades correspondientes. Si la concentración se mide en gramos por cm^3, el flujo debe medirse en gramos por cm^2 y por s. De aquí se deduce que el coeficiente de difusión debe tener una dimensión perfectamente determinada: en el sistema CGS se medirá en cm^2/s.

La caída de la concentración se efectúa generalmente siguiendo la curva colgante que representa la fig. 88. Si nos interesa la parte en que la caída de concentración se puede representar por una línea recta, tenemos que

$$\mu = -D\frac{c_2 - c_1}{x_2 - x_1},$$

donde c_1 y c_2 son los valores de la concentración en los puntos x_1 y x_2.

Los coeficientes de difusión oscilan dentro de límites amplios. He aquí algunos ejemplos:

1) Para los gases a temperaturas de 0—15°C:

hidrógeno → oxígeno,	$D=0{,}778$ cm²/s;
aire → oxígeno,	$D=0{,}178$ cm²/s;
aire → sulfuro de carbono,	$D=0{,}099$ cm²/s.

2) Para las soluciones de vitriolo azul que se difunden en agua pura (concentración c, en gramos equivalentes por litro):

c	D, cm²/día
0,1	0,39
0,5	0,29
0,95	0,23

§ 80. Conductibilidad térmica y viscosidad

Razonamientos muy semejantes a los anteriores podemos hacer para explicar el proceso de igualación de la temperatura. Si la temperatura de un cuerpo en distintos puntos es diferente, la entropía no es máxima. Para que se establezca el equilibrio, la velocidad media de las moléculas, y, por consiguiente, las temperaturas deben igualarse.

Si en dos puntos contiguos las temperaturas son T y $T+dT$ y dichos puntos se hallan entre sí a la distancia dx, la relación $\frac{dT}{dx}$ caracterizará la rapidez con que desciende la temperatura. Esta relación se llama *gradiente de temperatura.*

Al igualarse las temperaturas, las partes del cuerpo que tienen más energía la disminuyen, y las partes con energía menor reciben el calor de las más ricas. En cierto sentido convencional, el calor «pasa» de una parte a otra. La cantidad de calor que pasa de una parte del cuerpo a otra a través de una intersuperficie de área igual a la unidad, en la unidad de tiempo, recibe el nombre de *flujo de calor q.* Lo mismo que en los fenómenos de difusión, puede suponerse que el flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura negativo. Cuanto mayor sea la diferencia de temperaturas, con tanta mayor rapidez pasará el calor. La fórmula

$$q=-\varkappa\frac{dT}{dx}$$

también se justifica aquí por el hecho de que el coeficiente de proporcionalidad $\varkappa$, que se denomina *coeficiente de conductibilidad térmica*, es una constante de la sustancia y no depende de las magnitu-

des de los flujos caloríficos que pasan. Cuando la temperatura desciende linealmente, la fórmula se simplifica y toma la forma

$$q = -\varkappa \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}.$$

No es difícil hallar la dimensión del coeficiente de conductibilidad térmica. En el sistema CGS se medirá en cal/(cm·s·°K). De la fórmula que define el sentido de $\varkappa$ se deduce claramente que $\varkappa$ es el flujo de calor que pasa por la superficie de 1 cm² en 1 s cuando la temperatura disminuye 1°K en la longitud de 1 cm.

Los valores del coeficiente de conductibilidad térmica, lo mismo que los del coeficiente de difusión, oscilan dentro de amplios límites.

Ofrecemos algunos ejemplos:

1) Cuerpos sólidos (0—18°C): corcho 0,00012, madera 0,0008, cuarzo fundido 0,0033, plata 1,06 cal/(cm·s·°K).

2) Líquidos: sulfuro de carbono (14°C) $2\cdot10^{-4}$, ácido sulfúrico 30% (32°C) $62{,}4\cdot10^{-4}$, mercurio (0°C) 0,2 cal/(cm·s·°K).

3) Gases (0°C): anhídrido carbónico $3{,}4\cdot10^{-5}$, aire $5{,}7\cdot10^{-5}$, hidrógeno $40{,}6\cdot10^{-5}$ cal/(cm·s·°K).

El tercer fenómeno de este tipo consiste en la igualación de las velocidades. Si un gas, o un líquido, se mueve en cierta dirección, de manera que diversas capas suyas se trasladan con velocidades distintas, este movimiento será inestable. Más tarde o más temprano las velocidades de movimiento deberán igualarse: las capas lentas se acelerarán y las rápidas se retardarán. Este fenómeno se llama también *rozamiento interno* o *viscosidad*. Este fenómeno se observa en todos los cuerpos excepto en el helio II (véase la pág. 700).

Consideremos un líquido, o un gas, que se mueve en la dirección del eje x. Supongamos que las capas del líquido se mueven a distinta velocidad. Sobre el eje y, perpendicular a la dirección de la corriente del líquido o del gas, tomamos dos puntos próximos situados entre sí a la distancia dy. Las velocidades de la corriente en estos dos puntos se diferencian en dv. La relación $\frac{dv}{dy}$ es el gradiente de la velocidad de la corriente y caracteriza la rapidez con que varía dicha velocidad a medida que la corriente se aleja de la superficie del líquido. Para mayor claridad podemos suponer que se trata de un río rápido en que las velocidades de las corrientes son máximas en la superficie y decrecen paulatinamente hacia el fondo del río.

Si en un instante cualquiera se eliminan las causas del movimiento del líquido, las velocidades con que se mueven las distintas capas empezarán a igualarse de acuerdo con la ley del aumento de la entropía. Para que esta igualación sea posible es necesario que exista la fuerza de rozamiento interno, que actúa entre las capas del líquido o del gas. La magnitud de esta fuerza referida a la uni-

dad de superficie de la capa se supone proporcional al gradiente de la velocidad, es decir,

$$f = -\eta \frac{dv}{dy}.$$

Aquí η es el *coeficiente de viscosidad* (o de rozamiento interno). Su dimensión en el sistema CGS es g/(cm·s). Esta unidad se conoce con el nombre de *poise* (P). En el SI su dimensión es $N \cdot s/m^2 = 10$ P.

La viscosidad de los diversos cuerpos oscila entre límites aún más amplios que los dos coeficientes análogos que hemos estudiado antes. Véanse unos ejemplos:

1) Sólidos: vidrio (710°C) $4,5 \cdot 10^{10}$, vidrio (420°C)$4 \cdot 10^{18}$, plomo (9°C) $4,7 \times 10^{14}$, hielo (—14°C) $8,5 \cdot 10^{12}$ P.

2) Líquidos: éter etílico (25°C) 0,0022, agua (20°C) 0,01, glicerina (0,8% agua, a 18°C) 13,93 P.

3) Gases: hidrógeno (0°C) $8,49 \cdot 10^{-5}$, aire (0°C) $17,19 \cdot 10^{-5}$ P.

Es curioso que el hidrógeno tenga la mitad de viscosidad que el aire y una conductibilidad térmica siete veces mayor que él. Esto explica por qué se utiliza el hidrógeno para la refrigeración de los turbogeneradores potentes.

§ 81. *Rapidez de igualación*

Es bien conocido que el equilibrio puede establecerse en los plazos más diversos. La temperatura de un trozo de hierro caldeado que se echa al agua y la temperatura de esta última se equilibran muy pronto. Por el contrario, la temperatura del aire y la de un ladrillo calentado se equilibran lentamente. El nitrógeno se difunde en oxígeno en un instante, pero la igualación de las concentraciones de una solución de vitriolo azul tarda muchos días. La igualación de velocidades también puede realizarse en tiempos notoriamente distintos según se trate de un gas o de un líquido viscoso.

No es posible dar una respuesta universal (o fórmula general) acerca de los tiempos de igualación, ya que la geometría del experimento influye en estos tiempos. El cuerpo que se enfría puede tener la forma de un cilindro o de una lámina; el gas que se difunde puede hallarse en el instante inicial dentro de un pequeño volumen esférico o puede estar repartido por una superficie cualquiera; el rozamiento interno se puede observar en tubos de secciones distintas o en depósitos abiertos. Estas circunstancias deben tenerse especialmente en cuenta cada vez y el cálculo de los valores exactos de los tiempos de igualación es un problema matemático difícil. No obstante, prescindiendo de las particularidades geométricas, se puede intentar resolver el problema en forma general, si renunciamos al objetivo de obtener una fórmula exacta y nos conformamos con encontrar solamente las proporciones que existen entre las magnitudes físicas. Por este camino le ayudan al físico los razonamientos acerca

de las dimensiones de las magnitudes físicas que deben estar ligadas entre sí.

Consideremos, por ejemplo, el fenómeno de la difusión. Está claro que el tiempo t que tarda en igualarse la concentración depende ante todo de las dimensiones de la región en que ocurre la difusión (longitud característica L) y de las propiedades de las sustancias que se difunden (coeficientes de difusión característicos D). La ecuación de la difusión tiene la forma $\mu = -D\frac{dc}{dx}$. Escribamos para ella la ecuación de las dimensiones:

$$\frac{M}{L^2T} = [D]\frac{M}{L^4}.$$

Vemos que $T = \frac{L^2}{[D]}$, es decir, el tiempo de igualación $t = \text{const}\cdot\frac{L^2}{[D]}$ y no depende de la concentración.

De aquí podemos hacer la siguiente conclusión: cualquier solución rigurosa del problema del tiempo de igualación de la concentración en los procesos de difusión nos conducirá siempre a la ecuación

$$t = \text{const}\cdot\frac{L^2}{D},$$

donde const es una magnitud adimensional constante que depende de las condiciones geométricas del problema. La magnitud L, de cuyo cuadrado depende la velocidad de igualación de la concentración, tiene el sentido de la medida geométrica de la región en que tiene lugar dicha igualación. Por lo tanto, si dentro de los límites de un centímetro se iguala la concentración en 10 s, por ejemplo, se tendrá que en los límites de dos centímetros se igualará en 40 s.

De un modo exactamente igual se puede resolver el problema de la igualación de la temperatura. En la ley fundamental de este fenómeno figuran la cantidad de calor, el coeficiente de conductibilidad térmica, la temperatura y la distancia. Pero el incremento de la cantidad de calor por unidad de volumen se puede representar de la forma

$$dq = \rho c_p\, dT;$$

c_p es el calor específico a presión constante, ρ es la densidad (de modo que $c_p\rho$ es la capacidad calorífica de la unidad de volumen). Por lo tanto, deberán estar ligadas entre sí las magnitudes siguientes: la temperatura, la longitud, el tiempo, la densidad, la capacidad calorífica y la conductibilidad. Puede comprobarse sin dificultad que el tiempo t no puede depender de la temperatura y viene expresado por las demás magnitudes de una forma única:

$$\frac{L^2\rho c_p}{\varkappa}.$$

Por consiguiente, el tiempo de igualación de la temperatura se expresa por la fórmula

$$t = \mathrm{const}\cdot\frac{L^2}{\chi},$$

donde llamamos χ a la combinación de constantes $\frac{\varkappa}{\rho c_p}$. La magnitud χ se llama *difusividad térmica*. La introducción de este coeficiente está completamente justificada por el deseo de hacer análogas las fórmulas de igualación de la concentración y de la temperatura. Los coeficientes de difusión y de difusividad térmica tienen la misma dimensión y son completamente análogos en los dos fenómenos de igualación que hemos estudiado.

Vemos, pues, qué es lo que determina el enfriamiento del cuerpo. El proceso transcurre tanto más despacio cuanto mayor es la densidad y capacidad calorífica y cuanto menor es el coeficiente de conductibilidad térmica.

Ejemplo. Se tienen dos barras de iguales dimensiones, una de cuarzo fundido y otra de plata. Para el cuarzo $\varkappa=0{,}0033$ cal/(cm·s·°K), $\rho=2{,}65$ g/cm^3, $c_p=0{,}1844$ cal/(g·°K), es decir, $\chi=0{,}676\cdot10^{-2}$ cm^2/s. Para la plata $\varkappa=1{,}06$ cal/(cm×s·°K) $\rho=10{,}5$ g/cm^3, $c_p=0{,}0558$ cal/(g·°K), o sea, $\chi=1{,}71$ cm^2/s. Esto significa que el tiempo que tarda en igualarse la temperatura en la plata es 253 veces menor que el que tarda en el cuarzo.

Lo mismo que para la difusión, para la igualación de las temperaturas es característica la dependencia del cuadrado de la distancia: el tiempo de igualación es proporcional al cuadrado de la medida lineal de la región.

Sin repetir razonamientos análogos puede escribirse la fórmula del tiempo de igualación de las velocidades de las partes de un líquido o de un gas. Es natural que pueda dársele la misma forma:

$$t = \mathrm{const}\cdot\frac{L^2}{\nu}.$$

El coeficiente ν que determina la rapidez con que se igualan las velocidades de movimiento, es igual a $\frac{\eta}{\rho}$ y se llama *viscosidad cinemática*.

Ejemplo. Para el agua $\eta=0{,}01$ P, $\rho=1$ g/cm^3, es decir, $\nu=0{,}01$ cm^2/s; para la glicerina $\eta=13{,}9$ P, $\rho=1{,}25$ g/cm^3, o sea, $\nu=11{,}1$ cm^2/s. Esto quiere decir, que si cualquier perturbación en la glicerina tarda en amortiguarse 0,1 s, esta misma perturbación tardará en amortiguarse en el agua 2 min.

§ 82. *Procesos estacionarios*

Si un cuerpo se abandona a sí mismo, las diferencias de temperaturas, de concentraciones y de velocidades del movimiento de sus partes se acaban igualando necesariamente de acuerdo con el principio del aumento de la entropía. Sin embargo, es completamente posible que haya un estado del cuerpo en el cual, durante largo tiempo, exista un flujo invariable de calor o de sustancia o una distribución invariable de las velocidades del movimiento de unas partes del cuerpo con respecto a otras. Los procesos de este tipo se denominan *estacionarios*. Es natural que durante un proceso estacionario el cuerpo no se encuentre en estado de equilibrio.

¿En qué condiciones son posibles estos procesos? Figurémonos una barra metálica a la que por un extremo se le suministra cierta cantidad de calor cada instante y cuyo otro extremo se halla en contacto térmico con un cuerpo más frío. Las condiciones con que la temperatura a lo largo de la barra no varían, es decir, las condiciones de constancia del gradiente de temperatura en todo el recorrido del flujo calorífico, se cumplirán en el caso en que la cantidad de calor que absorbe el cuerpo frío sea exactamente igual a la cantidad de calor suministrado durante el mismo tiempo por el cuerpo más caliente. En condiciones análogas es posible también un proceso de difusión estacionario. Para crearlo hay que suministrar en un punto del cuerpo y absorber en otro cantidades iguales de una sustancia, conservando invariable de este modo una determinada diferencia de concentraciones entre dos partes del cuerpo.

Un proceso estacionario de viscosidad se puede conseguir, por ejemplo, en el espacio entre dos cilindros coaxiles que giren a velocidades distintas. Como junto a las paredes sólidas tendrá el líquido, o el gas, una velocidad igual a la de ellas, dentro del propio líquido se creará una diferencia de velocidades constante.

El proceso estacionario no se produce inmediatamente. Durante cierto tiempo se efectúa el establecimiento del mismo.

Supongamos que la barra por la cual se transmite el calor tiene un extremo sumergido en nieve. En el instante inicial la temperatura de la barra será igual a cero en todos sus puntos. Si ahora ponemos el otro extremo en contacto térmico con agua hirviendo, la temperatura comenzará a elevarse en todos los puntos de la barra, aunque, claro está, no con la misma rapidez. El extremo puesto en contacto con el agua en ebullición se calentará casi inmediatamente hasta una alta temperatura. Donde más lentamente se elevará ésta será en el extremo de la barra sumergido en la nieve. Al cabo de cierto tiempo cesará el aumento de la temperatura en todos los puntos de la barra y se establecerá una distribución completamente determinada, el proceso se habrá hecho estacionario. El carácter

de la distribución de las temperaturas depende de la cantidad de calor que se suministra (absorbe) en la unidad de tiempo.

En una plancha eléctrica, calentada por una resistencia en espiral, la parte central está a la temperatura más elevada, luego ésta desciende hacia los bordes exteriores. En el medio circundante, el más caliente, como es natural, es el aire que está en contacto con la plancha. Después la temperatura decrece más rápidamente, debido a la pequeña conductibilidad térmica del aire.

Para cálculos aproximados y pequeñas dimensiones del cuerpo en contacto con el aire o un líquido, se puede no tener en cuenta la curva de caída de la temperatura y referirse a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y del medio, $T - T_0$. El flujo de calor transmitido por el cuerpo al medio en la unidad de tiempo se puede suponer, en este caso, que es proporcional a la antedicha diferencia de temperaturas:

$$q = k(T - T_0).$$

El coeficiente k se llama *coeficiente de traspaso de calor*. Esta es una magnitud técnica importante. Su valor y los cálculos ligados a ella se estudian en el curso de termotécnica.

Llamemos P a la potencia suministrada al cuerpo, por ejemplo, la potencia eléctrica en el caso de la plancha. La condición para que el proceso sea estacionario impone la igualdad

$$P = k(T - T_0).$$

Aquí T es la temperatura del cuerpo que se estableció en este proceso estacionario, $T = T_0 + \frac{P}{k}$. Esta temperatura puede variar considerablemente en dependencia de la potencia que se suministre y de las condiciones del intercambio térmico.

Conviene hacer aquí una observación acerca de la temperatura que marca un termómetro puesto «al sol». El termómetro participa en el proceso estacionario de transmisión del calor solar al aire circundante. En dependencia del valor que tenga el coeficiente de traspaso de calor, el termómetro sometido a los rayos del sol puede indicar, literalmente, cualquier cosa. La temperatura medida en estas condiciones es la del termómetro, pero en modo alguno puede caracterizar el estado del tiempo.

En los problemas análogos relativos a la difusión no nos detendremos.

§ 83. Movimiento en un medio viscoso

Los criterios concernientes a las dimensiones de las magnitudes físicas ayudan a resolver problemas de enorme importancia práctica, como, por ejemplo, los problemas acerca del paso estacionario

de un fluido junto a un obstáculo sumergido en él o, lo que es lo mismo, del movimiento de un sólido en un medio.

El problema más importante es el de la fuerza de la resistencia que experimenta un cuerpo al moverse en un medio. Esta fuerza de resistencia puede depender de las dimendiones L del cuerpo, de la velocidad de su movimiento u y de las propiedades del fluido, concretamente, de su densidad ρ y de su viscosidad η. Otras magnitudes no deben intervenir en este proceso.

Elijamos primeramente una cantidad adimensional constituida por L, u, ρ y η. Recordaremos que la viscosidad cinemática $\nu=\eta/\rho$ tiene la dimensión L^2T^{-1}, pero esta misma dimensión la tiene el producto Lu. Por consiguiente

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho Lu}{\eta}=\frac{Lu}{\nu}$$

es una cantidad adimensional que se designa como hemos indicado y se llama *número de Reynolds*. Se puede comprobar que Re es la única combinación adimensional de las magnitudes antedichas. Otras magnitudes adimensionales pueden ser únicamente funciones del número de Reynolds, f (Re). Si los movimientos de distintos cuerpos en líquidos diferentes se reducen a un mismo valor de Re, estos movimientos se dice que son semejantes. Existe una gran disciplina técnica —la teoría del modelo— ,en la cual las conclusiones acerca de las peculiaridades de un fenómeno se sacan basándose en la observación de un fenómeno semejante en un modelo.

Volvamos ahora al problema planteado: buscar la expresión de la fuerza de la resistencia que experimenta un cuerpo que se mueve en un medio.

La dimensión de esta fuerza es MLT^{-2}. Expresémosla en función de las dimensiones de las magnitudes con que operamos, puesto que de otras no puede depender. Entonces

$$MLT^{-2}=[\rho]^{\alpha}[u]^{\beta}[L]^{\gamma}[\eta]^{\delta},$$

es decir,

$$MLT^{-2}=M^{\alpha}L^{-3\alpha}L^{\beta}T^{-\beta}L^{\gamma}M^{\delta}L^{-\delta}T^{-\delta}.$$

Por consiguiente,

$$\alpha+\delta=1,\quad -3\alpha+\beta+\gamma-\delta=1,\quad -\beta-\delta=-2.$$

Expresando α, β, y γ en función de δ, obtenemos

$$\alpha=1-\delta,\quad \beta=2-\delta,\quad \gamma=2-\delta.$$

De este modo, en el caso más general, la fuerza F puede representarse en forma de una suma, cada uno de cuyos sumandos tiene la

dimensión hallada, es decir,

$$F = A\,[\rho^{1-\delta}u^{2-\delta}L^{2-\delta}\eta^{\delta}] = \rho u^2 L^2 A\left[\left(\frac{Lu\rho}{\eta}\right)^{-\delta}\right],$$

donde A son unos coeficientes numéricos. Así, pues, queda demostrado que la fuerza deberá expresarse por la fórmula

$$F = \text{const}\cdot \rho u^2 L^2 f\,(\text{Re}).$$

Este resultado lo hemos obtenido partiendo exclusivamente de razonamientos acerca de la dimensión (!) La función f (Re) nos es desconocida y habrá que hallarla experimentalmente.

Por medio de simples consideraciones podemos obtener las fórmulas definitivas para los casos de frontera. Si la velocidad es pequeña, F deberá ser proporcional a la primera potencia de la velocidad u. Para esto f (Re) tendrá que ser igual a 1/Re y, por lo tanto,

$$F = \text{const}\cdot \eta u L.$$

El valor numérico de la constante depende de la forma del cuerpo. Para una bola

$$F = 6\pi\eta u r$$

(siendo r el radio de la bola). Esta expresión se llama fórmula de Stokes.

Ejemplo. Una bolita de mercurio ($r = 0{,}63$ mm), al descender en glicerina con la velocidad de 0,6 cm/s, experimenta una fuerza de rozamiento de cerca de 8 din.

Si las velocidades son muy grandes, el movimiento del líquido respecto del cuerpo deja de ser estacionario. Se produce un movimiento vortiginoso o turbulento. El cuerpo puede moverse estacionariamente, pero las partículas del líquido se mueven de un modo más o menos casual. Debido a la remoción intensiva, la transición del movimiento de una capa a otra deja de depender de la viscosidad. Esto puede suceder únicamente en el caso en que f (Re) tienda al límite al aumentar la velocidad. Por esto, a grandes velocidades del movimiento, la fuerza de resistencia se hace proporcional al cuadrado de la velocidad:

$$F = \text{const}\cdot \rho u^2 L^2.$$

§ 84. Coeficientes de difusión, de viscosidad y de conductibilidad térmica de los gases

El proceso de establecimiento del equilibrio en los gases está ligado estrechamente con las características examinadas en el párrafo anterior. La igualación de las temperaturas, concentracio-

nes o velocidades de unas partes del gas con respecto a otras se produce gracias a que las moléculas se mezclan. La rapidez con que se efectúa esta mezcla depende del papel que desempeñan los choques entre las moléculas. Cuando el tiempo de recorrido libre es grande, ocurre, por ejemplo, lo siguiente: las moléculas rápidas penetran en poco tiempo en las regiones en que estaban las lentas; las moléculas de la mezcla se propagan pronto por el gas fundamental.

Es muy natural la afirmación de que el tiempo de igualación deberá ser en los tres procesos próximo, en orden de magnitud, al tiempo de recorrido libre de las moléculas. En ejemplos concretos esto se puede confirmar por medio de cálculos teóricos en los que nosotros no nos detendremos.

De la igualdad, tiempo de igualación $\tau = l/v$, precindiendo del coeficiente de proporcionalidad adimensional, que generalmente es igual a la unidad por el orden de magnitud, obtenemos, basándonos en el § 81, una expresión totalmente equivalente para los coeficientes de difusión *), viscosidad cinemática y difusividad térmica (suponemos $L \approx l$): $D \sim \nu \sim \chi \sim vl$.

La tabla siguiente muestra cómo se cumple esta predicción:

para el aire	para el hidrógeno
$\nu = 0{,}13$	$\nu = 0{,}94$
$\chi = 0{,}18$	$\chi = 1{,}3$
$vl = 0{,}27$	$vl = 1{,}9$

Los resultados deben tenerse por buenos. La coincidencia en el orden de magnitud no puede considerarse casual si se recuerda lo amplios que son los límites en que varían las magnitudes a que nos referimos.

Conociendo la expresión del coeficiente de conductibilidad térmica en función de la difusividad térmica, obtenemos:

$$\varkappa \sim \rho v l c_p \sim \frac{m c_p v}{\sigma},$$

donde m es la masa de la molécula.

En esta fórmula se ha simplificado el número de moléculas por unidad de volumen n. De aquí se deduce que la conductibili-

*) Debe tenerse en cuenta que junto con la difusión de una sustancia en otra está totalmente justificado el concepto de autodifusión, es decir, el movimiento de las moléculas entre sus semejantes, por ejemplo, la difusión de hidrógeno en hidrógeno, de oxígeno en oxígeno, etc. La investigación de este fenómeno se hizo posible después de introducir el método de los átomos, y, por consiguiente, de las moléculas, trazadores.

De acuerdo con lo que acabamos de decir, D es aquí el coeficiente de autodifusión.

dad térmica de un gas no depende de su densidad, ni, por lo tanto, de la presión. Hay que prestarle atención a esta deducción que, aunque inesperada, es completamente correcta. El aumento de la densidad de un gas no determina la elevación de su conductibilidad térmica.

Estudiando la fórmula del coeficiente de conductibilidad térmica se puede hacer otra predicción. Como el diámetro eficaz depende poco de la temperatura (en general, σ disminuye un poco al aumentar ésta), lo mismo que la capacidad calorífica, y la velocidad térmica es proporcional a $\sqrt{T}$, el coeficiente de conductibilidad térmica debe ser proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura.

Las cifras que citamos a continuación dan una idea de la exactitud con que se cumplen ambas predicciones.

Por ejemplo, para el nitrógeno tomado a 0°C, 325°C y 500°C,

$$\varkappa_3:\varkappa_2:\varkappa_1 = 1,93:1,65:1,$$
$$\sqrt{T_3}:\sqrt{T_2}:\sqrt{T_1} = 1,68:1,48:1.$$

La conductibilidad térmica aumenta con la temperatura algo más de prisa que proporcionalmente a $\sqrt{T}$, debido a la variación del diámetro eficaz y de la capacidad calorífica. En cuanto se refiere a la independencia respecto de la presión, como acabamos de ver, tiene lugar en un intervalo muy amplio de presiones.

Exactamente igual, tampoco depende de la presión y de la densidad del gas su viscosidad dinámica $\eta \sim \rho v l$. El comportamiento térmico de la viscosidad de un gas perfecto debe coincidir con el comportamiento de la conductibilidad térmica, es decir, la proporcionalidad debe ser la misma. Unos ejemplos númericos ayudarán a recordar lo dicho.

Para el nitrógeno (T_1=273°K, T_2=289°K, T_3=296°K)

$$\eta_3:\eta_2:\eta_1 = 1,06:1,04:1,$$
$$\sqrt{T_3}:\sqrt{T_2}:\sqrt{T_1} = 1,04:1,03:1.$$

Es sorprendente la constancia de la viscosidad del gas (CO_2): cuando la presión aumenta 380 veces, de 2 a 760 mm de la columna de mercurio, la viscosidad de hecho no cambia, permanece todo el tiempo igual a $14,8 \cdot 10^{-5}$ P salvo una unidad en la tercera cifra.

§ 85. Gases ultraenrarecidos

Se llaman así los gases en que el recorrido libre es mayor que las dimensiones lineales del recipiente. En condiciones normales el recorrido libre es una magnitud del orden de 10^{-5} cm. El recorrido libre es inversamente proporcional a la densidad. Por consi-

guiente, a presiones del orden de 10^{-4} mm de la columna de mercurio, el recorrido libre medirá decenas de centímetros. En un recipiente cuya dimensión sea de cerca de 10 cm, a esta presión obtenemos el vacío o el gas ultraenrarecido.

Debemos advertir que en el vacío también se mide la densidad molecular en números enormes. A la presión antes indicada, en 1 cm^3 de gas hay billones de moléculas.

Las moléculas que dejan de chocar entre sí y chocan únicamente con las paredes del recipiente introducen una particularidad específica en el comportamiento del gas de este tipo. Pierde su sentido una serie de conceptos. Ya no puede hablarse de rozamiento interno de las moléculas del gas, puesto que en dicho gas no pueden formarse capas de moléculas que intercambien velocidades. No puede hablarse de la presión que ejerce una parte del gas sobre otra (aunque el concepto de presión del gas sobre las paredes del recipiente conserva su sentido). También pierde su sentido el concepto de intercambio calorífico entre las partes del gas y, en general, todos los conceptos relacionados con la interacción de las partes del gas. Un gas ultraenrarecido interacciona solamente con los cuerpos sumergidos en él.

Las peculiaridades del vacío como estado físico especial del gas conviene ilustrarlas con unos ejemplos.

Dos placas, cuyas temperaturas respectivas son T_1 y T_2, se encuentran en el vacío, ¿cómo se escribirá la expresión del flujo de calor transportado de la una a la otra? La esencia del intercambio calorífico consistirá en este caso en que las moléculas del gas, al chocar con una placa, serán despedidas por ella con la velocidad media correspondiente a su temperatura. En cuanto se refiere a la expresión del flujo de calor, observando la conocida fórmula

$$q = \varkappa \frac{T_1 - T_2}{L} = \rho c v l \frac{T_1 - T_2}{L},$$

vemos que la variación consiste en que el papel de recorrido medio lo desempeña ahora la distancia entre las placas L. Por lo tanto, la expresión del flujo de calor debe tomar, en el caso de los gases ultraenrarecidos, la forma siguiente:

$$q = \rho c v (T_1 - T_2).$$

Si se continúan enrareciendo los gases ultraenrarecidos, de acuerdo con esta fórmula el flujo de calor debe decrecer una vez que el recorrido libre se hace igual a las dimensiones lineales del recipiente. Esto se observa en realidad.

También son peculiares del gas ultraenrarecido las condiciones de equilibrio de gas contenido en dos vasijas comunicantes a distinta temperatura. En el caso de un gas ordinario, las presiones en

las dos vasijas comunicantes serán iguales a distintas temperaturas; las densidades del gas, por el contrario, serán diferentes e inversamente proporcionales a las temperaturas. La igualdad de las presiones es necesaria para el equilibrio, ya que, de lo contrario, debido a las colisiones de las moléculas, el gas de una vasija expulsaría al de la otra.

En el caso del vacío todo ocurre de un modo completamente distinto. Las colisiones entre moléculas no existen, por lo que el flujo de moléculas de una parte de la vasija a la otra no encuentra dificultad. La condición de equilibrio consistirá en la igualdad de los flujos de moléculas. Si en la unidad de volumen hay n partículas y éstas se mueven con la velocidad v, en la unidad de tiempo pasarán por la unidad de superficie nv moléculas. Por lo tanto, cuando existe equilibrio, $n_1v_1=n_2v_2$. Como el número de moléculas en la unidad de volumen es proporcional al cociente de dividir la presión por la temperatura (lo que se deduce de la ecuación de estado del gas perfecto) y como la velocidad de las moléculas es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura, la condición de equilibrio toma la forma

$$\frac{p_1}{\sqrt{T_1}}=\frac{p_2}{\sqrt{T_2}} .$$

De este modo, son iguales entre sí, no las presiones, sino las relaciones de las presiones a las raíces cuadradas de las temperaturas. Si se aumenta la densidad del gas, las presiones comenzarán a igualarse paulatinamente y llegaremos al equilibrio ordinario cuando el recorrido libre se haga suficientemente pequeño.

II

CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

14

CAMPO ELÉCTRICO

§ 86. Características vectoriales de un campo eléctrico: intensidad y desplazamiento

La existencia de un campo eléctrico en el espacio puede conocerse por muchos indicios. En primer lugar, por la propiedad que posee dicho campo de crear una fuerza que actúa sobre las cargas eléctricas y por la propiedad de inducir cargas eléctricas en la superficie de un cuerpo metálico neutro.

La medida de la fuerza que actúa sobre una carga q nos lleva a la conclusión de que la fuerza $\boldsymbol{F}$ puede tener diversos valores y direcciones en distintos puntos del espacio, y en un punto dado es proporcional a la carga q. De aquí se deduce que es posible caracterizar el campo eléctrico por su *intensidad* $\boldsymbol{E}$, definida como

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q}.$$

En este caso hay que convenir que q es pequeña; entonces, primero, puede medirse $\boldsymbol{E}$ en puntos del espacio suficientemente próximos entre sí y, segundo, el campo propio de la carga q no altera sensiblemente el campo que se mide.

El campo de cualquier vector se caracteriza frecuentemente por las llamadas líneas vectoriales. La tangente a cada punto de una línea vectorial coincide con la dirección del vector en este punto. Esto también se refiere al campo eléctrico, que se puede caracterizar por medio de las líneas del vector intensidad eléctrica $\boldsymbol{E}$.

Ejemplos numéricos. 1. La intensidad del campo eléctrico de un conductor para el alumbrado es de decenas de voltios por centímetro.

2. La intensidad del campo eléctrico de la Tierra cerca de su superficie constituye ~ 100 V/m $= 1/300$ unidades CGS.

3. La intensidad del campo eléctrico del núcleo del átomo de hidrógeno a la distancia correspondiente al radio de la «órbita» del electrón es de $19{,}2 \cdot 10^6$ unidades CGS $= 57{,}6 \cdot 10^{10}$ V/m.

4. La intensidad del campo eléctrico con que se produce la descarga disruptiva en el aire es de 30 kV/cm $= 100$ unidades CGS.

Un experimento para determinar las cargas inducidas por un campo puede hacerse valiéndose de dos placas metálicas pequeñas montadas en un mango aislante (placas de Mie, en honor del físico alemán G. Mie) (fig. 89). Introduciendo en el campo las dos placas unidas y separándolas con cuidado después, puede recogerse en una de las dos placas la carga positiva y en la otra, la negativa y

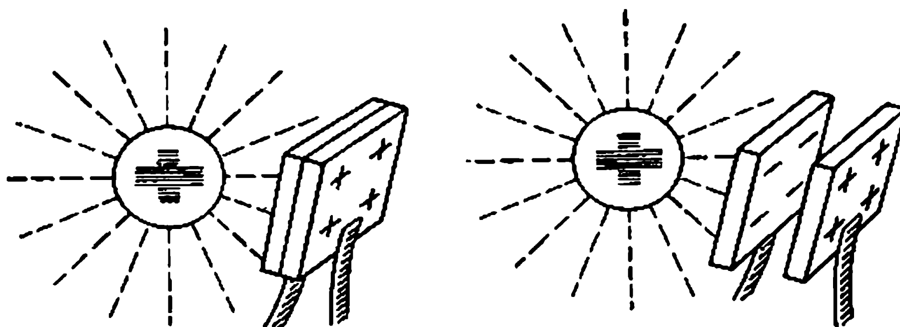


FIG. 89.

medir la cantidad de electricidad inducida con un electrómetro o con un galvanómetro balístico.

La experiencia demuestra que siempre puede hallarse una posición de la superficie en la cual no se inducirá en ella electricidad. En los cuerpos isótropos homogéneos (y, por ahora, no consideramos otros) ocurre esto cuando la superficie se coloca paralelamente al vector $\boldsymbol{E}$. Por el contrario, la inducción eléctrica será máxima si la superficie se coloca perpendicularmente al vector $\boldsymbol{E}$. De aquí se deduce la posibilidad de introducir otro vector más para describir el campo eléctrico, concretamente, el vector *desplazamiento eléctrico* $\mathfrak{D}$, que se define por la siguiente condición. El vector $\mathfrak{D}$ estará dirigido según la normal a las placas de Mie, cuando éstas ocupan la posición óptima con respecto a la inducción, es decir, cuando en ellas se induzca la carga máxima. Si miramos de frente al vector $\mathfrak{D}$, debemos ver la placa de Mie positiva. En todos los casos, excepto en los cuerpos anisótropos, los vectores $\mathfrak{D}$ y $\boldsymbol{E}$ coinciden en dirección. En valor absoluto

$$|\mathfrak{D}| = \sigma,$$

donde σ es la densidad superficial de la carga que se encuentra en la placa de Mie. Como la densidad superficial σ puede escribirse

así: $\frac{dq}{dS_\perp}$, tendremos que

$$|\mathfrak{D}| = \frac{dq}{dS_\perp}.$$

Hemos dicho anteriormente que el campo eléctrico puede caracterizarse por las líneas del vector E. Está claro que también puede caracterizarse por las líneas del vector $\mathfrak{D}$. Estas últimas se llaman *líneas de fuerza eléctricas*. Se admite que el número de líneas de fuerza que pasan por la unidad de superficie perpendicular a ellas es igual a $|\mathfrak{D}| = \mathfrak{D}$, y la magnitud

$$dN = \mathfrak{D}\, dS_\perp,$$

se llama *flujo eléctrico* a través del área $dS_\perp$. Si una superficie oblicua dS es atravesada por el mismo flujo eléctrico que la $dS_\perp$, se tendrá que

$$dS = \frac{dS_\perp}{\cos\alpha},$$

donde α es el ángulo comprendido entre la normal a la superficie y las líneas de fuerza, es decir,

$$dN = \mathfrak{D} \cos\alpha\, dS.$$

El flujo que pasa por una superficie grande se escribe de la forma

$$N = \int \mathfrak{D} \cos\alpha\, dS,$$

y el que pasa por una superficie cerrada se suele designar con una circunferencia en el signo de integración:

$$N = \oint \mathfrak{D} \cos\alpha\, dS.$$

§ 87. Constante dieléctrica

Como demuestra la experiencia, entre los dos vectores que caracterizan a un campo eléctrico existe ligazón. En el caso en que los vectores del campo son paralelos el uno al otro, también son proporcionales entre sí en el punto dado del espacio [*]. Una variación del vector E lleva consigo un cambio proporcional del vector $\mathfrak{D}$. La razón $\mathfrak{D}/E$ sólo depende del medio.

Las propiedades eléctricas del medio se suelen caracterizar por una magnitud adimensional ε, elegida de manera que para el

[*] En la pág. 270 consideraremos el caso de medios anisótropos, en que los vectores $\mathfrak{D}$ y E no son paralelos entre sí.

vacío $\varepsilon=1$. Como veremos más adelante, esta condición se debe a que no pueden existir cuerpos que tengen $\varepsilon<1$. Por esta razón el vacío es el «origen de referencia» natural de ε. La magnitud ε se llama *permitividad* o *constante dieléctrica* y viene determinada por la igualdad

$$\frac{\mathfrak{D}}{E}=\varepsilon_0\varepsilon,$$

donde ε_0 depende de la unidad que se elija. Si el estado del medio es igual en todos los puntos, ε también será constante. En el límite entre dos medios ε cambia bruscamente. Los cuerpos heterogéneos por su densidad y otras propiedades, también lo son generalmente respecto de la permitividad.

Permitividad de algunas sustancias a 18°C: para el aire $\varepsilon=1{,}00059$; para el vidrio, 7,00; para el papel, 2—2,5; para el agua 80,5.

En el SI la magnitud $\mathfrak{D}$ se mide en culombios por m² (C/m²), y la intensidad del campo, en newtones por culombio (N/C). En este caso ε_0 se medirá en $C^2/(m^2\cdot N)$. En estas unidades

$$\varepsilon_0=\frac{10^{-9}}{36\pi}\,C^2/(m^2\cdot N).$$

En el sistema CGS, ε_0 carece de dimensión y se toma igual a $1/(4\pi)$:

$$\mathfrak{D}=\frac{\varepsilon}{4\pi}E.$$

En vez del desplazamiento se utiliza también una magnitud D, que es 4π veces mayor, llamada *inducción*; en el sistema absoluto $D=\varepsilon E$.

Ambas elecciones del valor de ε_0 tienen sus ventajas relativas, como veremos después. El primer sistema simplifica un grupo de fórmulas, pero complica otro; el segundo sistema conduce a un resultado inverso.

Hay que subrayar que los conceptos de desplazamiento e inducción tienen completamente el mismo contenido físico. La diferencia en el factor numérico se reduce únicamente a la diferencia de relaciones entre la unidad de inducción (desplazamiento) y la unidad de densidad de carga.

El desplazamiento eléctrico (véase la pág. 239) es igual a la unidad, si la densidad de carga de las placas de Mie es igual a la unidad. La inducción eléctrica es igual a la unidad, si la densidad de carga en las placas de Mie es igual a $1/(4\pi)$.

En electrotecnia sólo se utiliza, por lo general, la magnitud $\mathfrak{D}$, es decir, el desplazamiento; en física, por el contrario, se utiliza exclusivamente la inducción eléctrica D.

Conviene hacer algunas observaciones acerca de las fórmulas y unidades de medida que utilizaremos en esta parte del libro.

En mecánica y termodinámica, aunque se utilizan diversos procedimientos para elegir las magnitudes físicas fundamentales y distintas unidades de medida, se admiten unánimamente unos mismos coeficientes de proporcionalidad, iguales a una unidad adimensional. Todas las fórmulas de estos capítulos de la física tienen por esto la misma forma, independientemente del sistema de unidades que se elija.

Desgraciadamente, en la teoría del campo electromagnético ocurre de otro modo. Existen dos maneras generalizadas de enfocar esta cuestión: una, adoptada en electrotecnia y otra, en física. En estos dos enfoques no sólo son distintas las magnitudes fundamentales y las unidades de medición, sino que también son diferentes los coeficientes de proporcionalidad en las mismas fórmulas físicas. No hay más remedio, pues, que estudiar los dos sistemas de plantear las fórmulas.

Haremos esto a medida que expongamos la materia. Aquí bastará con que nos limitemos a hacer varias observaciones generales.

En electrotecnia se utiliza el SI. Al metro, kilogramo y segundo se añade una unidad de intensidad de la corriente. Esta unidad es el Amperio (A), que es la intensidad de la corriente con la cual el coeficiente de proporcionalidad μ (permeabilidad magnética del vacío), que figura con las fórmulas de la interacción electrodinámica (véase la pág. 288), tiene el valor

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{J/(A^2 \cdot m)}.$$

Esta elección de la unidad de intensidad de la corriente se reduce, como demuestra la experiencia, a que cuando pasa una corriente de 1A de intensidad por dos conductores paralelos, de longitud infinita y sección circular insignificante por su pequeñez, situados en el vacío a 1 m de distancia uno del otro, entre ellos se produce una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ newtones por metro de longitud. La causa de esta elección, que puede parecer rara, no vamos a estudiarla *).

Todas las demás unidades de medida del SI pueden expresarse por medio del kilogramo, metro, segundo y amperio.

Como en electrotecnia el sistema de unidades de medición se construye sobre cuatro magnitudes fundamentales, ya no puede conducir al mismo sistema de fórmulas que el sistema CGS, que se construye sobre tres unidades fundamentales. Pero existen además otras diferencias entre estos sistemas, que se manifiestan en que la elección de los coeficientes adimensionales numéricos es distinta. En el transcurso de la exposición del material daremos a veces las fórmulas en dos sistemas, y al final del libro, en el apéndice, hay una relación de las fórmulas que se estudian en el texto, escritas en ambos sistemas con indicación de las unidades de medida.

§ 88. *Leyes del campo eléctrico*

Figurémonos un sistema de cuerpos cargados eléctricamente que crea un campo arbitrario. Tracemos en este campo una superficie cerrada. Una parte de las cargas quedará dentro del espacio abarcado por la superficie y otra parte quedará fuera. Puede medirse el flujo eléctrico que sale fuera de los límites de esta superficie. El resultado será muy sencillo y natural. La carga eléctrica total

*) Este problema se trata detenidamente en el libro *Л. А. Сена*, Единицы физических величин и их размерности, «Наука», 1969. (*L. A. Sena*, Unidades de las magnitudes físicax y sus dimensiones).

inducida en la superficie (y esto es por definición el flujo $N = \oint \mathfrak{D} \cos \alpha \, dS$) será igual a la carga eléctrica total que se halla *dentro* del volumen abarcado por dicha superficie:

$$\oint \mathfrak{D} \cos \alpha \, dS = \sum q_i.$$

Este teorema, que lleva el nombre de Gauss y Ostrogradski, demuestra que las líneas eléctricas (líneas $\mathfrak{D}$) comienzan en las cargas de un signo y terminan en las cargas de signo contrario. No existen líneas de fuerza rotas.

En un campo eléctrico continuo no existen líneas de intensidad eléctrica que se cierren sobre sí mismas *). Esto se deduce de otra ley de los campos eléctricos que dice: el campo eléctrico (o más exactamente, el campo del vector intensidad $\boldsymbol{E}$) es un campo de potencial. El trabajo que se realiza al transportar una carga a lo largo de un contorno cerrado será, en este campo, igual a cero (es decir, no hay líneas cerradas del vector $\boldsymbol{E}$); el trabajo de transporte de una carga desde un punto a otro dependerá únicamente de la posición de estos puntos y no variará si varía la forma del camino recorrido. En este sentido las propiedades del campo eléctrico coinciden con las propiedades del campo gravitatorio.

Tomemos en el campo eléctrico un punto de referencia y calculemos con respecto a él la energía potencial. En trasladar la carga desde el punto de referencia hasta un punto dado del espacio, cualquiera que sea la trayectoria, se necesitará siempre realizar un mismo trabajo A. Por esto, al encontrarse la carga en un punto cualquiera del espacio, poseerá una energía potencial U, numéricamente igual al trabajo realizado A.

Análogamente a como la energía potencial de gravitación es proporcional a la masa del cuerpo, la energía potencial de un campo eléctrico es proporcional a la carga:

$$U = \varphi q.$$

La magnitud $\varphi = U/q$, es decir, la energía potencial que tendría una carga unitaria positiva situada en el punto dado del espacio, se llama *potencial eléctrico del campo* o simplemente *potencial*.

De la definición del potencial se deduce la expresión del trabajo realizado al trasladar la carga de un punto del campo a otro. Como el trabajo es igual a la variación de la energía, $dA = -dU$, tendremos que

$$dA = \boldsymbol{F} d\boldsymbol{l} = q\boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} = -q \, d\varphi,$$

*) En el vacío y en un medio homogéneo las líneas de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\mathfrak{D}$ coinciden. En este caso puede hablarse de las líneas de fuerza eléctricas sin necesidad de especificar a cuál de los vectores nos referimos.

o sea,

$$E\,dl = -d\varphi,$$

donde $d\varphi$ es la variación del potencial.

Para un trozo de camino finito

$$\int_1^2 E\,dl = \varphi_1 - \varphi_2;$$

la diferencia de potencial *) es igual al trabajo realizado en trasportar la carga unitaria.

Si una carga se mueve a lo largo de una línea de fuerza, se puede prescindir del signo de vector. Entonces

$$\int_1^2 E\,dl = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Finalmente, si el campo es homogéneo, la fórmula se simplifica y toma la forma

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d},$$

donde d es la distancia entre los puntos 1 y 2.

Las fórmulas que relacionan E y φ se escriben sin coeficientes de proporcionalidad. Estas fórmulas tienen la misma forma en todos los sistemas de unidades.

Ejemplos. 1. Supongamos que dos electrodos planos, de $S = 10$ cm² de superficie, se hallan en el aire a una distancia de 5 mm y que la diferencia de potencial entre ellos es igual a 5000 V. La intensidad del campo eléctrico creado será $E = 10^6$ V/m=33 u. CGS. El desplazamiento eléctrico en el campo de este condensador será $\mathfrak{D} = \varepsilon_0 E = 9\cdot 10^{-6}$ C/m². Esto significa que la densidad de carga en las placas del condensador será $\sigma = 9\cdot 10^{-6}$ C/m²$=2{,}7$ u. CGS. El flujo eléctrico a través de toda la superficie del electrodo $N = \mathfrak{D}S = 9\cdot 10^{-9}$ C. La carga de una placa $q = \sigma S = 9\cdot 10^{-9}$ C. Es evidente que $N = q$, como se deduce del teorema de Gauss — Ostrogradski.

2. El desplazamiento eléctrico del campo de la Tierra cerca de su superficie es $\mathfrak{D} \sim 9\cdot 10^{-10}$ C/m². La superficie de la Tierra $S \sim 5\cdot 10^{14}$ m² y la densidad superficial de carga es $\sigma \sim 9\cdot 10^{-10}$ C/m². De esto se deduce que la carga de la Tierra será $q \sim 4{,}5\cdot 10^5$ C. El flujo eléctrico que atraviesa la superficie de la Tierra es $N \sim 4{,}5\cdot 10^5$ C.

*) En un campo alternativo no se cumple esta igualdad. Para evitar confusiones es preferible introducir, para denominar $\int_1^2 E\,dl$, un término especial: *tensión eléctrica* entre los puntos 1 y 2. En los campos continuos coinciden la tensión y la diferencia de potencial.

§ 89. *Cálculo de los campos de los sistemas más simples*

Las leyes del campo eléctrico expuestas en el párrafo precedente, así como las consideraciones generales acerca de la simetría, pueden ayudarnos a calcular los campos de algunos sistemas no complejos. Hallar un campo quiere decir calcular su intensidad, inducción o potencial. Advertimos que el conocimiento del potencial es completamente suficiente para caracterizar un campo. Conociendo φ en todos los puntos del espacio se pueden hallar los valores del vector E derivando φ. Este procedimiento se comprende mucho mejor si se construyen las superficies de igual potencial (superficies equipotenciales), que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y, z)=\text{const}$. Como el trabajo de traslación de la carga por una superficie equipotencial es nulo, las líneas de fuerza seguirán las normales a los planos equipotenciales. Por lo tanto, para hallar el valor numérico de $|E|$ hay que derivar $\varphi(x, y, z)$ en las direcciones de las normales. Las operaciones matemáticas de este tipo se estudian en el análisis vectorial. Pero esta derivación puede hacerse con facilidad gráficamente, si se construye un diagrama en el cual el valor de φ se representará en función de una coordenada tomada a lo largo de una línea de fuerza. La tangente del ángulo de inclinación de esta curva da el valor de E con signo contrario para cualquier punto de la línea de fuerza.

Teniendo en cuenta que el lector debe asimilar estas nuevas ideas, analizaremos en unos ejemplos las particularidades tanto del potencial como de las características vectoriales del campo, aunque repetimos que, en principio, el conocimiento del potencial resuelve el problema.

CARGA PUNTUAL. Por razones de simetría está claro que el campo de una carga puntual aislada debe ser un campo simétrico esférico radial.

Tracemos una esfera de radio r. El flujo de desplazamiento que parte de la carga será igual a

$$\int \mathfrak{D} \cos\alpha \, dS = q.$$

El ángulo α es el comprendido entre las líneas de fuerza y la superficie de la esfera construida; este ángulo es igual a 90°. En todos los puntos de la superficie, $\mathfrak{D}$ tiene un mismo valor y, por lo tanto, puede sacarse del signo de integración. Entonces

$$\mathfrak{D} \oint dS = q,$$

y como $\oint dS=4\pi r^2$ (superficie de la esfera), el desplazamiento en un punto situado a la distancia r de la carga será $\mathfrak{D}=q/(4\pi r^2)$, y la inducción $D=q/r^2$.

La intensidad del campo eléctrico

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}.$$

En este caso resulta ser más cómodo el sistema CGS, en el que $\varepsilon_0 = 1/(4\pi)$. Aplicando este sistema, $E = q/(\varepsilon r^2)$ o, en el caso del vacío,

$$E = \frac{q}{r^2}.$$

Como la intensidad del campo es igual a la derivada del potencial (con signo contrario) tomada a lo largo de una línea de fuerza, es decir,

$$E = -\frac{d\varphi}{dr},$$

para el potencial de la carga puntual obtenemos la expresión

$$\varphi = \frac{q}{r}.$$

Suponemos que la constante de integración es igual a cero. Con esto introducimos una referencia del potencial: en el infinito $\varphi = 0$.

Así, pues, el potencial de una carga puntual decrece en proporción inversa a la primera potencia de la distancia, y la intensidad, en proporción inversa al cuadrado de esta última.

Si la carga se encuentra en un medio de constante dieléctrica ε, la intensidad y el potencial disminuyen ε veces.

El potencial de la Tierra es de 0,07 V. En este caso se toma como nulo el potencial en el infinito. En electrotecnia se considera nulo el potencial de la Tierra.

SISTEMA DE CARGAS PUNTUALES. Consideremos los procedimientos de cálculo de los campos creados por sistemas de cargas puntuales. Supongamos $\varepsilon = 1$ y utilicemos el sistema absoluto de unidades. En este caso, para el potencial del sistema de cargas se puede escribir:

$$\varphi = \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \ldots = \sum_k \frac{q_k}{r_k},$$

donde r_k es la distancia desde las cargas hasta el punto de observación.

Para dos cargas iguales de signos contrarios obtenemos

$$\varphi = q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

y para dos cargas de signos iguales

$$\varphi = q\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Valiéndose de estas fórmulas puede resultar dificultoso resolver un problema. Con frecuencia hay que introducir un sistema de coordenadas cartesianas y expresar los radios r_k por medio de x, y, z. Si las cargas son dos y se hallan a una distancia $2a$ una de otra, el origen de coordenadas conviene tomarlo en el punto medio, y el eje x dirigirlo a lo largo de la línea que los une. Entonces

$$r_1^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2,$$
$$r_2^2 = (x+a)^2 + y^2 + z^2.$$

También conviene a veces representar el potencial en función de las coordenadas polares R y φ. De la fig. 90 se deduce que

$$r_1 \sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\varphi}, \quad r_2 \sqrt{R^2+a^2+2aR\cos\varphi}.$$

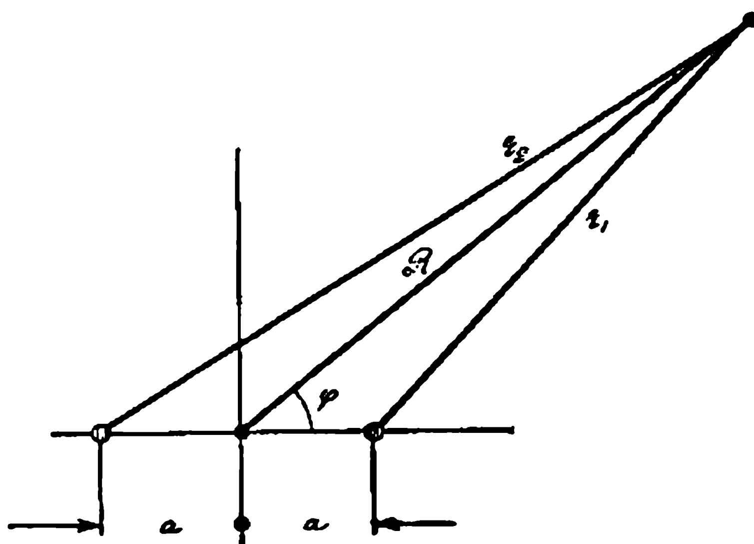


FIG. 90.

La intensidad del campo de un sistema de cargas puntuales viene dada por la igualdad vectorial

$$E = \frac{q}{r_1^2}\frac{r_1}{r_1} + \frac{q}{r_2^2}\frac{r_2}{r_2} + \frac{q}{r_3^2}\frac{r_3}{r_3} + \ldots = \sum \frac{q_k}{r_k^2}\frac{r_k}{r_k}.$$

Aquí $\frac{r_k}{r_k}$ es el vector unitario que tiene la dirección del radio r_k.

El cuadro de las líneas de fuerza se construye haciendo la suma geométrica.

FÓRMULAS UNIVERSALES DEL POTENCIAL. Si las cargas que crean el campo no son puntuales, sino volumétricas y superficiales, el potencial del campo se puede calcular si se conoce la distribución de la carga.

Dividamos la región de la carga volumétrica en volúmenes infinitamente pequeños dv y la región de la carga superficial en partes infinitamente pequeñas de superficie dS. Si $\rho=\frac{dq}{dv}$ es la densidad volumétrica y $\sigma=\frac{dq}{dS}$ es la densidad superficial de la carga, el potencial creado por el volumen dv será igual a $\frac{\rho dv}{r}$ y el potencial creado por el elemento de superfície dS será igual a $\frac{\sigma dS}{r}$. Sumando los potenciales que crean todos los elementos obtenemos:

$$\varphi=\int\frac{\rho\, dv}{r}+\int\frac{\sigma\, dS}{r}.$$

El radio r se considera trazado desde el punto de observación y su extremo recorre todos los puntos del espacio en que se concentran las cargas $\rho\, dv$ y σdS.

Estas fórmulas se aplican poco, porque generalmente no se da la distribución de la carga caracterizada por las funciones de densidad ρ y σ, sino al contrario, se busca.

CAMPO DE UN CONDENSADOR ESFERICO. Una esfera de radio r_A, cargada con una cantidad de electricidad $+q$, está rodeada por una superficie esférica concéntrica de radio r_B. La esfera externa conviene considerarla puesta a tierra. En su superficie interna se induce una carga $-q$. Las razones de simetría determinan el carácter radial del campo. Si mentalmente se construye una esfera de radio r entre las esferas del condensador y se aplica la ley de Gauss — Ostrogradski, el resultado no diferirá del obtenido para la carga puntual:

$$E=\frac{q}{r^2}.$$

La ecuación del potencial tiene la forma

$$\varphi=\frac{q}{r}+\text{const},$$

pero a diferencia de lo dicho antes, ya no se puede prescindir de la constante. Como sabemos, el potencial de las piezas metálicas puestas a tierra se suele considerar nulo. Por esto resultará más cómodo si suponemos $\varphi=0$, no en el infinito, sino cuando $r=r_B$. Entonces $\text{const}=-\frac{q}{r_B}$.

La expresión del potencial en los puntos entre las esferas tiene la forma

$$\varphi=\frac{q}{r}-\frac{q}{r_B}.$$

En la superficie de la esfera interna

$$\varphi = \frac{q}{r_A} - \frac{q}{r_B}.$$

Recordando que la relación de la carga a la diferencia de potencial en las armaduras se llama *capacidad* del condensador, obtenemos para la del condensador esférico la expresión

$$C = \frac{1}{\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}} = \frac{r_A \cdot r_B}{r_B - r_A}.$$

Si la esfera externa se aleja ($r_B \to \infty$), la capacidad se hace igual a

$$C = r.$$

La capacidad de una esfera aislada se mide por la magnitud de su radio.

Si entre las armaduras del condensador se encuentra un dieléctrico de coeficiente ε, la intensidad E y el potencial φ disminuyen ε veces.

De la fórmula

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{q}{r_A} - \frac{q}{r_B}\right)$$

obtenemos para la capacidad del condensador

$$C = \varepsilon \frac{r_A \cdot r_B}{r_B - r_A};$$

y para una esfera

$$C = \varepsilon r.$$

La capacidad del condensador aumenta ε veces.

Las fórmulas del potencial y del campo con que operamos ahora son aplicables a los puntos del espacio entre las armaduras del condensador. Estas fórmulas no pueden hacerse extensivas a los puntos del espacio que se encuentra dentro de la primera capa o que abarca ambas capas, ya que la ley de Gauss da para estos puntos otro resultado.

Si la carga de la esfera interna se concentra en su superficie, para los puntos de dentro de la esfera

$$\oint D \cos\alpha \, dS = 0.$$

Como una afirmación semejante es correcta para cualquier superficie que pase por dentro de la esfera, esto será posible únicamente en el caso en que $D = 0$ y, por lo tanto, la intensidad será también nula. Por consiguiente, la ley de Gauss demuestra la inexistencia de campo dentro del volumen, o que las cargas están situadas únicamente en su superficie. En cuanto se refiere al potencial φ,

cuando $E=0$ puede ser igual a una magnitud constante igual al valor de φ en la superficie de la esfera. Las curvas E y φ en función de r, que muestra la fig. 91, aclaran lo dicho.

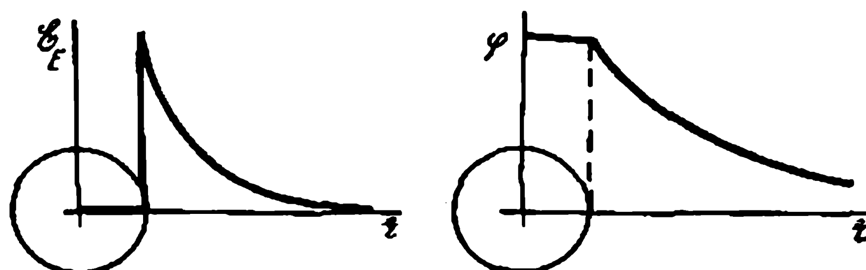


FIG. 91.

Ejemplos. 1. A 1000 km de distancia de la superficie de la Tierra, la intensidad de su campo eléctrico disminuye $\left(\frac{7400}{6400}\right)^2=1,33$ veces.

2. La capacidad de la Tierra $C=6,4\cdot 10^8$ u. CGS=700 μF.

3. La capacidad de los condensadores que se utilizan en radiotecnica oscila dentro de amplios límites, desde fracciones de pF (1 pF$=10^{-12}$ F) hasta millares de μF.

CAMPO DE UNA ESFERA CARGADA UNIFORMEMENTE. Es evidente que fuera de esta esfera el campo será lo mismo que en el caso de la carga puntual o de la esfera cargada superficialmente, es decir,

$$E=\frac{q}{r^2},$$

donde r es la distancia desde el centro de la esfera y $q=\frac{4}{3}\pi a^3\rho$ (siendo ρ la densidad de la carga y a, el radio de la esfera).

Para hallar el campo dentro de la esfera trazaremos una esfera auxiliar de radio $r<a$. Dentro de esta esfera habrá una cantidad de electricidad menor que q, y que será igual a

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho=\frac{r^3}{a^3}q.$$

De acuerdo con la ley de Gauss

$$\mathfrak{D}\cdot 4\pi r^2=\frac{r^3}{a^3}q,$$

es decir,

$$\mathfrak{D}=\frac{q}{4\pi a^3}r.$$

De aquí, la intensidad del campo eléctrico

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^3}r \text{ (SI)}$$

o bien

$$E=\frac{q}{\varepsilon a^3}r\ \text{(CGS)}.$$

Llamamos la atención sobre el hecho de que el campo sólo es nulo en el centro de la esfera. Después el campo crece linealmente (fig. 92) y en la superficie de la esfera ($r=a$) se hace igual a $q/(\varepsilon a^2)$. Aquí coinciden los resultados de las fórmulas para el espacio exterior y para el interior. Más adelante se produce la caída del campo según la ley de la inversa del cuadrado. El potencial fuera de esta esfera puede ser, lo mismo que antes, representado como a/r. El valor de φ dentro de la esfera no ofrece interés y no lo estudiaremos.

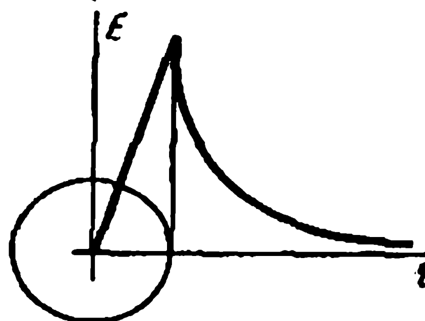


FIG. 92.

CAMPO DE SIMETRÍA CILÍNDRICA. Si el campo es creado por un hilo cargado uniformemente o por un cilindro en los que, por unidad de longitud, corresponde una carga q/l, los campos de estos sistemas serán iguales (fuera de los cuerpos cargados) y tendrán la particularidad siguiente: las lineas de fuerza formarán un ángulo recto con el eje de simetría y el flujo será igual en cualquiera de las direcciones radiales.

Para aplicar la ley de Gauss, en torno a la superficie cilíndrica del cuerpo se construye una superficie cilíndrica auxiliar de radio r y altura unitaria. El flujo sólo pasa a través de la superficie lateral de este cilindro. Por lo tanto, $\oint\mathfrak{D}\cos\alpha\,dS$ se reduce a la integral respecto de la superficie lateral del cilindro y, una vez más, debido a la simetría ($\cos\alpha=1$ y $\mathfrak{D}$ es igual en todos los puntos del cilindro),

$$\mathfrak{D}\int dS=\frac{q}{l},$$

es decir,

$$\mathfrak{D}\cdot 2\pi r=\frac{q}{l};\qquad \mathfrak{D}=\frac{q/l}{2\pi r}.$$

De aquí, la intensidad del campo

$$E=\frac{q/l}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}\ \text{(SI)}$$

o bien

$$E=\frac{2q/l}{\varepsilon r}\ \text{(CGS)}.$$

El campo de un cilindro disminuye de manera inversamente proporcional a la primera potencia de la distancia. Esta fórmula

es válida lo mismo para el espacio que rodea a un hilo cargado que para el espacio exterior de un cilindro, también cargado, y para el comprendido entre las armaduras de un condensador cilíndrico.

Como $d\varphi = -E\,dr$, para el potencial obtenemos

$$\varphi = \frac{2}{\varepsilon}\frac{q}{l}\ln\frac{1}{r} + \text{const}.$$

El potencial disminuye mucho más lentamente, al variar la distancia, que en el caso de los sistemas esféricos. Así, por ejemplo, cuando la distancia r aumenta 10 veces, el potencial no disminuye ya 10 veces, sino 2,3.

Para un condensador cuyos cilindros tengan respectivamente los radios a y b, obtenemos

$$\varphi_b - \varphi_a = \frac{2}{\varepsilon}\frac{q}{l}(\ln a - \ln b) = \frac{2}{\varepsilon}\frac{q}{l}\ln\frac{a}{b}.$$

La capacidad de un condensador de este tipo referida a la unidad de longitud es

$$C = \frac{\varepsilon}{2\ln(a/b)}.$$

Ejemplo. Un cable coaxial, de $a = 18$ mm y $b = 6$ mm, está relleno de un aislante cuya constante dieléctrica $\varepsilon = 4{,}2$; su capacidad por unidad de longitud será $C = 1{,}91$ u. CGS/cm $= 2{,}12$ pF/cm.

Conviene recordar que ninguna de las fórmulas citadas tiene en cuenta la deformación del campo en los extremos del cilindro, por lo que, rigurosamente hablando, se refieren a cilindros de longitud infinita. En la práctica estas fórmulas son válidas si el volumen del espacio ocupado por el campo «deformado» es considerablemente menor que el volumen no deformado del campo radial.

CAMPOS HOMOGENEOS. Los campos homogéneos o uniformes, es decir, los campos en los cuales las líneas de fuerza son paralelas y están dispuestas con igual densidad, son creadas por planos extendidos infinitamente. Está claro que el flujo de fuerza es perpendicular a este plano. La magnitud del campo la hallamos valiéndonos de la ley de Gauss — Ostrogradski. Con este fin construimos una superficie auxiliar en forma de cilindro que pasa por el plano cargado. Si la superficie lateral del cilindro es perpendicular al plano, el flujo a través de ella se reducirá a los flujos a través de sus dos bases. La integral $\oint \mathfrak{D}\cos\alpha\,dS$ será igual a $2\mathfrak{D}S$, donde S es el área de la base. La carga dentro del cilindro es igual a σS. De aquí tenemos para el desplazamiento la fórmula

$$\mathfrak{D} = \frac{\sigma}{2}.$$

La intensidad del campo eléctrico en el SI sera $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, y en el sistema CGS, $E=\frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}$; la intensidad no depende de la distancia a las fuentes del campo. Consideremos ahora un condensador plano. En los condensadores esférico y cilíndrico el campo se crea únicamente por la superficie cargada interna, mientras que en el condensador plano el campo entre sus armaduras es creado por ambas superficies. Fuera del condensador no existirá campo; en esto se conserva la analogía con los condensadores que hemos examinado antes. Entre las armaduras del condensador $\mathfrak{D}=\sigma$ y la intensidad es

$$E=\frac{4\pi}{\varepsilon}\sigma\ (\text{CGS}).$$

Para escribir la expresión del potencial de un campo homogéneo tomaremos la distancia x, desde una de sus placas cargadas, en la dirección de una línea de fuerza. Si esta placa es única, el potencial se escribirá de la forma $\varphi=-\frac{2\pi}{\varepsilon}\sigma x+\text{const}$. Pero si trata de un condensador, la expresión del potencial entre sus armaduras tendrá la forma

$$\varphi=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\sigma x+\text{const}.$$

De aquí, la diferencia de potencial

$$\varphi_a-\varphi_b=\frac{4\pi}{\varepsilon}\sigma(x_b-x_a)=\frac{4\pi}{\varepsilon}\sigma d,$$

donde d es la distancia entre las armaduras. Por lo tanto, la capacidad de un condensador plano por unidad de superficie $C=\frac{\varepsilon}{4\pi d}$ (CGS) o $C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{d}$ (SI).

Todas estas fórmulas son rigurosamente correctas para las placas infinitamente extensas. En la práctica podemos aplicarlas si la influencia de los bordes del condensador, en los cuales el campo es claramente no homegéneo, es pequeña. La determinación del campo en un punto cualquiera, aplicando las fórmulas dadas, sólo es posible si dicho punto se encuentra suficientemente lejos de los bordes. Más exactamente, esta condición se reduce a que el campo creado por las cargas elementales situadas en los bordes de las placas sea mucho menor que los que crean las partes de las placas más próximas al punto de observación.

Volvamos al condensador que analizamos en el ejemplo de la pág. 244. Dupliquemos la distancia entre las placas por dos procedimientos.

1. Las placas permanecen unidas a una fuente de tensión $U=5$ kV. En este caso $C_1=\frac{\varepsilon_0 S}{d_1}=1{,}8$ pF, $q_1=C_1U=9\cdot 10^{-9}$ C, $E_1=\frac{U}{d_1}=10^6$ V/m, $\mathfrak{D}_1=9\cdot 10^{-6}$ C/m², $N_1=9\cdot 10^{-9}$ C.

Después de duplicar la distancia entre las placas, obtenemos: $C_2=0{,}9$ pF, $q_2=4{,}5\cdot 10^{-9}$ C, $E_2=0{,}5\cdot 10^6$ V/m, $\mathfrak{D}_2=4{,}5\cdot 10^{-6}$ C/m², $N_2=4{,}5\cdot 10^{-9}$ C. La mitad de la carga se retiró a la fuente.

2. Antes de duplicar la distancia desconectamos las placas de la fuente (la carga del condensador $q=$const). $C_2=0{,}9$ pF, $q=q_1=9\cdot 10^{-9}$ C, $U_2=\frac{q}{C_2}=10$ kV, $E_2=\frac{U_2}{d_2}=E_1$, $\mathfrak{D}_2=\mathfrak{D}_1$, $N_2=N_1$. La tensión en las placas se duplicó a expensas del trabajo realizado por las fuerzas externas.

CAMPO EN LA SUPERFICIE DE UN METAL. Dentro del metal no existe campo eléctrico. Esto se deduce de que todas las cargas de un conductor se encuentran en su superficie. Según la ley de Gauss el campo estará dirigido al espacio exterior.

La superficie del metal tiene una propiedad evidente: la de ser una superficie equipotencial. Efectivamente, en el caso contrario las cargas eléctricas se desplazarán por la superficie del conductor. De aquí se deduce que las líneas del flujo de fuerza que sale de la superficie del metal al espacio exterior deben formar en los puntos de la superficie un ángulo recto con ella. Como todo el flujo sale de la superficie hacia un lado, de la unidad de superficie deberán salir, según la ley de Gauss, $\mathfrak{D}=\sigma$ líneas. En otras palabras, la intensidad del campo en la superficie de un conductor

$$E=\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\ \text{(CGS)}.$$

IMAGEN ELECTRICA. Consideremos el campo eléctrico que aparece si cerca de una superficie metálica plana se sitúa una carga eléctrica puntual. En virtud del fenómeno de la inducción eléctrica, en la superficie del metal cercana a la fuente puntual se concentra una carga eléctrica de signo contrario. La densidad de esta carga será máxima en los sitios más próximos a la fuente puntual, en cambio, lejos de ella la densidad de la carga inducida disminuirá hasta anularse. Del mismo modo, el campo eléctrico también será más intenso en los sitios más próximos al punto cargado. Existe la posibilidad de estudiar este problema cuantitativamente.

Como la superficie del conductor es una superficie equipotencial, se puede, sin mermar en absoluto la generalidad del problema, considerar puesta a tierra la superficie conductora y, por consiguiente, nulo el potencial del metal. Dentro del metal no hay campo, y nos interesa conocer el campo eléctrico en la parte derecha del semiespacio. Las propiedades eléctricas de este semiespacio quedarán definidas uniformemente si se indica la magnitud de la carga y

la distancia a que se encuentra de la superficie equipotencial. Lo importante es lo siguiente: a nosotros no nos interesa en absoluto qué es lo que hay a la izquierda de la superficie de potencial nulo. Esta circunstancia se demuestra rigurosamente en la física matemática: el campo que hay dentro de un espacio cualquiera está definido uniformemente si se dan las cargas que hay dentro del mismo y se indican las condiciones de frontera para el potencial.

Observando la fig. 93, *a*, que representa el campo de dos cargas de signos distintos, y dividiendo mentalmente en dos partes simétricas el espacio ocupado por este campo, vemos que el semiespacio de esta figura equivale exactamente al semiespacio de una

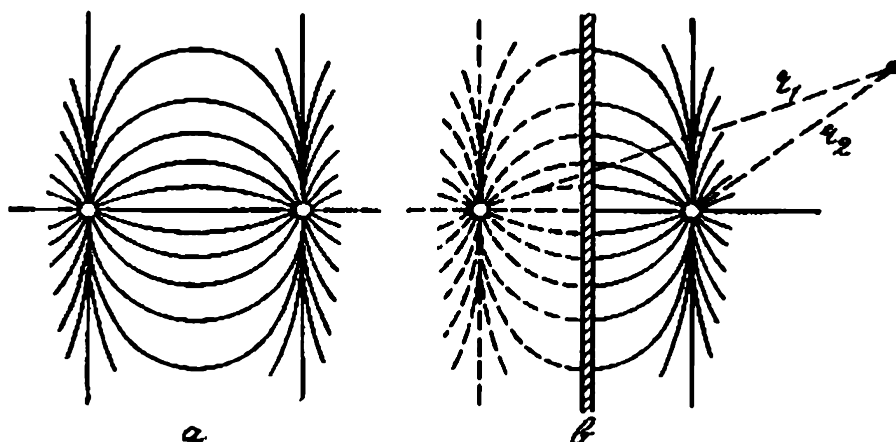


FIG. 93.

carga situada cerca del metal (fig. 93, *b*). Los campos de estos semiespacios deben ser idénticos. De este razonamiento se deduce la validez del siguiente procedimiento. Nosotros «reflejamos» la carga eléctrica en la superficie del metal. En la parte derecha del espacio, el campo eléctrico de la carga y su «imagen» deben coincidir con el campo buscado. De este modo, el campo eléctrico que buscábamos viene expresado por la fórmula

$$\varphi = q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

donde r_1 es la distancia de la carga al punto de observación y r_2 es la distancia desde la imagen de la carga a dicho punto.

La segunda deducción que hacemos es: la carga eléctrica es atraída por la superficie metálica con la misma fuerza que por su imagen eléctrica, es decir, con la fuerza $q^2/(4a^2)$, donde a es la distancia de la carga a la superficie.

Finalmente, esta misma manera de enfocar la cuestión permite hallar la distribución de la carga eléctrica inducida en la

superficie metálica. Para esto hay que derivar la expresión del potencial según la dirección de la normal a la superficie, lo que da el valor de la intensidad del campo eléctrico; luego, de acuerdo con la fórmula dada en el párrafo anterior, hay que multiplicar E por $\varepsilon/(4\pi)$.

El método de las imágenes eléctricas tiene una serie de aplicaciones y da la posibilidad de resolver los problemas de electrostática en el caso de sistemas constituídos por varíos cuerpos metálicos no planos y por cargas puntuales situadas cerca de ellos.

§ 90. Energía eléctrica

ENERGÍA DE UN CONDENSADOR. De que un condensador eléctrico cargado posee energía, no es difícil convencerse. Tampoco ofrece dificultad medir el valor de esta energía. Para esto hay que, por ejemplo, descargar el condensador por medio de un conductor y medir el calor de Joule que se desprende al hacerlo. Para esclarecer de qué factores depende la energía eléctrica de un condensador no hace falta recurrir a ningún experimento. La fórmula de la energía eléctrica del condensador es consecuencia de postulados teóricos que ya conocemos.

Consideremos un condensador que, para facilitar los razonamientos, supondremos que tiene una de sus armaduras puesta a tierra. El proceso de descarga de este condensador (puesta a tierra de la segunda armadura), cargado hasta una diferencia de potencial φ con una cantidad de electricidad q, nos lo podemos figurar como si las cargas elementales dq, sometidas a la acción de las fuerzas del campo eléctrico, se fueran consecutivamente a tierra. El trabajo realizado por el campo en este acto elemental es igual a $\varphi\,dq$. A medida que se va descargando el condensador, el trabajo de transporte a tierra de cada porción siguiente de cargas se irá haciendo menor, porque la diferencia de potencial $\varphi=q/C$ disminuye durante todo el tiempo. El trabajo total que realizará el campo al descargarse el condensador será igual a

$$\int_0^q \frac{q}{C}\,dq=\frac{q^2}{2C}$$

A esta magnitud conviene llamarla *energía eléctrica del condensador*. Aprovechando la ligazón del potencial con la carga, a la fórmula de la energía se le pueden dar otras formas

$$W_{el}=\frac{q^2}{2C}=\frac{\varphi q}{2}=\frac{C\varphi^2}{2}.$$

De aquí se deduce que, si la diferencia de potencial es constante, la energía eléctrica es proporcional al cuadrado de la carga. La

constancia de la diferencia de potencial se consigue conectando el condensador a una pila de corriente constante. Si las armaduras del condensador están aisladas, la carga será constante; en este caso la energía es proporcional al cuadrado del potencial y directamente proporcional a la capacidad del condensador.

ENERGÍA DE UN CAMPO. En el caso de un condensador plano infinito, la fórmula de la energía puede escribirse de la forma $W_{el}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon\varphi^2}{2d}$, si se utiliza el SI, o de la forma $W_{el}=\frac{\varepsilon\varphi^2}{8\pi d}$, si se emplea el sistema CGS. Hemos escrito las fórmulas de la energía correspondiente a la unidad de superficie de un condensador plano.

Estas fórmulas se pueden transformar introduciendo en ellas la intensidad E en vez de la diferencia de potencial φ. Haciendo la sustitución $\varphi=Ed$, obtenemos

$$W_{el}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}d \text{ (SI)} \quad \text{ó} \quad W_{el}=\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}d \text{ (CGS)}.$$

De la forma de estas fórmulas se deduce que a la unidad de volumen le corresponde la energía $\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$. Llamémosle a $w=\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$ *densidad de la energía eléctrica*.

Consideremos ahora un campo eléctrico arbitrario. Construimos mentalmente las superficies equipotenciales y las líneas de fuerza y dividimos el espacio en pequeños volúmenes dv limitados por dos superficies equipotenciales contiguas y por una superficie lateral que pase por las líneas de fuerza. A cada uno de estos volúmenes, que no difiere de una parte del volumen de un condensador plano, le pertenece una energía eléctrica igual a $dW=\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}dv$. Si esta expresión se integra respecto de todo el espacio ocupado por el campo eléctrico, podemos esperar que la fórmula obtenida dé la energía eléctrica del sistema creador del campo.

Así, pues, la fórmula de la energía eléctrica tiene la forma

$$W_{el}=\int\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}dv.$$

El significado de las transformaciones matemáticas que se han hecho rebasan los límites de un formalismo conveniente para la aplicación de tal o cual fórmula. La nueva expresión de la energía permite hablar, no de la energía del sistema creador del campo, sino de la energía del propio campo eléctrico, y nos lleva a la idea de la realidad del campo eléctrico. Dentro de los marcos del estudio de los campos continuos esta idea no puede ser confirmada ni desmentida. Pero al pasar a los campos alternativos hallamos pruebas directas de la realidad del campo electromagnético (véase la pág. 338), y entonces la fórmula de la energía del campo que hemos

deducido (energía de la materia electromagnética) adquiere un significado fundamental.

Ejemplo. Continuemos el ejemplo considerado en la pág. 254. Hasta que se alejaron las placas, la energía acumulada en el campo eléctrico del condensador era $W_1=22,5\cdot 10^{-6}$ J, y la densidad de la energía era $w_1=4,5$ J/m³. Después de apartar las placas por el primer procedimiento (tensión $U=\text{const}$) la energía se hace igual a $W_2=\frac{W_1}{2}=11,25\cdot 10^{-6}$ J, y la densidad de energía $w_2=1,12$ J/m³ (el volumen del campo aumentó al doble). La energía de la fuente aumenta a expensas del trabajo de las fuerzas externas y de la disminución de la energía del campo. Después de separar las placas por el segundo procedimiento ($q=\text{const}$), la energía $W_2=2W_1=45\cdot 10^{-6}$ J y la densidad de la energía no varía, $w_2=4,5$ J/m³.

ENERGÍA DE INTERACCIÓN. Si dos cuerpos cargados, de signos opuestos, se atraen, las fuerzas, del campo eléctrico realizan trabajo, a costa, como es natural, de la energía de dicho campo: $dA=-dW_{el}$. Por lo tanto, de acuerdo con lo dicho en la pág. 57, el trabajo de las fuerzas eléctricas se realiza a expensas de la disminución de la energía potencial $\frac{q_1q_2}{r}$. A esta energía conviene llamarle *energía de interacción de las cargas.*

¿En que relación se halla esta fórmula con la fórmula de la energía eléctrica del campo, estudiada en el punto anterior? No es difícil ver que la energía de interacción es parte de la energía eléctrica del campo de las cargas que se estudian. Observando atentamente la fórmula de la energía del campo nos damos cuenta de que la energía eléctrica también tiene un valor determinado cuando en el espacio hay una sola carga eléctrica. Es oportuno llamarle a la energía del campo creado por un solo cuerpo cargado *energía intrínseca de la carga eléctrica.* La energía de un campo eléctrico puede descomponerse siempre en la suma de las energías intrínsecas de las cargas eléctricas y la suma de las energías de interacción de estas cargas.

Llamemos E_1, E_2, . . . a las intensidades de los campos creados por las cargas primera, segunda, etc. El campo resultante será igual en cada punto del espacio a la suma vectorial de las intensidades: $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\ldots$

La densidad de la energía eléctrica será igual a

$$\frac{\varepsilon}{8\pi}(E_1+E_2+\ldots)^2=\frac{\varepsilon}{8\pi}E_1^2+\frac{\varepsilon}{8\pi}E_2^2+\ldots+$$
$$+\frac{\varepsilon}{4\pi}E_1E_2+\frac{\varepsilon}{4\pi}E_1E_3+\ldots$$

Vemos claramente el sentido, antes indicado, del desarrollo en las componentes ocurrido. Los cuadrados de E dan las energías intrínsecas, y los dobles productos, las energías de interacción. Está claro que la energía de interacción de las cargas puede ser una magnitud

tanto positiva como negativa; en cuanto se refiere a las energías intrínsecas de las cargas y a la energiá resultante del campo, son magnitudes positivas.

Por lo general nos encontramos con energía de interacción de cargas eléctricas. Por esto da lo mismo calcular el trabajo de las cargas eléctricas como resultado de la disminución de la energía de interacción o como resultado del decrecimiento de la energia del campo. Conviene hacer el cálculo que sea más fácil.

§ 91. Radio del electrón y límites de la electrodinámica clásica

Calculemos la energía eléctrica intrínseca de una carga esférica en la cual la electricidad se halla distribuida por la superficie. En este caso sólo existe campo eléctrico fuera de la carga y, por lo tanto, hay que sumar la energia del campo en el espacio exterior respecto de la esfera. La intensidad del campo de la carga, si está en el vacío, viene expresada por la fórmula $\frac{q}{r^2}$, y la densidad de la energía en cualquier punto del espacio tendrá la forma $\frac{1}{8\pi}\frac{q^2}{r^4}$. Descompongamos mentalmente todo el espacio en capas esféricas. Dentro de una de estas capas, limitada por los radios r y $r+dr$, estará comprendida la energía $\frac{1}{8\pi}\frac{q^2}{r^4}\times$ (volumen de la capa). Como el volumen de la capa es igual a $4\pi r^2\,dr$, la energía que hay en dicha capa esférica podrá representarse por la simple expresión $\frac{1}{2}\frac{q^2}{r^2}\,dr$. Para hallar la energía total del campo hay que integrar esta expresión entre los límites a (así llamamos al radio de la esfera) e infinito. Así,

$$W=\frac{q^2}{2}\int_a^\infty\frac{dr}{r^2}=\frac{q^2}{2a}.$$

Esta es la forma que tiene la fórmula de la energia de una bolita cargada de electricidad.

Demos al lector la posibilidad de comprobar que para una carga distribuida por todo el volumen de la bolita obtendríamos una fórmula casi igual de la energía, que sólo diferiría de ésta en un coeficiente numérico próximo a la unidad.

Si aplicamos la fórmula obtenida a las partículas elementales, por ejemplo, al electrón, ¿a qué resultado llegaremos?

Según el principio de la relatividad (véase la pág. 448), la energía interna de un cuerpo de masa m se expresa por la fórmula

mc^2, donde c es una constante universal igual a la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío. Igualando entre sí las dos expresiones de la energía, tendremos la posibilidad de calcular el radio del electrón:

$$a = \frac{q^2}{2mc^2}.$$

La sustitución en esta fórmula de las letras por sus valores *) da $1,4 \cdot 10^{-13}$ cm. Un número considerable de hechos físicos indirectos indican que, por el orden de magnitud, la dimensión del electrón así calculada es bastante correcta.

No obstante, la idea de que el electrón es una partícula eléctrica «ordinaria» es claramente infundada. De admitirla, se plantea inmediatamente el problema de las fuerzas que retienen a las partes del electrón tan próximas entre sí. Las fuerzas de repulsión de las partículas eléctricas que se encuentran a distancias del orden de 10^{-13} cm deben ser enormes.

Esta teoría tropieza con otras dificultades. Así, de la teoría de la relatividad se deduce que el electrón debe ser un punto matemático. Pero al mismo tiempo, la energía eléctrica de una carga concentrada en un punto debe ser infinitamente grande.

Esta dificultad es típica de la llamada física clásica, creada en lo fundamental en el signo XIX. La física clásica explica magníficamente el comportamiento de los cuerpos macroscópicos. A muchos investigadores de finales del siglo XIX y comienzos del XX les parecía que el edificio de la física clásica era tan perfecto, que la física, como ciencia, estaba próxima a consumarse. Después del descubrimiento de las partículas elementales se produjo la tendencia natural a propagar las leyes establecidas para los cuerpos grandes a las partículas elementales. Entonces comenzaron los «fracasos» de la física clásica. Ahora sabemos que no es correcto trasladar los conceptos sacados de las observaciones del macromundo a los átomos, núcleos y electrones.

El problema del electrón no puede resolverse dentro de los límites de las ideas clásicas. Durante los últimos años se han alcanzado serios éxitos en la teoría del electrón, pero aún no existe una teoría perfecta. Por esta razón la teoría clásica de la electricidad que se expone en esta parte del libro (electrodinámica) tiene ciertas limitaciones con las cuales nos encontraremos al estudiar las interacciones de las partículas elementales. En todos los casos en que se trate del comportamiento de una partícula elemental en campos creados por cuerpos grandes, y tanto más si se consideran las interacciones de cuerpos macroscópicos, los resultados de la

*) $q = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C; $m = 9,1091 \cdot 10^{31}$ kg; $c = 2,99792 \cdot 10^8$ m/s.

electrodinámica clásica coinciden intachablemente con los datos experimentales.

§ 92. Fuerzas eléctricas

Al calcular las fuerzas de interacción entre cuerpos cargados utilizamos siempre el concepto de campo eléctrico de fuerzas. En vez de hablar de la fuerza con que el cuerpo A actúa sobre el cuerpo B, introducimos el campo de fuerzas y decimos: el cuerpo A crea un campo y este campo actúa sobre el cuerpo B. Como veremos en el cap. 16, esta representación rebasa los límites de las consideraciones formales: el campo electromagnético es una realidad física, y la naturaleza efectúa la interacción que se transmite desde un punto del espacio a otro («acción próxima»). La introducción de concepto de campo permite prescindir de las fuentes del campo y resolver el problema de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo cargado conociendo únicamente las intensidades del campo en aquellos puntos en que se encuentran las cargas del sistema que nos interesa.

Cada cuerpo cargado es un sistema de cargas. Si se trata de un sistema de cargas discretas, la fuerza que actúa sobre él $\boldsymbol{F}=q_1\boldsymbol{E}_1+ +q_2\boldsymbol{E}_2+ \ldots$, donde $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, ... son las intensidades del campo en los puntos en que se hallan las cargas. Si la carga eléctrica está distribuida continuamente en un volumen determinado, la fuerza que actúa sobre el cuerpo puede representarse por una integral: $\boldsymbol{F}=\int \boldsymbol{E}\rho\, dv$, y si las cargas están distribuidas por la superficie, por una integral de superficie $\boldsymbol{F}=\int \boldsymbol{E}\sigma\, dS$.

Sin embargo, debe tenerse en cuenta una peculiaridad de este cálculo directo de las fuerzas: en la fórmula hay que poner el valor de la intensidad que habría en ausencia de la carga sobre la cual actúa la fuerza. En aquellas fórmulas en que la fuerza se expresa por una suma, en la intensidad E_1 no entra la acción de la carga q_1 sobre sí misma, es decir, al calcular E_1 no se tiene en cuenta el campo creado por q_1 y así sucesivamente. Esto mismo es correcto también para las fórmulas integrales: por la intensidad del campo que figura en el integrando debe entenderse la intensidad creada por toda la distribución de la carga eléctrica a excepción de la cantidad de electricidad que se encuentra en el punto que se considera

Explicaremos esto valiéndonos del ejemplo de la fuerza que actúa sobre una superficie metálica cargada. Como sabemos, sobre la superficie del metal que linda con un dieléctrico, la intensidad del campo eléctrico por el lado de este último es igual, en el

sistema CGS, a $4\ \pi\sigma/\varepsilon$, y por el lado del metal es nula. La intensidad del campo sufre una interrupción en esta superficie. Si queremos determinar la fuerza que actúa sobre un elemento de superficie, debemos multiplicar la cantidad de electricidad $\sigma\, dS$ por la intensidad que existiría en este punto si se eliminara el elemento considerado de la superficie cargada. Por esto sería erróneo multiplicar $\sigma\, dS$ tanto por el valor del campo por el lado del dieléctrico, $4\ \pi\sigma/\varepsilon$, como por el valor del campo por el lado del metal, es decir, por cero. Como demuestra el estudio riguroso, el campo que existiría en este punto después de eliminar el elemento considerado sería igual a la media aritmética de los dos valores, 0 y $4\ \pi\sigma/\varepsilon$ o sea, igual a $2\ \pi\sigma/\varepsilon$. De este modo la fórmula de la fuerza que actúa sobre un elemento de área de la superficie cargada de un cuerpo conductor tiene la forma

$$\frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon}dS$$

y para todo el cuerpo

$$F = 2\pi \int \frac{\sigma^2}{\varepsilon} dS,$$

debiendo extenderse la integración a toda la superficie, teniendo en cuenta las posibles variaciones de la densidad de carga y de la constante dieléctrica a lo largo de la superficie del metal.

En el caso de un campo uniforme (idealmente un condensador plano infinito), la fuerza F que actúa sobre el área S de una placa se puede calcular con una exactitud suficientemente buena por la fórmula

$$F = \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon} S \text{ (CGS)}.$$

La magnitud de esta fuerza se puede medir con la llamada balanza de Thomson, cuyo esquema de funcionamiento se muestra en la fig. 94. Cuando la diferencia de potencial en la armadura del condensador es igual a 600 V, una placa de 50 cm² de área que se encuentre a 5 mm de distancia de la otra placa, será atraída hacia ella con una fuerza que calcularemos en los dos sistemas de unidades que utilizamos.

Sistema CGS

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} = 8 \text{ cm},$$

$$q = CU = 8 \cdot 2 = 16 \text{ u. CGS},$$

$$\sigma = 0{,}32 \text{ u. CGS},$$

$$F = \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon} S = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}32^2}{1} 50 = 32 \text{ din.}$$

SI

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} = \frac{1 \cdot 10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} = 8{,}9 \cdot 10^{-12} \text{F},$$

$$b = CU = 8{,}9 \cdot 10^{-12} \cdot 600 = 5{,}3 \cdot 10^{-9} \text{ C},$$

$$\sigma = 1{,}06 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

$$F = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} S = \frac{(1{,}06 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 1 \left(\frac{10^{-9}}{36\pi}\right)} = 32 \cdot 10^{-6} \text{ N}.$$

Por lo tanto, para equilibrar la fuerza de atracción electrostática, en el otro platillo de la balanza habrá que colocar una pesa igual a 32 din$=32\cdot 10^{-5}$ N.

La fuerza que actúa sobre un cuerpo en el que la electricidad está distribuida volumétricamente es aún más difícil de valorar: en la expresión $\rho E\,dv$, la intensidad E es la intensidad del campo creado por todas las cargas menos $\rho\,dv$.

Si el cuerpo cargado se halla en un medio dieléctrico, el cálculo de la fuerza se complica también por la circunstancia de que,

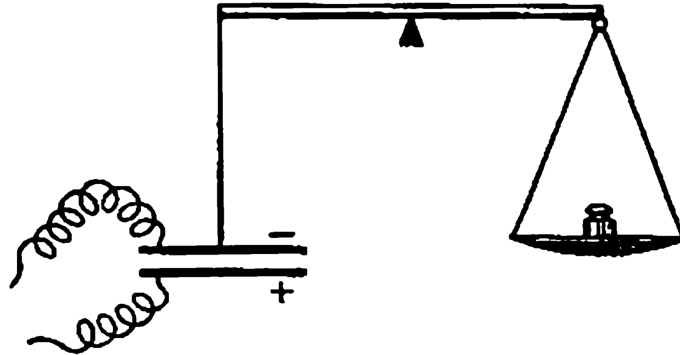


FIG. 94.

al eliminar mentalmente la carga hay que suprimir también mentalmente la parte correspondiente de dieléctrico, lo que se refleja en una variación del estado de polarización (véase más adelante).

Si queremos soslayar las dificultades relacionadas con la «resta» de la acción de la carga sobre sí misma, debemos recurrir al cálculo de la fuerza por medio de la expresión de la energía. La disminución de la energía es igual al trabajo; conociendo la magnitud del desplazamiento se puede hallar el valor de la fuerza. Por lo general éste es el procedimiento que se utiliza para valorar la fuerza.

El cálculo, por este procedimiento, de la fuerza que actúa sobre la placa de un condensador plano, $F=\frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon}S$, puede servir de clara ilustración a lo dicho. Al considerar la atracción de las placas del condensador (desconectado de la fuente de tensión) podemos escribir inmediatamente la variación de la energía que se produce al aproximar dichas placas una distancia Δ:

$$S\Delta\cdot\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}=\frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon}S\Delta,$$

de donde la fuerza buscada

$$F=\frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon}S.$$

§ 93. *Momento dipolar de un sistema de cargas*

Retornemos a los sistemas eléctricos que pueden representarse como sistemas de cargas puntuales. Supongamos que, en toda la extensión del sistema de cargas que nos interesa, el campo eléctrico es uniforme. En este caso la fórmula de la fuerza que actúa sobre el sistema tendrá la forma

$$\boldsymbol{F}=(q_1+q_2+\ldots)\boldsymbol{E}=Q\boldsymbol{E},$$

donde Q es la carga total del sistema. Si el cuerpo es eléctricamente neutro, como por ejemplo, un átomo o una molécula, la fuerza que actué sobre este cuerpo, que contiene cantidades iguales de partículas positivas y negativas, será nula. ¿Quiere esto decir que un cuerpo eléctricamente neutro no interacciona con el campo eléctrico? No es difícil ver que no. En un campo uniforme, las fuerzas que actúan sobre las cargas del sistema son paralelas entre sí. Podemos componer por separado las fuerzas que actúan sobre las cargas positivas y las aplicadas a las cargas negativas. Como es bien sabido, la resultante de las fuerzas paralelas estará aplicada al centro de «gravedad» del cuerpo. La palabra «gravedad» la hemos escrito entre comillas porque ahora nos referimos al centro de gravedad eléctrico. Como resultado, todas las fuerzas que actúan sobre las cargas de un sistema que se halla en un campo homogéneo se reducen a dos fuerzas antiparalelas aplicadas respectivamente a los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas (fig. 95). Si el sistema es eléctricamente neutro, ambas fuerzas serán iguales; la fuerza total será nula, pero sobre el cuerpo actuará un par de fuerzas cuyo momento será $M=qEl\operatorname{sen}\alpha$.

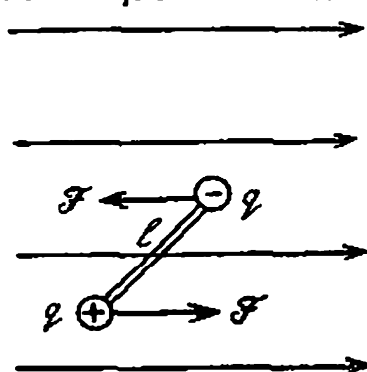


FIG. 95.

El momento de fuerza sólo puede actuar sobre el sistema de cargas en el caso en que los centros de «gravedad» de las cargas positivas y negativas estén desplazadas entre sí.

El vector $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$, igual, por su magnitud, al producto de la carga positiva del sistema por la distancia entre los centros de gravedad, recibe el nombre de *momento dipolar* o *de dipolo* del sistema. El momento dipolar se considera dirigido del centro negativo al positivo. Este momento determina el comportamiento del sistema en un campo homogéneo. El sistema, abandonado a sí mismo, se vuelve en el campo eléctrico uniforme de manera que su momento dipolar coincida con la dirección del campo eléctrico ($\operatorname{sen}\alpha=0$).

En un campo uniforme, toda la acción sobre un sistema de cargas eléctricas neutro se reduce a un momento de fuerza $M=$

$=pE$ sen α, donde p es el momento de dipolo del sistema, que es igual al producto de la cantidad de electricidad de un signo por el brazo del dipolo. De esta forma no hay necesidad de considerar en el campo homogéneo la compleja disposición del sistema de cargas cualquiera que sea; basta sustituirlo por el dipolo correspondiente.

Si el sistema se encuentra en un campo no uniforme, el momento de dipolo no podrá ya definir completamente sus propiedades.

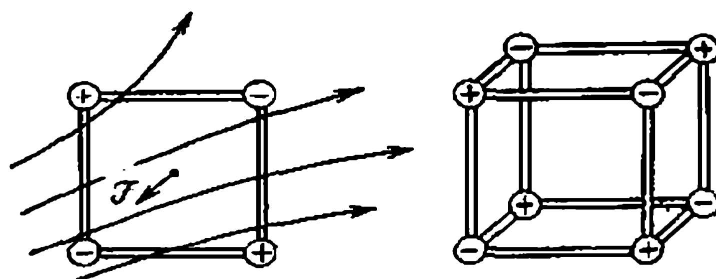


FIG. 96.

Esto puede verse en la fig. 96. Cuatro cargas situadas en los vértices de un cuadrado forman un sistema eléctricamente neutro cuyo momento dipolar es nulo (los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas coinciden). En un campo uniforme, sobre otro sistema no actuarían fuerzas ni momento de fuerza. En campos no uniformes, está claro que este cuadrado puede trasladarse y girar, ya que las fuerzas que actúan sobre las cargas son, en general, distintas. Por analogía con el dipolo, este sistema debe llamarse *cuadripolo*. En la misma figura se representa otro sistema neutro con momento dipolar neutro, el *octopolo*.

Para la teoría de la estructura de los cuerpos, de la que nos ocuparemos bastante más adelante, tiene considerable interés el estudio de las interacciones de los sistemas eléctricos más simples. Veamos algunas de ellas.

CARGA — CARGA. La interacción de dos cargas puntuales se realiza según la ley de Coulomb $F=\frac{q_1 q_2}{r^2}$.

CARGA — DIPOLO. Un dipolo abandonado a sí mismo tiende a volverse de manera que quede situado a lo largo de las líneas de fuerza. Una vez realizado este giro, si el campo es homogéneo, el dipolo permanecerá inmóvil, y si el campo no es homogéneo, será atraído hacia la región en que el campo es más intenso, como puede verse en la fig. 97. En el caso en que el campo no homogéneo sea el de una carga puntual, el dipolo será atraído hacia la carga.

La fuerza de atracción será igual a

$$F = q_0\left(\frac{q}{r^2} - \frac{q}{(r+l)^2}\right).$$

Si el brazo del dipolo es pequeño, reduciendo a un común denominador y prescindiendo de l^2, por su pequeñez en comparación

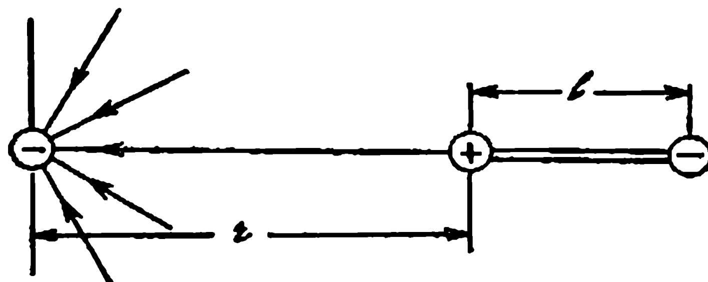


FIG. 97.

con rl, y rl, en comparación con r^2, obtenemos la interesante fórmula siguiente:

$$F = q_0\frac{2p}{r^3}.$$

Llamamos la atención sobre el hecho de que la fuerza de interacción de la carga y del dipolo disminuye, al aumentar la distancia, más de prisa que la fuerza de Coulomb, siendo inversamente proporcional al cubo de la distancia.

Ejemplo. La distancia entre los átomos de H y Cl en la molécula de ClH es igual a 1,28 Å, el momento de dipolo de la molécula $p=6\cdot 10^{-18}$u. CGS. Entonces, un electrón que se encuentre a la distancia $r=10$ Å de la molécula será atraído por ella con una fuerza de $\sim 6\cdot 10^{-8}$ din.

DIPOLO — DIPOLO. Aquí conviene resolver los dos problemas que plantean las disposiciones mutuas de los dipolos que muestra la fig. 98. Las fórmulas exactas de las interacciones tienen la forma

$$F = \frac{2q^2}{r^2} - \frac{2q^2}{r^2+l^2} \text{ (para la disposición } a\text{)},$$

$$F = \frac{2p^2}{r^2}\cdot\frac{3r^2-l^2}{(r^2-l^2)^2} \text{ (para la disposición } b\text{)}.$$

Si el brazo del dipolo es pequeño, estas fórmulas se pueden sustituir por siguientes expresiones aproximadas:

$$F = \frac{3p^2}{r^4} \text{ (para la disposición } a\text{)},$$

$$F = \frac{6p^2}{r^4} \text{ (para la disposición } b\text{)}.$$

Las fuerzas de interacción disminuyen en proporción inversa a la cuarta potencia de la distancia.

Ejemplo. Dos moléculas de ClH, que se hallan a 10 Å entre sí, se atraen con una fuerza $F \sim 10^{-6}$ din en el caso *a*, y $F \sim 2 \cdot 10^{-6}$ en el caso *b*.

CARGA — CUADRIPOLO. El cálculo se hace para la orientación representada en la fig. 99. La fuerza de interacción puede escribirse

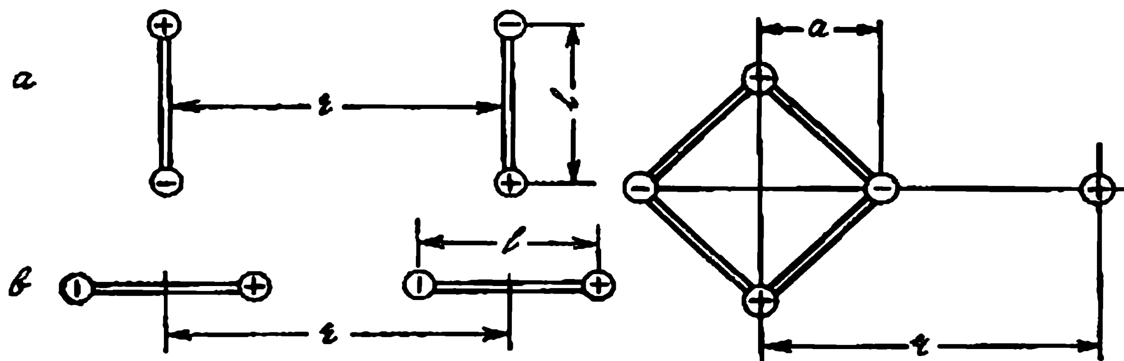


FIG. 98. FIG. 99.

de la forma

$$F = 2q_0q\left(\frac{r^2+a^2}{(r^2-a^2)^2} - \frac{r}{(r^2+a)^{3/2}}\right).$$

La fórmula aproximada para un cuadripolo pequeño es: $F = \frac{9q_0qa^2}{r^4}$. La fuerza disminuye en proporción inversa a la cuarta potencia de la distancia.

§ 94. *Polarización de un dieléctrico isótropo*

Como sabemos, si el espacio en que existe un campo eléctrico creado por cierto sistema de cargas se llena de un dieléctrico homogéneo, la intensidad de dicho campo y el valor de su potencial eléctrico disminuyen ε veces. El desplazamiento eléctrico (y la inducción), por el contrario, permanece invariable. La capacidad de un condensador disminuye ε veces. Esta circunstancia se aprovecha en la práctica para medir la constante dieléctrica. La razón de la capacidad del condensador entre cuyas armaduras se encuentra el dieléctrico a la capacidad del mismo condensador sin dieléctrico, se puede considerar como la definición de la constante dieléctrica.

Ahora avanzaremos un poco y nos preguntaremos cuáles son las causas de esta influencia del dieléctrico sobre el campo eléctrico. El experimento que sigue nos pondrá vías de explicar los fenómenos dieléctricos.

Consideremos un condensador plano conectado a una fuente de tensión. La densidad de las cargas eléctricas en las armaduras del condensador y, por consiguiente, el número de líneas D por unidad de superficie viene determinada uniformemente por la intensidad del campo eléctrico: $\sigma = E/(4\pi)$. Llenemos este condensador de un dieléctrico homogéneo. Ahora la relación entre intensidad del campo eléctrico y la densidad de carga en las armaduras del condensador se expresará por medio de la igualdad $\sigma = \varepsilon E/(4\pi)$, es decir, el flujo de líneas de fuerza (o sea, de líneas D) aumenta. En el experimento hecho por este procedimiento, la intensidad del campo eléctrico, que es igual al cociente de dividir la diferencia de potencial por la distancia entre las armaduras, no puede variar. Por consiguiente, cambia la densidad de cargas en las armaduras, aumentando precisamente ε veces. Este aumento puede encontrar experimentalmente: a medida que el condensador se llena de dieléctrico, la fuente de tensión aumentará la carga de aquél. Midiendo esta corriente eléctrica y el tiempo que pasa, podemos cerciorarnos de que por cada unidad de superficie del condensador será suministrada una cantidad adicional de electricidad igual a

$$\frac{\varepsilon E}{4\pi} - \frac{E}{4\pi} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E.$$

Si se quita el dieléctrico, esta carga adicional retornará a la fuente, y la cantidad adicional de líneas de fuerza desaparecerá. Para explicar la atracción de nuevas cargas hacia las placas del condensador, nos vemos obligados a admitir que en las superficies del dieléctrico que lindan con las armaduras se forman cargas de signo contrario cuya densidad $\sigma = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E$.

La carga superficial del dieléctrico se puede explicar suponiendo que el dieléctrico está constituido por cargas positivas y negativas ligadas entre sí formando parejas, que no pueden desplazarse por el cuerpo, pero que son capaces de moverse la una con respecto a la otra engendrando un momento dipolar en cada unidad de volumen del dieléctrico. La transformación de un sistema de cargas eléctricamente neutro en un sistema poseedor de momento de dipolo recibe el nombre de *polarización*, y el vector del momento dipolar de la unidad de volumen del dieléctrico se denomina *vector de polarización* $\boldsymbol{P}$.

La polarización del dieléctrico no ocasiona la creación de cargas volumétricas; las cantidades de cargas positivas y negativas que hay en la unidad de volumen después de la polarización siguen siendo iguales entre sí. Sin embargo, la polarización da lugar a la creación de una carga en la superficie del dieléctrico, como evidencia el esquema elemental de la fig. 100. La densidad de esta carga

es igual a la magnitud que antes hallamos

$$\sigma_{pol} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E.$$

Hasta aquí hemos razonado acerca de un dieléctrico contiguo a la placa de un condensador plano. Pero estos mismos razonamientos son válidos si se trata de un conductor de superficie arbitraria. Es más, resulta que la expresión escrita para σ_{pol} es válida en general para las superficies perpendiculares a las líneas de fuerza, es decir, siempre

$$\sigma = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E_n.$$

Aquí E_n es la proyección de la intensidad sobre la normal a la superficie. Esta fórmula puede aplicarse a cualquier frontera real o imaginaria dentro del dieléctrico.

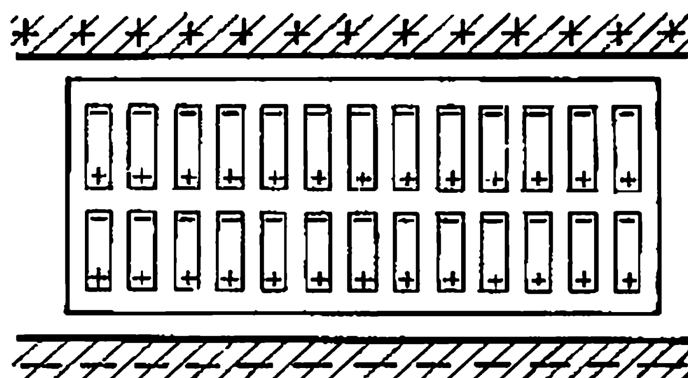


FIG. 100.

La carga de polarización (que también suele llamarse carga ligada) puede expresarse en función del momento de dipolo de la unidad de volumen. Si se trata de cuerpos isótropos, el desplazamiento de las cargas ligadas al superponerse los campos se produce a lo largo de las líneas de fuerza eléctricas. Por esto el vector de polarización es paralelo al vector intensidad. Recortemos de la lámina dieléctrica un cilindro de base S y longitud l. En virtud de la polarización, en las bases del cilindro se concentran cargas ligadas iguales en magnitud y de signo contrario. El momento dipolar de la varilla cilíndrica recortada será igual, por definición, al producto de la carga σS por el brazo del dipolo l, es decir, $p = \sigma_{pol} Sl$. El momento de dipolo referido a la unidad de volumen será igual a $|\boldsymbol{P}| = \sigma_{pol}$. Al hacer este cálculo hemos considerado que las bases del cilindro son perpendiculares a la dirección de polarización. Si estas superficies estuvieran inclinadas, formando un ángulo φ con las líneas de fuerzas, la densidad de carga en ellas sería menor,

proporcionalmente al coseno del ángulo de inclinación. Por lo tanto, en el caso general, se cumplirá la relación

$$\sigma_{pol} = P_n, \text{ donde } P_n = P\cos\varphi.$$

Ahora obtenemos la posibilidad de hallar la relación entre el vector polarización y el vector intensidad del campo eléctrico. Unificando la última fórmula con la expresión de la densidad de las cargas ligadas, que consideramos al principio de este párrafo, obtenemos, para cualquier dirección n, que

$$P_n = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E_n.$$

De este modo, si la constante dieléctrica no depende de la intensidad, entre los vectores $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{E}$ existe la dependencia lineal

$$\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E}.$$

La expresión $\alpha = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}$ suele llamarse *polarizabilidad*. Para el agua $\alpha = 6{,}38$, para el vidrio $\alpha = 0{,}48$.

Como $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$, la relación entre los vectores $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{P}$ puede escribirse de la forma

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}.$$

Los vectores $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{P}$ son paralelos en el caso de medios homogéneos.

§ 95. Polarización de los cuerpos cristalinos

Hasta ahora hemos estudiado el comportamiento de la sustancia típica del cuerpo amorfo o microcristalino o del monocristal en ciertas posiciones especiales respecto del campo. Pero si de un monocristal se corta una lámina que forme un ángulo cualquiera con sus caras y se coloca dicha lámina entre las armaduras de un condensador, se puede observar el efecto siguiente: la lámina se polariza no sólo longitudinal, sino transversalmente a las líneas de fuerza, el vector $\boldsymbol{P}$ no es paralelo al $\boldsymbol{E}$. Por consiguiente, el vector $\boldsymbol{D}$ tampoco será, en este caso, paralelo a la intensidad del campo.

En los monocristales, la dirección en que se desvía la carga eléctrica libre ($\boldsymbol{E}$), no coincide con la dirección de la normal a la superficie situada de manera que en ella se induzca la carga máxima ($\boldsymbol{D}$). La relación entre $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$ se hace más compleja, y para poder hallar $\boldsymbol{D}$ por el valor de $\boldsymbol{E}$, o al contrario, resulta que es insuficiente conocer sólo la constante dieléctrica. En cualquier monocristal resulta ser posible encontrar tres direcciones (ejes principales) en las cuales $\boldsymbol{D} \parallel \boldsymbol{E}$. Es importante conocer ε para estas tres direcciones, porque entonces puede establecerse también

la relación entre $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ para una orientación arbitraria del cristal en el campo. ¿Cuál será la relación entre los vectores $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{P}$ en este caso? Resulta que la ecuación $\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$, dada en el párrafo precedente y deducida para el caso en que los vectores son paralelos, conserva su validez cuando los vectores dejan de ser paralelos. Existe otra diferencia entre los cuerpos cristalinos y los amorfos relacionada con sus propiedades dieléctricas. De entre las sustancias cristalinas se puede destacar una clase relativamente reducida de cuerpos que poseen propiedades de histéresis. Como estas propiedades se observaron por primera vez en la sal de Seignette o de la Rochelle, las sustancias de este tipo se llaman *eléctricos Seignette* o *eléctricos Rochelle* o más generalmente, *ferroeléctricos*. La peculiaridad de su comportamiento consiste en lo siguiente (véase también la pág. 655).

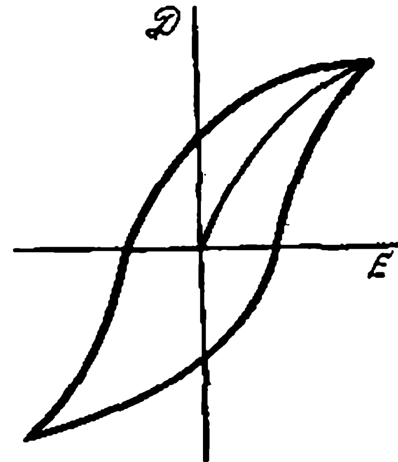


FIG. 101.

Coloquemos un ferroeléctrico (para simplificar vamos a suponer que se trata de polvo o de un cristal situado con respecto del campo de manera que $\mathbf{D}\|\mathbf{E}$) entre las armaduras de un condensador. Variemos la tensión en estas últimas y, por lo tanto, la intensidad del campo $E=U/d$ y midamos la densidad de las cargas σ en dichas armaduras, la cual, cuando sea $\mathbf{D}\|\mathbf{E}$, nos dará el valor de la inducción D. A medida que aumente E, el valor de D crecerá, pero no de manera directamente proporcional a E. El crecimiento de D se irá haciendo más lento, hasta que al final se produce la saturación. Está claro que la saturación de D corresponde a la saturación de polarización. Comencemos ahora a disminuir la tensión en las armaduras. El desplazamiento y la polarización empiezan a decrecer y la curva desciende, pero no por el mismo camino que al subir. Como resultado, cuando la tensión se quite por completo ($E=0$), la inducción y la polarización no serán iguales a cero. El dieléctrico se hace semejante a un imán permanente. Tendrá un polo «norte» y un polo «sur» eléctricos y se comportará como un gran dipolo permanente.

El comportamiento posterior de los ferroeléctricos se ve claramente en la fig. 101, que representa el bucle de histéresis. Para «deselectrizar» el dieléctrico hay que cambiar el signo de la tensión en las armaduras del condensador. Aumentando el campo E de sentido contrario, le quitamos la polarización al dieléctrico y después volvemos a electrizarlo, pero cambiando entre sí los puestos de los polos. Finalmente, alcanzamos otra vez la saturación y, en ade-

lante, el proceso puede repetirse en sentido contrario. ¿Por qué se llama histéresis este fenómeno? La palabra griega hystéresis significa retraso. El lazo representado en la figura muestra que el valor de D, lo mismo que los de P y ε, depende del estado que tuvo antes la muestra, es decir, de su historia.

Todos los cristales que carecen de centro de simetría (véase la pág. 655) manifiestan una interesante capacidad de variar sus dimensiones cuando se les aplica un campo eléctrico. Este fenómeno se conoce con el nombre de *electrostricción*.

Los razonamientos termodinámicos demuestran, que si el campo eléctrico produce una deformación, la deformación deberá conducir a su vez a la polarización. Este efecto se llama *piezoeléctrico*. Acerca de las aplicaciones del efecto piezoeléctrico dijimos ya unas palabras en la parte I. De la relación de este fenómeno con la estructura de la sustancia se tratará en la pág. 739.

§ 96. Cuerpos dieléctricos finitos en un campo eléctrico

Con respecto a un cuerpo finito, no conductor, introducido en un campo eléctrico pueden plantearse las siguientes preguntas: ¿qué fuerzas y momentos de fuerza actúan sobre este cuerpo? y ¿qué distorción experimenta el campo cuando se introduce en él un dieléctrico?

El cuerpo dieléctrico introducido en el campo se polariza y adquiere cierto momento de dipolo. Por lo tanto, el comportamiento de este cuerpo en el campo eléctrico, en general, no difiere del comportamiento de un dipolo. Si el vector polarización forma un ángulo con la intensidad del campo, esta posición del dieléctrico será inestable. Sobre el cuerpo actuará un momento de fuerzas que tenderá a volver el cuerpo de tal forma, que los vectores $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{E}$ sean paralelos.

Esto hace que el cuerpo dieléctrico introducido en el campo eléctrico uniforme dado se coloque en una posición determinada de equilibrio, que dependerá de la forma del cuerpo. Veamos cómo ocurre esto en el ejemplo siguiente de una varilla dieléctrica.

La experiencia nos convence de que la posición de equilibrio es aquella en que el eje mayor de la varilla coincide con una línea de fuerza. Como sabemos, en la varilla no existen polos fijos, ¿por qué ocurre, entonces, esto? La causa de este comportamiento peculiar se explica en la fig. 102. En la sección rectangular de la varilla que en ella se representa, las fuerzas que actúan sobre las cargas ligadas se pueden reducir a cuatro, que estarán aplicadas a las cuatro superficies de la varilla rectangular. Vemos que las fuerzas que actúan sobre las caras mayores de la varilla casi se equilibran, y que

las fuerzas que lo hacen sobre las caras menores forman un par de fuerzas que hacen que la varilla se coloque en posición longitudinal a las líneas de fuerza.

Si el cuerpo se encuentra en un campo no homogéneo, además del momento de fuerzas, actuarán sobre él las fuerzas que arrastran el dieléctrico hacia la región en que el campo es más intenso. Este fenómeno puede demostrarse eficazmente con líquidos dieléctricos, obligando al líquido, que se halla en un tubo, a elevarse cuando se aplica tensión al condensador. Fuerzas de este mismo tipo, es decir, que actúan sobre el dipolo en el campo no homogéneo son las que obligan a los pedacitos de papel a adherirse a la varilla de vidrio o de ebonita frotada previamente con una piel.

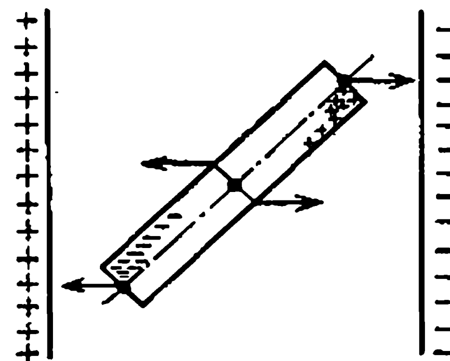


FIG. 102.

Pasemos ahora a tratar el problema de la distorsión del campo eléctrico que se produce al introducir en él un cuerpo dieléctrico. Ante todo demostraremos que las leyes generales del campo eléctrico conducen a relaciones importantes que ligan los valores de los campos eléctricos a uno y otro lado de los límites entre los dieléctricos.

Los vectores intensidad del campo eléctrico en dos puntos contiguos que se hallen en lados distintos del límite entre dos dieléctricos cuyas permitividades sean ε_1 y ε_2 deberán diferir el uno del otro tanto por su magnitud como por su dirección. Descompongamos estos vectores en sus componentes a lo largo de la frontera y según la normal a ella. Podemos asegurar que el campo dirigido a lo largo de la frontera debe ser igual a ambos lados de ella. Supongamos que esta afirmación fuera falsa y que por un lado de la frontera el campo fuera mayor que por el otro. En este caso se podría crear un móvil perpetuo transportando a lo largo de la frontera cargas en contra del campo, allí donde éste es menor, y dándole después a la carga la posibilidad de que se mueva por el otro lado de la frontera (donde el campo es mayor) bajo la acción de las fuerzas del campo eléctrico. Por esto las componentes tangenciales de la intensidad a ambos lados de la superficie de separación deben ser iguales,

$$E_{t_1} = E_{t_2}.$$

Para estudiar las componentes normales en el límite entre los dos medios aplicaremos la ley de Gauss — Ostrogradski. Construimos una superficie auxiliar en forma de cilindro infinitamente bajo, una de cuyas bases se halla a un lado de la frontera y la otra,

al otro. Dentro de este cilindro no hay carga. Por esto el flujo total de inducción a través del cilindro debe ser nulo y los flujos a través de ambas bases deben ser iguales. Esto sólo puede ocurrir si las componentes normales de los vectores de inducción son iguales entre sí: $D_{n_1}=D_{n_2}$. De aquí, para las intensidades de los campos, tenemos:

$$\varepsilon_1 E_{n_1} = \varepsilon_2 E_{n_2}.$$

De este modo la relación de las componentes normales de los vectores intensidad es inversamente proporcional a las constantes dieléctricas.

En la fig. 103 puede verse que al pasar del medio cuya constante dieléctrica es menor a cuerpo en que ε es mayor, las líneas de fuerza se apartan de la normal a la frontera. Esto significa que el número de líneas de fuerza que pasan por la unidad de superficie aumenta.

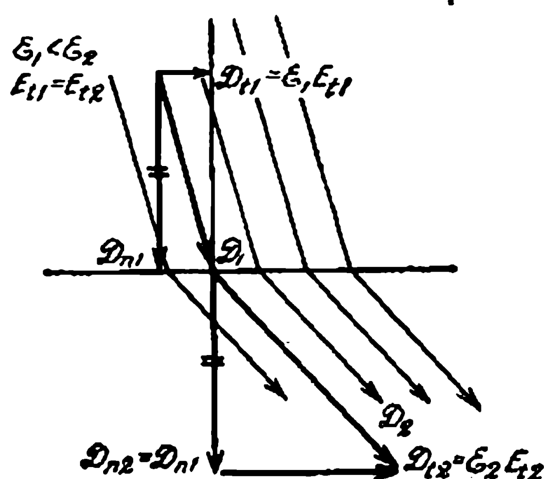


FIG. 103.

El problema de la distorsión del campo eléctrico cuando se introduce en él dieléctrico de forma determinada no puede resolverse. Este problema es complejo incluso en el caso en que el campo sea uniforme antes de que en él se introduzca el dieléctrico. Si el cuerpo tiene una forma arbitraria, al introducirlo en el campo homogéneo lo hace no homogéneo no sólo en sus proximidades, sino también dentro de sí. Una excepción interesante son los elipsoides. Es ésta una extensa clase de cuerpos, ya que a ella pertenecen las esferas, los elipsoides achatados, que prácticamente no difieren de las placas, y los elipsoides alargados, que se aproximan a los cuerpos cilíndricos. Aplicando los métodos de la física matemática se demuestra que dentro del elipsoide el campo será homogéneo, como puede verse en la fig. 104. La ley de la refracción de las líneas de fuerza nos conduce a las figuras típicas de los cuerpos más densos sumergidos en un medio de menor densidad ($\varepsilon_1<\varepsilon_2$) y del caso contrario ($\varepsilon_1>>\varepsilon_2$), por ejemplo, de una burbuja de aire en un vidrio o de un elipsoide de vidrio en el aire.

Puede demostrarse que el campo homogéneo E_0 en el vacío, en el cual introdujimos el cuerpo dieléctrico simétrico, está ligado con el campo E_i, que se establece dentro del dieléctrico, por medio de la relación

$$E_i = E_0 - NP,$$

donde P es el vector polarización y N es un coeficiente que sólo depende de la forma del cuerpo. Cuando se definen fenómenos magnéticos, N suele llamarse coeficiente de desimantación (véase la pág. 309).

Como en la mayoría de los casos $P=\frac{\varepsilon-1}{4\pi}E_i$, después de hacer unas transformaciones fáciles llegamos a la expresión siguiente:

$$E_i=\frac{E_0}{1+(\varepsilon-1)\frac{N}{4\pi}}.$$

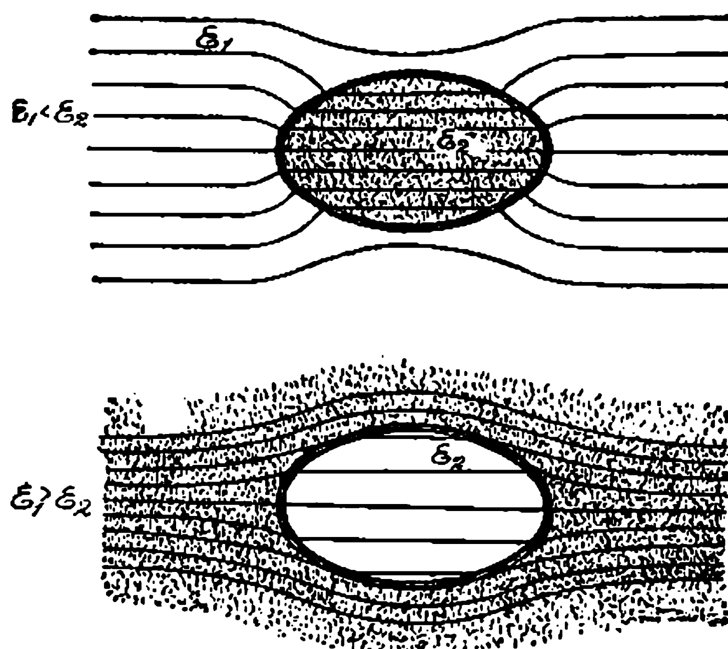


FIG. 104.

La constante dieléctrica es siempre mayor que la unidad. Por lo tanto, la intensidad del campo dentro del dieléctrico será siempre menor que la intensidad que había en este mismo punto del campo antes de introducir el dieléctrico.

El coeficiente N, para una placa plana perpendicular al campo, es igual a 4π. Este es el valor máximo de N; el decrecimiento del campo en ε veces, que se produce en este caso, nos lleva al resultado para el medio homogéneo que ya consideramos anteriormente. El otro caso límite es el de un cilindro dirigido longitudinalmente al campo. Para él $N=0$, este cuerpo no debilita el campo. En todos los demás casos el debilitamiento del campo dependerá ya de la constante dieléctrica. Para una esfera $N=4\pi/3$ y, por consiguiente,

$E_i = \frac{3E_0}{\varepsilon+2}$. Para un cilindro, colocado de manera que forme un ángulo recto con el campo. $N = 4\pi/2$.

La causa de que el campo E se debilite consiste en que las cargas ligadas crean un campo dirigido en sentido contrario. En cuanto se refiere al campo del vector inducción, las cargas ligadas sólo influyen sobre él indirectamente. En efecto, el número de líneas D permanece invariable cuando se introduce un dieléctrico en el campo. No obstante, debido a la refracción de las líneas, la inducción dentro del dieléctrico aumenta.

15

CAMPO MAGNÉTICO

§ 97. Momento magnético

Los campos magnéticos actúan sobre las corrientes, partículas o cuerpos cargados que se mueven y sobre los cuerpos imantados. Se pueden hacer muchos dispositivos diversos que permiten juzgar acerca de las propiedades del campo magnético. Lo más conveniente es caracterizar las propiedades del campo magnético estudiando su acción mecánica sobre un circuito de corriente. Con un alambre puede hacerse perfectamente una espira plana de superficie muy pequeña. Este dispositivo permite medir el campo magnético bastante detalladamente. De este modo, el circuito de corriente de «ensayo» (espira plana) desempeña en la teoría del campo magnético el mismo papel que la carga de «ensayo» en la teoría del campo eléctrico.

Haciendo experimentos con este dispositivo llegamos a establecer los hechos fundamentales siguientes. En cada punto del campo, la espira, si puede girar libremente, ocupa una posición de equilibrio determinada. En este caso la posición de equilibrio estable estará definida no sólo por la posición que tenga en el espacio el eje de la espira, sino también por la posición que tenga en el espacio una cara determinada de dicha espira, por ejemplo, aquella mirando a la cual vemos pasar la corriente en sentido contrario al de las agujas del reloj. Llamemos a esta cara positiva o norte y convengamos en trazar la normal al circuito de manera que forma un sistema dextrógiro con la dirección de la corriente. Mirando en sentido contrario al de la normal, veremos entonces la cara positiva (norte) de la espira.

Comparando el comportamiento del circuito de corriente con el de unas agujas magnéticas se puede descubrir que la normal al circuito que se halla en equilibrio estable tiene la misma dirección y sentido que la aguja magnética. Por lo tanto, al llamar dirección del campo magnético a la dirección que señala la normal a la espira de ensayo libre, no nos apartamos de la definición elemental.

Desviando el circuito de ensayo de la posición de equilibrio, descubrimos la acción que sobre él ejerce el momento de fuerzas (fig. 105). En este caso la desviación de la espira de la posición de equilibrio viene definida unívocamente por la desviación de la normal al circuito respecto de la dirección del campo —el seno del ángulo α y el momento de fuerzas rotacional N resultan ser proporcionales: $N \sim \text{sen}\ \alpha$—. Para un mismo ángulo α, el momento rotacional es proporcional al producto del área de la espira S por la intensidad de la corriente I que pasa por ella. La disminución de la superficie un número cualquiera de veces ocasiona una variación del momento rotacional igual a la que se produciría si la intensidad de la corriente disminuyera el mismo número de veces.

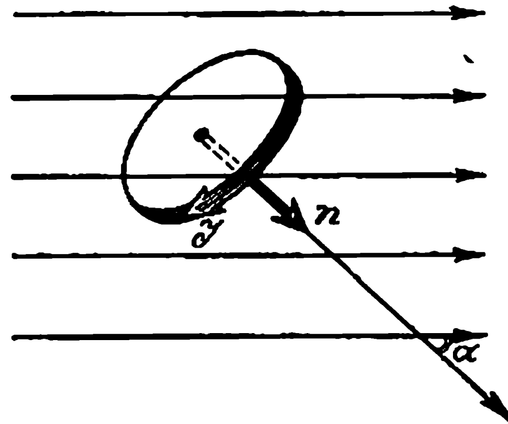


FIG. 105.

De lo dicho se deduce que el comportamiento magnético del circuito depende de la posición que tenga la normal a él y del valor del producto IS. Estos datos pueden unificarse en una magnitud vectorial que se llama *momento magnético de corriente circular* o *anular*. En electrotecnia, donde se utiliza el SI, suele llamarse momento magnético al vector $\boldsymbol{M}=IS\,\boldsymbol{n}$ (donde $\boldsymbol{n}$ es la normal unitaria). En el sistema CGS, que es el que más se emplea por los físicos, en esta fórmula se introduce el coeficiente de proporcionalidad $1/c$, por lo que $\boldsymbol{M}=\frac{1}{c}\,IS\boldsymbol{n}$ (siendo c la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío). La introducción de un coeficiente numérico, y por añadidura dimensional, puede parecer una complicación innecesaria. Sin embargo, haciendo esto se simplifican otras fórmulas; el lector podrá apreciar esta simplificación mucho más adelante.

Los resultados de los experimentos hechos con la espira de ensayo pueden escribirse de la forma: $N=BM\ \text{sen}\ \alpha$, donde B es un coeficiente de proporcionalidad. Para campos diferentes o para distintos puntos del espacio de un mismo campo, la magnitud B

tendrá valores diversos. Por el sentido de la fórmula que hemos escrito, B es igual al momento de rotación máximo que actúa sobre un circuito de ensayo unitario ($M=1$). Este coeficiente B, que caracteriza al campo magnético, se llama *inducción magnética.* La magnitud vectorial que tiene la dirección del campo magnético y que numéricamente es igual a B, recibe el nombre de *vector inducción magnética.*

Si el momento de rotación se describe por medio de un vector dirigido a lo largo del eje de giro (de acuerdo con las reglas del sistema dextrógiro), su fórmula puede escribirse en la forma llamada producto vectorial de los vectores, a saber: $\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{MB}]$.

Si $N=0$, $\boldsymbol{M}$ será paralelo a $\boldsymbol{B}$; esto significa que todo circuito de corriente tiende a orientarse en el campo magnético de manera que su momento magnético coincida con la dirección del campo. Sobre un cuerpo actuará el momento magnético máximo en el caso en que dicho momento forme un ángulo de 90° con la dirección del campo. Para el circuito de ensayo esta circunstancia se da cuando el plano de la espira de alambre ocupa la posición longitudinal a las líneas de fuerza.

Después de haber determinado el campo magnético por medio de un circuito de corriente, cuyo momento magnético se calcula midiendo la intensidad de la corriente y el área, podemos aplicar la fórmula $\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{MB}]$ para determinar los momentos magnéticos de aquellos sistemas en que no puede medirse la intensidad de la corriente. Es más, podemos extender el concepto de momento magnético a sistemas en los cuales la idea de corriente eléctrica anular pierde su sentido. Así, precisamente, obra el físico cuando habla del momento magnético del electrón o de una partícula nuclear. El momento de una aguja magnética también es un concepto imposible de desintegrar. Pero acerca del momento magnético de un imán permanente volveremos a tratar en la pág. 516, considerando ciertas influencias específicas del medio. Como quiera que sea, el momento magnético de un sistema que se halle en el vacío puede determinarse siempre por la fórmula dada del momento de rotación.

Para hacer girar, a partir de la posición de equilibrio, un cuerpo que posee momento magnético, hay que realizar trabajo. Si el giro es de un ángulo α pequeño, el trabajo de rotación se puede representar de la forma

$$N d\alpha = BM \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = -d\,(BM \cos \alpha).$$

La desviación del cuerpo de la posición de equilibrio va ligada a un incremento de energía potencial $U=-BM\cos\alpha$. Esta expresión es el producto escalar de dos vectores; por consiguiente, $U=-\boldsymbol{BM}$.

En la posición de equilibrio la energía potencial es mínima e igual a $-BM$, cuando el momento magnético se hace girar 90°, la energía potencial crece hasta cero y, finalmente, cuando el momento magnético se sitúa antiparalelamente al campo (posición de equilibrio inestable), la energía potencial es máxima e igual a $+BM$.

Ejemplos. 1. El momento magnético del núcleo del átomo de hidrógeno (magnetón nuclear) es igual a $0{,}505\cdot 10^{-23}$ u. CGS. El momento magnético del electrón (magnetón de Bohr) es de $0{,}927\cdot 10^{-20}$ u. CGS$=9{,}27\cdot 10^{-24}$ A·m².

2. Una corriente eléctrica de 1 A, pasando por una espira de 50 cm² de superficie, crea un momento magnético de $5\cdot 10^{-3}$ A·m²$=5$ u. CGS.

3. En el sistema absoluto de unidades, la inducción magnética se mide en gauss (GS); en el SI, B se mide en teslas (T) y tiene la dimensión V·s/m²; 1T$=$ $=10^4$ Gs. Para el campo magnético de la Tierra $B=0{,}49$ Gs.

4. En el entrehierro de una máquina eléctrica potente, la inducción magnética alcanza varios millares de gauss. El académico soviético P. L. Kapitsa obtuvo campos magnéticos impulsivos de $B\sim 10^5$ Gs$=10$ T.

§ 98. *Fuerza de Ampere*

La existencia del momento de rotación que actúa sobre el circuito de corriente es indudablemente el resultado de la acción de unas fuerzas sobre cada trozo del conductor por el cual pasan las cargas. La ley de la fuerza que actúa sobre un elemento de corriente se puede establecer empíricamente. Para esto hay que separar un trozo del conductor, por ejemplo, por medio de unos contactos de mercurio. Entonces este trozo podrá desplazarse por la acción de la fuerza. Si este desplazamiento se equilibra con la tensión de un muelle, la fuerza magnética puede medirse (fig. 106).

La ley de la fuerza que actúa sobre un elemento de corriente de pequeña longitud fue establecida primeramente por Ampere y tiene la forma

$$d\boldsymbol{F}=\frac{I}{c}[d\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{B}],$$

es decir,

$$dF=\frac{I}{c}\,dl\cdot B\,\mathrm{sen}\,\widehat{d\boldsymbol{l},\boldsymbol{B}}.$$

La notación vectorial nos recuerda la conocida regla de la mano izquierda. La fuerza que actúa sobre un elemento de longitud de un conductor forma siempre un ángulo recto con el plano que pasa por la corriente y por el vector inducción magnética en este punto. Para conocer la dirección de la fuerza hay que ver por qué lado la rotación del vector $d\boldsymbol{l}$ hacia el vector $\boldsymbol{B}$ se nos presenta en sentido contrario al de las agujas del reloj por el camino más corto. Este lado será el positivo en el sistema dextrógiro y el vector fuerza

«señalará» al observador. La fuerza tendrá su valor máximo cuando el elemento de corriente forme un ángulo recto con el vector del campo. La fuerza será nula para el elemento del conductor que se halle a lo largo de una línea de fuerza.

Antes hemos escrito las fórmulas en el sistema CGS. En el SI no figura el coeficiente $\frac{1}{c}$ y la fórmula de la fuerza de Ampere toma la forma $d\boldsymbol{F}=I\,[d\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{B}]$.

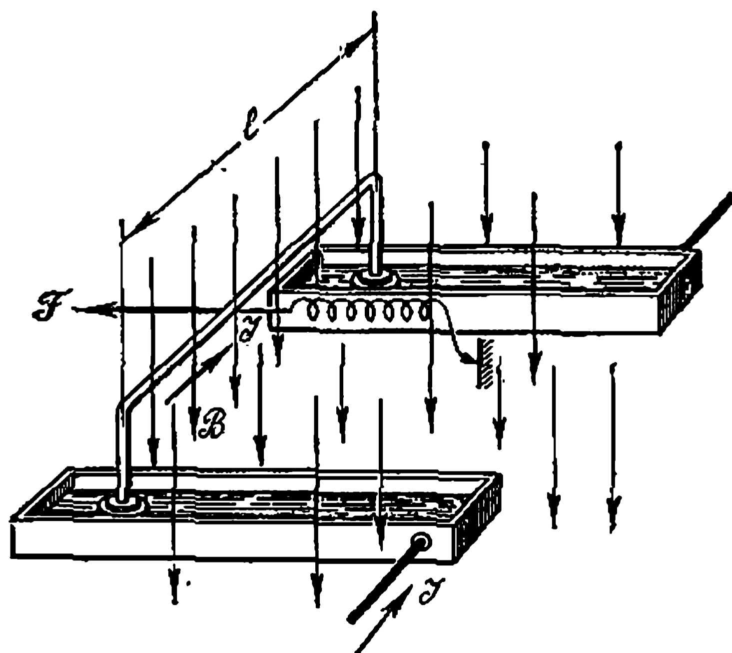


FIG. 106.

Para determinar la fuerza que actúa sobre un trozo de conductor de longitud finita hay que integrar la expresión de la fuerza:

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{c}\int [d\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{B}].$$

Unicamente en el caso más simple de un trozo rectilíneo de conductor de longitud l, que se encuentre en un campo magnético uniforme B, puede aplicarse la ley de Ampere directamente, en la forma

$$F=\frac{1}{c}\,IlB\,\mathrm{sen}\,\widehat{\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{B}}.$$

Se nos figura que es completamente natural la relación entre la ley de Ampere y la expresión del momento de rotación que dedujimos en el párrafo anterior. Consideraremos solamente el simple caso de un cuadro rectangular situado en un campo magnético

uniforme paralelamente a las líneas de fuerza (fig. 107). Dos lados del cuadro son perpendiculares a las líneas de fuerza y los otros dos son longitudinales a ellas. Por consiguiente, todas las fuerzas que actúan sobre los elementos del alambre conductor se pueden reducir a dos, como muestra la fig. 107. Estas fuerzas son iguales entre sí y, por la ley de Ampere, pueden escribirse de la forma $F=IlB$. La misma figura muestra que las fuerzas de Ampere ocasionan el momento de fuerzas $N=IlBd$. Pero $ld=S$ es el área del cuadro, por lo tanto, $N=ISB=MB$, lo que coincide con la fórmula del momento de fuerzas deducida en el párrafo precedente. Damos al lector la posibilidad de hacer más general esta demostración.

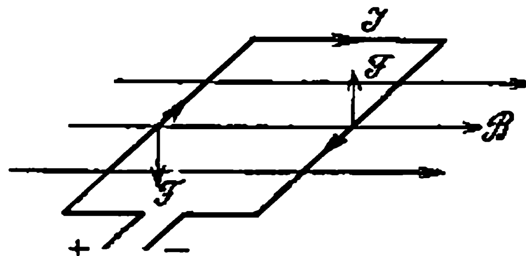


FIG. 107.

Ejemplo. Sobre un conductor de 3 m de longitud, por el que pasa una corriente de 50 A y que se encuentra en un campo de 3000 Gs=0,3 T, actúa una fuerza $F=BIl=0{,}3\cdot 50\cdot 3-45$ N. Si el diámetro del rotor en que está dicho conductor es ~ 1 m, sobre la espira actuará un momento de rotación ~ 45 N·m. Esta cantidad corresponde a los parámetros de una máquina eléctrica grande. En un instrumento de medición eléctrico, sobre un hilo conductor de 2 cm de longitud, que se halla en un campo de 100 Gs, con una corriente de 0,01A, actúa una fuerza $F=2\cdot 10^{-5}$ N=2 din. Si el diámetro del cuadro es de ~ 1 cm, sobre la espira actuará un momento de rotación $\sim 2\cdot 10^{-7}$ N·m.

§ 99. Fuerza que actúa sobre una carga en movimiento

Ahora podemos dar un paso adelante e intentar el estudio de las fuerzas magnéticas que actúan sobre la corriente como fuerzas aplicadas a partículas elementales de electricidad.

La corriente eléctrica no es más que un flujo de partículas eléctricas. Si la carga de cada partícula es e, su velocidad dirigida, $\boldsymbol{v}$, y la concentración de partículas (es decir, su número por unidad de volumen), n, la expresión de la intensidad de la corriente puede representarse de la forma $I=ne\cdot vS$. En efecto, a través de la sección S del conductor pasarán en 1 s todas las partículas que ocupaban el volumen vS, o sea, pasará una cantidad de electricidad $ne\cdot vS$ (fig. 108). Sustituyendo esta expresión en la ley de Ampere, obtenemos

$$dF=\frac{e}{c}\,[\boldsymbol{vB}]\,nS\,dl.$$

Pero $nS\ dl$ es el número de partículas que hay en el volumen considerado del conductor; por lo tanto, sobre una partícula actuará

la fuerza

$$f = \frac{e}{c}[vB].$$

Esta fuerza suele llamarse *fuerza de Lorentz*, en honor del eminente físico holandés H. Lorentz, que contribuyó notablemente al desarrollo de la teoría de los electrones.

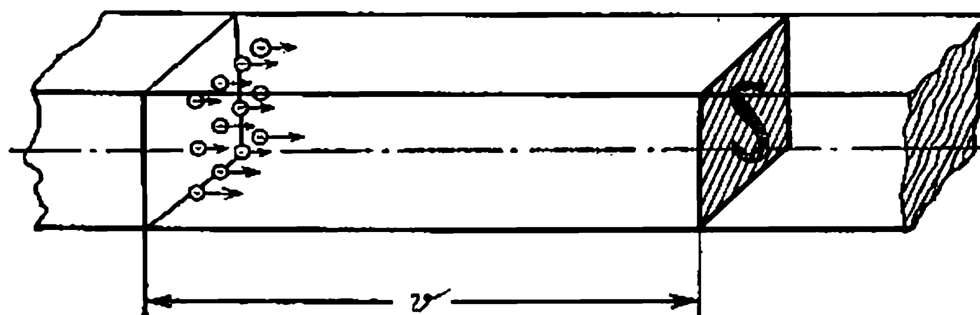


FIG. 108.

Esta expresión de la fuerza (que sólo escribiremos en el sistema cegesimal, con el coeficiente $\frac{1}{c}$) permite responder inmediatamente a la cuestión extremadamente interesante del carácter del movimiento de las partículas eléctricas (electrón, protón, etc.) en un campo magnético. La fuerza que actúa sobre una carga en movimiento está dirigida perpendicularmente a las líneas de fuerza y al vector velocidad de la partícula. Si la partícula se mueve a lo largo de las líneas de fuerza, sobre ella no actúa la fuerza. Por el contrario, la fuerza tiene su valor máximo cuando el movimiento tiene lugar en un plano perpendicular a las líneas de fuerza. En este último caso $f = \frac{1}{c}evB$.

Si el campo es uniforme, la partícula eléctrica que se mueva perpendicularmente a él describirá circunferencias, puesto que el movimiento debido a la acción de una fuerza constante cuya dirección forme con él un ángulo recto, según la ley fundamental de la mecánica, no puede ser otro. Del movimiento de las partículas en el campo magnético volveremos a tratar en la pág. 475.

Ejemplo. En un tubo catódico, los electrones acelerados por una diferencia de potencial de 70 V adquieren la velocidad de $5\cdot 10^{-8}$ cm/s. Al penetrar en un campo magnético de 500 Gs, perpendicularmente a él, el electrón experimenta una fuerza de Lorentz desviadora $f = \frac{1}{c}evB = 4\cdot 10^{-11}$ din. Sometido a la acción de esta fuerza, el electrón comienza a moverse siguiendo una órbita circular cuyo radio R es tal, que $f = mv^2/R$, de donde $R = 5{,}6$ cm.

§ 100. *Campo magnético creado por los imanes permanentes*

Todo imán permanente tiene/dos polos *): del polo norte salen las líneas, y entran por el polo sur. Construyamos mentalmente una superficie que abarque al polo norte de un imán. Podremos hallar el número total de líneas que penetran esta superficie. A este número, por analogía con la correspondiente magnitud eléctrica, le daremos el nombre de *flujo magnético* y lo designaremos por Φ. El flujo a través de un área elemental perpendicular a las líneas de fuerza será $d\Phi=BdS_{\perp}$; y a través de un área cualquiera $d\Phi=B\,dS\cos\alpha$, siendo α el ángulo que forma con las líneas de fuerza la normal al área; a través de una superficie $S\Phi=\int B\cos\alpha\,dS$ y, finalmente, a través de una superficie cerrada $\Phi=\oint B\cos\alpha\,dS$.

El flujo Φ_N, que sale del polo norte del imán y entra por el sur, es la característica fundamental del imán. Cuanto más fuerza tiene el imán, mayor es Φ_N. Esto justifica hasta cierto punto la denominación de «cantidad de magnetismo» (que sólo tiene un significado histórico) dada a una magnitud proporcional al flujo y que precisamente es igual a $m=\frac{1}{4\pi}\Phi$. A veces se le da a m el nombre (aún menos adecuado) de masa magnética. En electrotecnia se utiliza la masa magnética $m=\Phi$.

Si los polos del imán tienen pequeñas dimensiones (aguja magnética), las líneas de fuerza divergen radialmente en las proximidades de ellos.

Valiéndonos de la ley de Gauss — Ostrogradski

$$\oint D\cos\alpha\,dS=4\pi q$$

sentamos las bases de la fórmula de la inducción eléctrica de una carga aislada, $D=q/r^2$. Es evidente que un polo magnético «aislado» debe dar también una inducción magnética que satisfaga a una igualdad análoga:

$$B=\frac{m}{r^2},\quad \text{ya que}\quad \oint B\cos\alpha\,dS=4\pi m\ (\text{CGS}),$$

o bien

$$B=\frac{m}{4\pi r^2},\quad \text{puesto que}\quad \oint B\cos\alpha\,dS=m\ (\text{SI}).$$

Está claro que no existen polos magnéticos «aislados». La fórmula que hemos escrito sólo tiene sentido en el caso de un imán

*) También es posible la creación de imanes con cualquier número de pares de polos.

largo de polo puntual y no muy lejos de dicho polo. Este modo de tratar el polo magnético de un imán permanente está plenamente justificado, como puede verse claramente al plantear la expresión del campo de un imán rectilíneo, considerado como dipolo magnético con dos polos m situados a la distancia l uno del otro. En la fig. 109 se muestra el campo de un imán rectilíneo y un campo ideal calculado por la fórmula

$$\mathbf{B}=\frac{m}{r_1^2}\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}-\frac{m}{r_2^2}\frac{\mathbf{r}_2}{r_2},$$

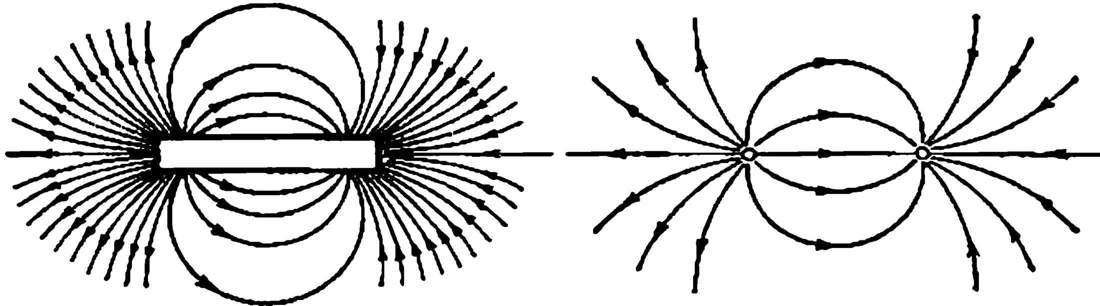


FIG. 109.

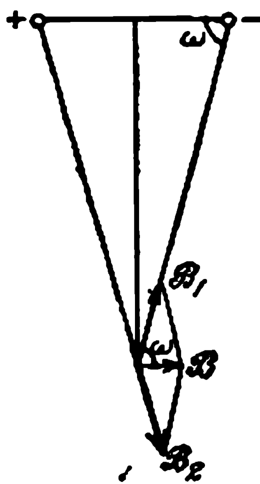


FIG. 110.

donde $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son las distancias desde los polos hasta el punto considerado. La coincidencia de estas figuras es enteramente satisfactoria.

Se obtienen buenos resultados cuando se calculan los campos a grandes distancias del imán. En efecto, si las distancias r_1 y r_2 son grandes comparadas con la longitud l del imán (brazo del dipolo magnético), la consideración de los polos como puntos está totalmente justificada. Estos cálculos no difieren en nada de los correspondientes, relativos a las interacciones eléctricas. Comparemos, por ejemplo, el valor de la inducción magnética creada por un imán rectilíneo, a una distancia grande de él, a lo largo de su eje y perpendicularmente a éste. En el primer caso tendremos

$$B=\frac{m}{r^2}-\frac{m}{(r+l)^2}=\frac{2ml}{r^3}=\frac{2M}{r^3},$$

donde $M=ml$ se llama momento magnético del imán permanente. En el segundo caso (fig. 110)

$$B=2\frac{m}{r^2}\cos\omega=\frac{M}{r^3}.$$

Así, pues, el campo a lo largo del eje es el doble de intenso. En el

sistema SI las dos últimas fórmulas tendrán respectivamente las formas

$$B=\frac{M}{2\pi r^3} \text{ y } B=\frac{M}{4\pi r^3}.$$

Ejemplo. Calculemos la inducción magnética que crea un imán rectilíneo de longitud $l=10$ cm, a la distancia $r=1$ m del imán, a lo largo de su eje. El área de la sección transversal del imán $S=3$ cm², la inducción en el imán es de 500 Gs.

El flujo magnético en el imán (que es el mismo que sale del polo) $\Phi=500\times\times 3=1500$ maxwellios (Mx). En este caso en el polo del imán se halla concentrada una «masa magnética» $m=\frac{1500}{4\pi}=120$ u. CGS. El momento magnético del imán

$$M=ml=120\cdot 10=1200 \text{ u. CGS (erg/gs)}.$$

La inducción magnética que buscamos será

$$B=\frac{2M}{r^3}=\frac{2\cdot 1200}{(100)^3}=2{,}14\cdot 10^{-3} \text{ Gs}.$$

§ 101. *Intensidad del campo magnético*

Consideraremos la interacción de un polo magnético aislado y de un elemento de corriente (fig. 111). El polo magnético crea un campo $\boldsymbol{B}$ en el punto en que se encuentra la corriente eléctrica. Por consiguiente, por la ley de Ampere, sobre el elemento de corriente actuará la fuerza

$$d\boldsymbol{F}=\frac{1}{c}I\,[d\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{B}].$$

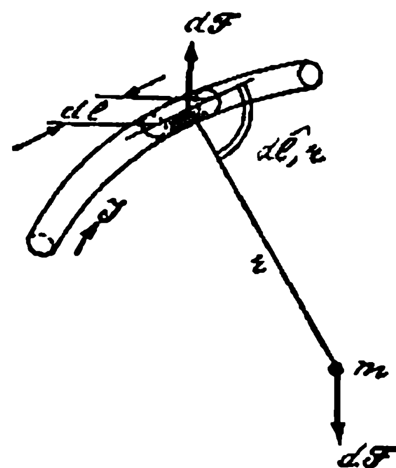


FIG. 111.

La inducción magnética puede sustituirse por su expresión para un polo puntual. Teniendo en cuenta que el campo tiene dirección radial, para la fuerza de interacción obtenemos las expresiones siguientes:

$$d\boldsymbol{F}=\frac{m}{cr^2}I\left[d\boldsymbol{l},\ \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right],$$

o bien

$$dF=\frac{mI}{cr^2}dl\cdot\operatorname{sen}\widehat{d\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{r}}.$$

Resulta completamente natural admitir que la fuerza con que el elemento de corriente actúa sobre el polo magnético debe estar representada por esta misma fórmula, invirtiendo la dirección de la fuerza. Esta suposición no puede comprobarse directamente en la práctica, porque no podemos aislar un polo ni tomar separadamente

un elemento de corriente continua. Sin embargo podemos comprobar la validez de dicho postulado integrando las fuerzas de interacción para casos experimentales. Y, en efecto, la teoría coincide con la experiencia.

Por lo tanto, la fuerza con que actúa un elemento de corriente sobre un polo magnético puede representarse de la forma

$$d\boldsymbol{F}=\frac{m}{cr^2}\,I\left[d\boldsymbol{l},\ \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right]$$

o en el SI, sin coeficiente $1/c$ y sustituyendo m por $m/4\pi$,

$$d\boldsymbol{F}=\frac{m}{4\pi r^2}\,I\left[d\boldsymbol{l},\ \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right].$$

En esta fórmula no ponemos el signo menos porque suponemos que el radio vector ha sido invertido. Como dirección de $\boldsymbol{r}$ se toma siempre la que va desde la fuente del campo hasta el punto en observación. Por esto, cuando nos referíamos a la fuerza que actúa sobre la corriente, $\boldsymbol{r}$ se consideraba dirigido del polo al elemento de corriente. Pero ahora, cuando se trata de la fuerza que por parte de la corriente actúa sobre el polo, el radio vector $\boldsymbol{r}$ se supone dirigido del elemento de corriente al polo.

La fuerza que actúa sobre un polo magnético único recibe el nombre de *intensidad del campo magnético*:

$$d\boldsymbol{H}=\frac{d\boldsymbol{F}}{m}.$$

Con nuestros razonamientos hemos demostrado que la intensidad del campo magnético que crea un elemento de corriente viene expresada por la fórmula

$$d\boldsymbol{H}=\frac{I}{cr^2}\left[d\boldsymbol{l},\ \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right].$$

En el SI, la fórmula que define la intensidad del campo magnético creado por la corriente tendrá la forma

$$d\boldsymbol{H}=\frac{I}{4\pi r^2}\left[d\boldsymbol{l},\ \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right].$$

Existen, pues, dos características del campo magnético: el vector inducción, que se mide por la acción del campo magnético sobre las corrientes, y el vector intensidad, que puede obtenerse experimentalmente midiendo la acción del campo sobre el imán.

Desde el punto de vista práctico, lo más cómodo es reducir la medición de la intensidad a la medida del momento de rotación que actúa sobre una aguja magnética (fig. 112). Una aguja de este tipo, colocada en un campo uniforme, estará sometida a la acción de un par de fuerzas; la magnitud de la fuerza será igual a mH y

su brazo, igual a $l$sen α. De aquí obtenemos para el momento de rotación la expresión

$$N = MN \text{ sen } \alpha$$

o, en forma vectorial, $\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{MH}]$, donde $\boldsymbol{M}=m\boldsymbol{l}$ es el momento magnético de la aguja, lo que recuerda mucho la fórmula del momento de fuerzas que actúan sobre un circuito de corriente.

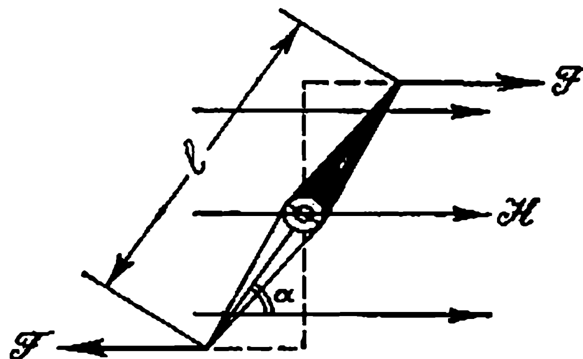


FIG. 112.

El problema acerca de la relación entre la intensidad del campo magnético y la inducción magnética debe resolverse experimentalmente. Resulta que en todos los casos, a excepción de los cuerpos anisótropos, los vectores intensidad e inducción son paralelos entre sí. Esto significa que la aguja magnética y el eje del circuito de ensayo se situarán siempre paralelamente. Además, en todos los casos, excepto en las sustancias ferromagnéticas, entre $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{B}$ existe una dependencia lineal simple: $\boldsymbol{B}=\mu_0\mu\boldsymbol{H}$, donde μ_0 es una constante universal llamada *permeabilidad magnética del vacío*, y μ es un coeficiente característico del medio que se llama *permeabilidad magnética relativa del medio.*

En el sistema CGS se supone $\mu_0=1$. Esto hace que la inducción y la intensidad magnéticas tengan la misma dimensión. No obstante, esta igualdad dimensional no se consigue graciosamente, sino a costa de introducir el coeficiente dimensional $1/c$ en la ley de Ampere. En el SI, la permeabilidad magnética del vacío es $\mu_0=$ $=4\pi\cdot10^7$ J/(A$^2\cdot$m).

§ 102. *Interacciones de las corrientes con los imanes*

Las leyes estudiadas en los párrafos anteriores permiten, en principio, calcular las interacciones de los sistemas magnéticos cualesquiera que sean. Disponemos de las fórmulas de las fuerzas y de los pares o momentos de fuerzas que actúan sobre los aparatos por parte del campo magnético, cualquiera que sea su origen:

Sobre la corriente		Sobre el imán
CGS	SI	
$F=\frac{I}{c}[dl,\ B]$ $N=[MB]$ donde $M=\frac{1}{c}IS$	$F=I[dl,\ B]$ $N=[MB]$ donde $M=IS$	$F=mH$ $N=[MH]$ donde $M=ml$

Fórmulas que relacionan los campos con sus fuentes

Campos de corrientes		Campos de imanes	
CGS	SI	CGS	SI
$dH=\frac{I}{cr^2}\left[dl,\ \frac{r}{r}\right]$ $B=\mu H$	$dH=\frac{I}{4\pi r^2}\left[dl,\ \frac{r}{r}\right]$ $B=\mu_0\mu H$	$B=\frac{m}{r^2}$ $B=\frac{2M}{r_3}$	$B=\frac{m}{4\pi r^2}$ $B=\frac{M}{2\pi r^3}$

Sustituyendo cualquiera de las fórmulas del segundo cuadro en cualquiera de las del primero y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{B}=\mu_0\mu\boldsymbol{H}$, obtenemos las fórmulas de las interacciones magnéticas, electromagnéticas, magnetoeléctricas y electrodinámicas. Cada tipo de interacción lo aclararemos con un ejemplo.

Interacción magnética, es decir, acción de un imán sobre otro. Dos polos situados a la distancia r entre sí interaccionan de acuerdo con la ley de Coulomb, o sea,

$$F=\frac{m_1m_2}{\mu r^2}\ \text{(CGS)}, \qquad F=\frac{m_1m_2}{4\pi\mu_0\mu r^2}\ \text{(SI)}.$$

La fuerza de interacción es inversamente proporcional a la permeabilidad magnética.

Acción electromagnética, es decir, acción de una corriente sobre un imán. La aguja magnética experimenta un momento de rotación por parte del elemento de corriente. Para simplificar admitimos que $\boldsymbol{M}\perp\boldsymbol{H}$, o sea, la aguja magnética está situada transversalmente a las líneas de fuerza.

$$dN=\frac{MI}{cr^2}\,dl\operatorname{sen}\widehat{d\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{r}}\ \text{(CGS)}, \quad dN=\frac{MI}{4\pi r^2}\,dl\operatorname{sen}\widehat{d\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{r}}\ \text{(SI)}.$$

Esta interacción no depende de la permeabilidad magnética, es decir, de las propiedades del medio.

Acción magnetoeléctrica, es decir, acción de un imán sobre una corriente. El circuito de corriente se encuentra en la prolongación del eje de un imán rectilíneo y a una distancia r de él (fig. 113). El circuito experimenta un momento de rotación

$$N = M_{cor} B \operatorname{sen} \alpha = \frac{M_{cor} M_{magn}}{r^3} \operatorname{sen} \alpha \text{ (CGS)},$$

ó

$$N = \frac{M_{cor} M_{magn}}{2\pi r^3} \operatorname{sen} \alpha \text{ (SI)}.$$

La interacción no depende de la permeabilidad magnética.

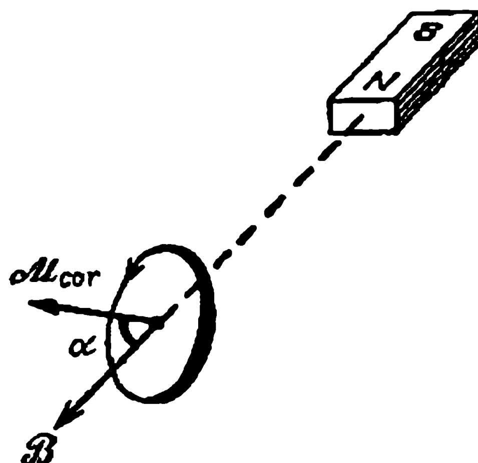


FIG. 113.

Ejemplo. Un circuito (espira) de área $S=20$ cm², por el que pasa una corriente $I=10$A, interacciona a la distancia de 100 cm con un imán rectilíneo cuyo momento magnético $M_{magn}=1000$ u. CGS$=1$ A·m. Sobre el circuito actuará el momento de rotación

$$N = \frac{2M_{cor} M_{magn}}{r^3}.$$

$$M_{cor} = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \cdot 10 \cdot 20 = \frac{2}{3} \cdot 10^{-8} \text{ u. CGS},$$

$$N = 4 \cdot 10^{-5} \text{ din} \cdot \text{cm} = 0{,}04 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Acción electrodinámica, es decir, acción de una corriente sobre otra. Dos corrientes paralelas se atraen con una fuerza

$$dF = \frac{I_1}{c} dl_1 B,$$

o sea,

$$dF = \mu \frac{I_1 I_2 dl_1 dl_2}{c^2 r^2} \text{ (CGS)}, \text{ ó } dF = \mu_0 \mu \frac{I_1 I_2 dl_1 dl_2}{4\pi r^2} \text{ (SI)}.$$

Esta interacción es directamente proporcional a la permeabilidad magnética.

Igualmente se pueden plantear las fórmulas para otras interacciones cualesquiera de sistemas magnéticos.

Ejemplo. La interacción electromagnética debe tenerse muy en cuenta cuando se tienden barras conductoras de corriente. En el caso de un corto circuito, tanto las barras como los aisladores que las sostienen deben tener suficiente resistencia para aguantar grandes cargas electrodinámicas. Supongamos que por dos barras paralelas, situadas entre sí a la distancia $d=20$ cm, pasan las corrientes $I_1=I_2=3 \cdot 10^4$ A. Sobre la unidad de longitud de una de las barras actúa la fuerza $F=BI=\mu_0 HI$, donde $H=I/(2\pi d)$ es la intensidad del campo magnético que crea

la corriente rectilínea que pasa por la otra barra (véase la pág. 294). Tenemos

$$F=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}=\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 9\cdot 10^8}{2\pi\cdot 0,2}=900\ N,$$

es decir, sobre cada metro de barra actúa una fuerza de ~90 kgf. Este mismo resultado hubiera podido obtenerse integrando la última fórmula de dF.

§ 103. *Equivalencia de las corrientes y los imanes*

Ya hemos advertido la semejanza que existe entre las expresiones de momentos de rotación que actúan sobre una aguja magnética y sobre una espira con corriente. En efecto, el comportamiento de estos dos sistemas en un campo exterior es extraordinariamente parecido. Si cada uno de los sistemas se caracteriza por la aguja indicadora de su momento magnético, la semejanza será aún más completa. Cada sistema tiende a colocarse en el campo magnético de manera que su momento coincida con las líneas de fuerza de aquél. Si el momento magnético está desviado de su posición de equilibrio estable, sobre el sistema actúa un momento de rotación $N=[\boldsymbol{MH}]$, si se trata de una aguja magnética, y $N=[\boldsymbol{MB}]$, si de una espira de corriente. Respectivamente, las energías potenciales de estos dos sistemas vienen representadas por las fórmulas $U=-\boldsymbol{MH}$ y $U=-\boldsymbol{MB}$.

Como $B=\mu_0\mu H$, se hace evidente la diferencia entre estas fórmulas: la una se transforma en la otra introduciendo en ellas la permeabilidad magnética. De aquí se deduce que, en cuanto se refiere a la acción mecánica, una aguja magnética de momento M equivale a una espira con corriente de momento $M_{cor}=M/(\mu_0\mu)$.

Pero la semejanza de estos dos sistemas no se reduce a lo dicho. Ahora demostraremos que la aguja magnética y la espira con corriente poseen campos propios que coinciden salvo en un factor constante. Esta semejanza tiene lugar a distancias considerablemente mayores que la dimensión del sistema. Demostraremos esto para un punto del espacio que se encuentre en la línea del momento magnético y a la distancia r del centro del sistema. El campo del imán en este punto lo hemos calculado ya y es igual a $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{M}/r^3$. Nos queda por hallar el campo de la corriente anular sobre su eje.

En la fig. 114 se han construido los vectores intensidad creados por los dos elementos de longitud de la circunferencia que corta el plano del dibujo. Los vectores intensidad están dirigidos perpendicularmente al correspondiente elemento de corriente y al radio vector, es decir, se encuentran en el plano del dibujo. Hacia qué lado señala precisamente el vector intensidad, es una cosa que debe determinarse por medio de la regla del producto vectorial o valiéndose de la regla del sacacorchos (que en general es lo mismo).

El campo elemental, en el caso en que consideramos, es igual a $dH=\frac{I dl}{cr^2}$, ya que el elemento de corriente y el radio vector forman un ángulo recto. Compongamos los dos vectores representados

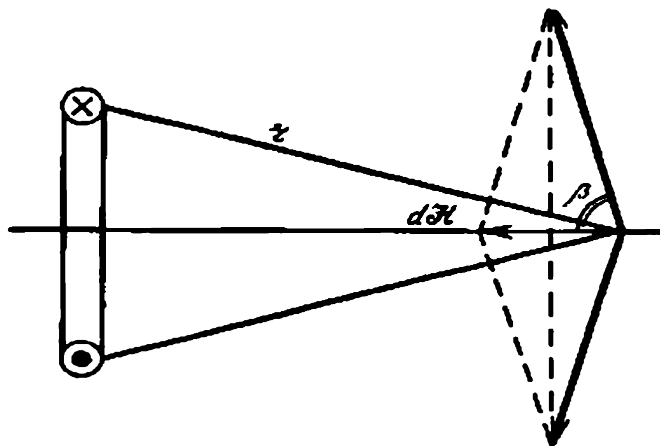


FIG. 114.

en la figura. Para el campo creado por dos elementos «opuestos» obtenemos

$$dH=\frac{2I\,dl}{cr^2}\cos\beta;$$

el sentido de las designaciones se deduce claramente del dibujo. Esta misma magnitud de campo dará cualquier par de elementos «opuestos». Por esto, el campo total lo obtenemos sustituyendo en la última expresión la longitud del elemento dl por la longitud de la semicircunferencia, πa. La intensidad del campo de la corriente anular, en su eje, a la distancia r de la corriente *) viene representada por la fórmula

$$H=\frac{2\pi a^2 I}{cr^3}.$$

Pero $\frac{1}{c}IS$, donde $S=\pi a^2$, es el momento de la corriente anular. Por consiguiente, $H=\frac{2M}{r^3}$, y la inducción magnética $B=\mu\mu_0\frac{2M}{r^3}$.

Con esto queda demostrado que un dipolo magnético y una espira con corriente son equivalentes no sólo en lo que respecta a las fuerzas que actúan sobre ellos, sino también en lo que se refiere a los campos que ellos crean. La equivalencia también aquí tiene el mismo carácter. Para sustituir una aguja magnética de momento

*) Como nos interesan las distancias grandes, la diferencia entre r y la distancia hasta el centro del sistema es despreciable por su pequeñez.

M hay que tomar una espira con corriente cuyo momento sea $M_{cor}=$ $=M/(\mu\mu_0)$.

En el vacío y para el sistema CGS $\mu\mu_0=1$ y el principio de la equivalencia es todavía más simple: una aguja magnética de momento M es equivalente a una espira con corriente que tenga el mismo momento magnético.

Ejemplos. 1. Volvamos al ejemplo de la pág. 285 y calculemos la inducción magnética del mismo imán en el SI:

$$B=0{,}05\ \text{T},\ S=3\cdot10^{-4}\ \text{m}^2,\quad \Phi=15\cdot10^{-6}\ \text{V}\cdot\text{s},$$

$$m=15\cdot10^{-6}\ \text{V}\cdot\text{s},\qquad l=0{,}1\ \text{m},\qquad M=ml=15\cdot10^{-6}\cdot0{,}1=1{,}5\cdot10^{-6}\ \text{V}\cdot\text{s}\cdot m,$$

$$B=\frac{M}{2\pi r^3}=2{,}4\cdot10^{-7}\ \text{T},$$

en total acuerdo con el resultado de la pág. 285.

2 Una espira con corriente $I=5$A, cuya superficie $S=2$ cm², crea a la distancia $r=50$ cm, a lo largo del eje perpendicular a su plano, un campo magnético de intensidad $H=2\ M/r^3$.

$$M=\frac{1}{c}\ IS=\frac{1}{3\cdot10^{10}}\cdot5\cdot3\cdot10^9\cdot2=1\ \text{erg/Gs},$$
$$H=1{,}6\cdot10^{-5}\ \text{oerstedios (Oe)}$$

§ 104. *Carácter rotacional del campo magnético*

El estudio de la marcha de las líneas magnéticas demuestra la diferencia esencial que existe entre el campo eléctrico y el magnético. Las líneas eléctricas tienen principio y fin, en un campo eléctrico continuo no existen líneas cerradas. Por el contrario, la experiencia demuestra que las líneas de fuerza de un campo magnético (es decir, las líneas vectoriales de inducción magnética) son siempre cerradas y que no existen líneas con principio y fin.

Por causas que consideramos anteriormente, las fuerzas y los campos de fuerzas en que el trabajo siguiendo un camino cerrado es nulo, se llaman potenciales. Los campos vectoriales caracterizados por líneas de fuerza cerradas reciben el nombre de rotacionales. El campo magnético es rotacional.

Si en un campo magnético se traza una superficie cerrada, el flujo magnético $\Phi=\oint B\cos\alpha\, dS$ a través de esta superficie será siempre nulo. En otros términos, el número de líneas que entran en esta superficie será igual al de las líneas que salen de ella. La ecuación $\oint B\cos\alpha\, dS=0$ es la expresión matemática del hecho de que las líneas magnéticas no tengan principio ni fin.

La ligazón de las líneas magnéticas con las corrientes que crean el campo consiste en que las líneas magnéticas siempre rodean a

las corrientes. Por esto las integrales tomadas a lo largo de una línea de fuerza de inducción o de intensidad $\oint B\,dl$ o $\oint H\,dl$, deberán ser distintas de cero. Resulta más conveniente considerar la segunda integral, ya que su magnitud debe ser proporcional a la intensidad de la corriente eléctrica rodeada por la línea de fuerza; porque, según la fórmula fundamental de la intensidad, entre H y la intensidad de la corriente existe una proporción directa.

Por analogía con la electrostática, $\int H\,dl$ se llama *tensión magnética*. Si la integral se toma a lo largo de la línea de fuerza,

$$\int H\,dl = \int H\,dl.$$

La tensión magnética a lo largo de una línea cerrada deberá ser proporcional a la corriente en torno a la cual dicha línea se envuelve:

$$\oint H\,dl = kI,$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad.

La línea de fuerza puede abarcar no a una corriente, sino a varias. Para el campo que se crea tiene importancia la suma algebraica de las corrientes, y la ecuación toma entonces la forma

$$\oint H\,dl = k\sum I.$$

Un análisis teórico más profundo, en el que aquí no podemos detenernos, demuestra que la ecuación escrita sufre dos generalizaciones más. En primer lugar, la tensión magnética se puede tomar no sólo a lo largo de una línea de fuerza, sino también a lo largo de un contorno arbitrario; y en segundo, el coeficiente de proporcionalidad de la ecuación es constante, depende únicamente de las propiedades del medio y es igual para todas las condiciones geométricas. De este modo, la tensión magnética tomada para cualquier línea curva cerrada será la misma siempre que dicha curva abarque corrientes de una intensidad determinada. Tanto la forma de la curva como sus dimensiones son indiferentes; la curva puede rodear a una corriente o a una decena de ellas; estas corrientes pueden ser rectilíneas, curvilíneas. . . , nada de esto tiene importancia, la tensión magnética será la misma siempre que la suma algebraica de las corrientes que atraviesan la curva tenga el mismo valor.

Como el coeficiente de proporcionalidad en la fórmula de la tensión magnética es una magnitud universal, podremos hallar k si conseguimos calcular la tensión magnética de cualquier sistema cuyo campo conozcamos.

Ya conocemos la expresión general de la intensidad del campo magnético de una corriente elemental. El cálculo de la tensión

magnética mediante la fórmula de la intensidad

$$dH=\frac{I}{cr^2}\left[dl,\ \frac{r}{r}\right]$$

ofrece dificultades matemáticas. Pero además, conocemos la fórmula de la intensidad del campo magnético en el eje de una corriente circular, $H=2M/r^3$. El cálculo matemático de la tensión magnética a lo largo del eje de una corriente circular no es difícil. El hecho de que la integración se haga a lo largo de una línea recta, cuando lo que nos interesa es la tensión magnetica a lo largo de una curva cerrada, no nos debe desconcertar; puesto que una recta que va desde el infinito negativo hasta el infinito positivo es una curva cerrada —se cierra en el infinito—. La expresión de la tensión magnética $\int H dl$ tomada a lo largo de esta curva cerrada, es decir, a lo largo del eje de una corriente circular desde el infinito negativo hasta el infinito positivo, puede escribirse de la forma

$$2M\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dl}{(\sqrt{l^2-a^2})^3},$$

donde a es el radio y l la distancia medida por el eje del contorno. Esta integral es fácil de resolver si se pasa a una nueva variable β, de acuerdo con la fórmula $l/a=\text{ctg}\,\beta$, y resulta ser igual a $2/a^2$. Haciendo la sustitución $M=(1/c)I\cdot\pi a^2$ e igualando el valor de la tensión magnética a la magnitud kI, obtenemos

$$k=\frac{4\pi}{c}\ (\text{CGS}),$$

$$k=1\ (\text{SI}).$$

La ley de la tensión magnética tiene la forma

$$\oint H\,dl=\frac{4\pi}{c}\sum I \text{ ó } \oint H\,dl=\sum I.$$

La ley de la tensión magnética puede ser muy conveniente para calcular los campos magnéticos de una serie de sistemas. En su aplicación deben ayudarnos las razones de simetría, y en este sentido los razonamientos a que vamos a pasar ahora son muy semejantes a los correspondientes problemas que resolvimos en electrostática valiéndonos de la ley de Gauss — Ostrogradski.

Consideremos ante todo una corriente rectilínea infinita. Por razones de simetría es evidente que la línea de fuerza sólo puede tener la forma de una circunferencia cuyo centro coincide con el eje del conductor. También es indudable que en todos los puntos de la circunferencia el valor numérico de la intensidad será el mismo. Aplicando a esta línea de fuerza la ley de la tensión magnética,

obtenemos: $H\oint dl=\frac{4\pi}{c}I$. En este caso $\oint dl$ no es más que la longitud de la línea de fuerza. Si se consideran los puntos situados a la distancia r del eje del conductor, $\oint dl=2\pi r$ y, por lo tanto, para el campo magnético de una corriente rectilínea infinita, en el espacio exterior al conductor, obtenemos:

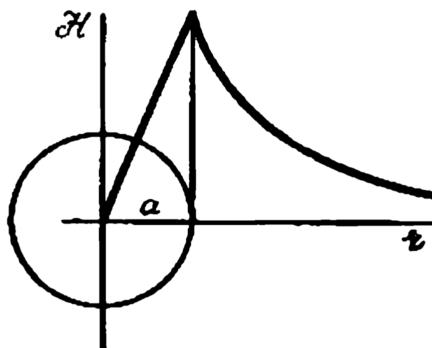


FIG. 115.

$$H=\frac{2I}{cr}\ \text{(CGS)},$$

$$H=\frac{I}{2\pi r}\ \text{(SI)}.$$

Hallemos ahora la intensidad del campo magnético dentro del conductor. Llamemos a al radio del conductor y supongamos que la corriente está distribuida uniformemente a lo largo de su sección. Dentro del conductor las líneas de fuerza también deberán tener forma de circunferencias. Consideremos una de estas líneas de radio r. Por ella pasará una fracción de corriente $\frac{r^2}{a^2}I$ y, por consiguiente, la ley de la tensión magnética da:

$$H\cdot 2\pi r=\frac{4\pi}{c}\frac{r^2}{a^2}I, \quad \text{es decir,} \quad H=\frac{2}{c}\frac{r}{a^2}I,$$

o en el SI

$$H=r\frac{I}{2\pi a^2}.$$

Vemos que la intensidad del campo magnético en el eje del conductor es nula, después va aumentando hasta alcanzar su valor máximo en la superficie del conductor y luego disminuye en proporción inversa a la distancia (fig. 115).

Si el campo se determina en un punto para el cual la distancia r es mucho menor que su distancia hasta el extremo del conductor, la fórmula $H=I/2\pi r$ puede aplicarse para un conductor de dimensiones finitas.

Ejemplo. Calculemos la intensidad del campo magnético a 5 cm de distancia del eje de una corriente rectilínea de 20 A de intensidad.

En el sistema CGS $I=20\cdot 3\cdot 10^9=6\cdot 10^{10}$ u. CGS.

$$H=\frac{2I}{cr}=\frac{2\cdot 6\cdot 10^{10}}{3\cdot 10^{10}\cdot 5}=0{,}8\ \text{Oe}.$$

En el sistema SI $I=20$ A, $r=0{,}05$ m,

$$H=\frac{I}{2\pi r}=\frac{20}{2\pi\ 0{,}05}=64\ \text{A/m}$$

Otro ejemplo importante de aplicación de la ley de la tensión magnética es el cálculo del campo de un solenoide.

Supongamos que sobre una circunferencia de longitud L están arrolladas uniformemente las espiras de un solenoide. El campo dentro del solenoide anular debe ser uniforme y todas las líneas de fuerza deben ser circunferencias concéntricas a L. En la teoría del campo magnético este sistema desempeña el mismo papel que el condensador plano infinito en la teoría del campo eléctrico. Cada línea de fuerza envuelve a todas las n espiras, por lo que la tensión magnética tomada a lo largo de una línea de fuerza de longitud L será igual a

$$\oint H\,dl = \frac{4\pi}{c} nI.$$

Y como $\oint H\,dl = HL$, tenemos que

$$H = \frac{4\pi}{c}\frac{n}{L} I \text{ (CGS)},$$

$$H = \frac{n}{L} I \text{ (SI)}.$$

La intensidad del campo magnético de una bobina se determina por sus «amperios-vueltas», es decir, por el producto de la intensidad de la corriente por el número de espiras por unidad de longitud del solenoide. La última fórmula es una de las justificaciones del sistema electrotécnico de escritura de la ecuación del campo. El solenoide es uno de los elementos fundamentales de los dispositivos electrotécnicos, por lo que la simplificación de la fórmula para el cálculo de la intensidad de su campo magnético es muy útil en la práctica.

La fórmula $H = \frac{n}{L} I$ puede aplicarse también para un solenoide abierto, pero únicamente en aquellos puntos internos que se encuentran suficientemente alejados de los extremos.

Ejemplo. La intensidad del campo magnético en el centro de un solenoide estrecho y largo ($L = 15$ cm, $n = 1500$ vueltas, $I = 0{,}1$ A) será

$$H = 1000 \text{ A/m}.$$

En el sistema CGS este mismo cálculo toma la forma

$$H = \frac{4\pi}{c}\frac{n}{L} I = \frac{4\pi}{3\cdot 10^{10}} \cdot \frac{1500}{15} (0{,}1\cdot 3\cdot 10^{9}) = 12{,}56 \text{ Oe}.$$

$$1 \text{ A/m} = 4\pi\cdot 10^{-3} \text{ Oe}, \quad 1 \text{ Oe} \approx 80 \text{ A/m}.$$

§ 105. *Ley de la inducción electromagnética y fuerza de Lorentz*

Como sabemos, el fenómeno de la inducción electromagnética, descubierto por el gran físico inglés Faraday, consiste en que en un conductor cerrado aparece corriente eléctrica en cuanto varía el valor del flujo magnético que pasa por el conductor cerrado. En este caso la f. e. m. de inducción resulta ser proporcional a la velocidad con que varía el flujo magnético, es decir, a la derivada con respecto al tiempo

$$\frac{d\Phi}{dt}, \text{ donde } \Phi = \int B \cos\alpha \, dS.$$

Demostraremos que la ley de la inducción electromagnética está ligada estrechamente a la existencia de la fuerza de Lorentz. Si la inducción electromagnética aparece cuando el conductor se traslada en un campo magnético, la ley de inducción es consecuencia directa de la expresión de la fuerza de Lorentz.

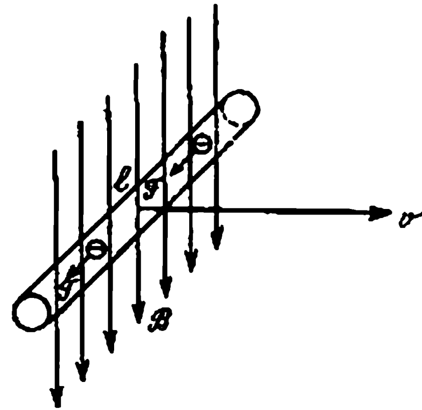


FIG. 116.

Para no complicar la exposición con dificultades puramente matemáticas, hacemos una demostración simplificada, para la cual suponemos que la f. e. m. de inducción aparece en una espira rectangular situada perpendicularmente a las líneas de fuerza de un campo magnético uniforme. La variación del flujo es provocada por la traslación de uno de los lados del rectángulo, de longitud l, de la forma que indica la fig. 116. En el conductor que se traslada hay cargas libres, por lo cual, cuando el conductor se mueve con la velocidad v, estas cargas se someten a la acción de la fuerza de Lorentz $f = \frac{e}{c} vB$. (Como los ángulos entre la dirección de la velocidad, el campo magnético y la dirección del conductor son iguales a 90°, hemos prescindido de los símbolos vectoriales en la fórmula de la fuerza, y el seno del ángulo es en este caso igual a la unidad). La fuerza de Lorentz tiene la dirección perpendicular al plano que pasa por la dirección $\boldsymbol{v}$ de la velocidad de traslación de las cargas (junto con el conductor) y de las líneas de fuerza, es decir, a lo largo del conductor. De este modo las cargas se ponen en movimiento a lo largo del conductor, es decir, se crea una corriente de inducción.

Se llama *fuerza electromotriz* (*f. e. m.*) al trabajo de traslación de la unidad de carga a lo largo de un circuito cerrado. La fuerza

que actúa sobre la unidad de carga es igual a $(1/c)vB$; el trabajo de esta fuerza a lo largo del conductor en movimiento es igual a $(1/c)vBl$, pero en las demás partes del circuito no se efectúa trabajo. Por esto la última expresión es la fórmula buscada de la f. e. m. de inducción.

Esta fórmula tiene la forma

$$\mathscr{E}^{\text{ind}} = \frac{1}{c} vBl \text{ (CGS)},$$

$$\mathscr{E}^{\text{ind}} = vBl \text{ (SI)}.$$

Supongamos que en un tiempo dt el conductor se trasladó una distancia dx. Al ocurrir esto el área del circuito (espira) aumentó en la magnitud $ldx = dS$, y el flujo magnético, en la magnitud $d\Phi = BdS$. Como $v = \frac{dx}{dt}$, la f. e. m. de inducción también puede representarse en la forma $\frac{1}{c}\frac{BdS}{dt}$. Pero esta expresión — $\mathscr{E}^{\text{ind}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$, en el sistema CGS, y $\mathscr{E}^{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$, en el SI — es la ley de inducción electromagnética de Faraday.

Con esto queda demostrado que la inducción electromagnética y la desviación de las cargas eléctricas que se mueven en un campo exterior son manifestaciones de unas mismas leyes de la naturaleza. En el capítulo siguiente volveremos a tratar de este interesante problema. Aquí sólo es necesario recordar el sentido y el contenido de la ley de la inducción electromagnética.

§ 106. *Medición del campo magnético por el método del impulso de inducción*

Aplicando el fenómeno de la inducción electromagnética pueden elaborarse procedimientos bastante perfectos para medir el campo magnético. Supongamos que es necesario determinar el valor del campo magnético en un punto cualquiera del espacio. Se hace una bobina plana de pequeñas dimensiones (o se toma una espira de alambre) y se introduce en el campo magnético en posición perpendicular a las líneas de fuerza. La bobina (o espira) se une por medio de unos conductores con las bornas de un galvanómetro balístico. Si en estas condiciones se hace girar rápidamente el plano de la bobina 90°, de modo que su plano coincida con las líneas de fuerza, durante el giro pasará por la bobina una corriente eléctrica de inducción. Esta breve corriente, que alcanza rápidamente el máximo y a continuación decrece hasta cero, se llama *impulso de inducción* (fig. 117). En el tiempo que dura el impulso, por el conductor pasa

una cantidad de electricidad determinada, que puede medirse muy exactamente con el galvanómetro balístico. Este último es un instrumento que, en virtud de la inercia de su cuadro móvil, permite integrar la corriente eléctrica que pasa durante el impulso.

Si la resistencia de la bobina es R y el número de sus espiras n, la intensidad de la corriente de inducción que pasa por ella se escribe de la forma

$$I = \frac{n}{R}\frac{d\Phi}{dt}.$$

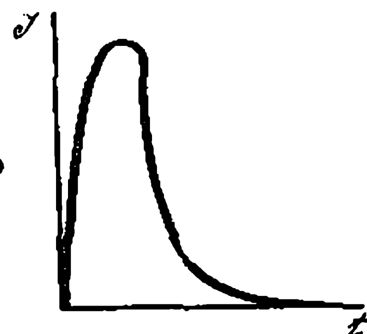


FIG. 117.

La cantidad de electricidad que pasa por el conductor en el tiempo que dura el impulso de inducción será

$$Q = \int_0^\tau I\,dt = R^{-1}n\int_1^2 d\Phi = R^{-1}n(\Phi_2 - \Phi_1),$$

donde Φ_1 es el valor del flujo que pasa por la bobina en la primera posición y Φ_2, el que pasa por la segunda.

Si Φ_1 o Φ_2 es nula (las líneas magnéticas no pasan por la bobina en la posición inicial o en la final), la medición efectuada da el valor de la inducción magnética. No queda más que dividir la magnitud del flujo magnético por el área de la sección S de la bobina $B = QR\,(nS)$.

Como es natural, también son posibles otras variantes de medición. Por ejemplo, en vez de hacer girar la bobina se puede conectar o desconectar el campo. Si hace falta aumentar el efecto, también puede hacerse girar la bobina no 90°, sino 180°, con lo cual se duplica dicho efecto. Con este mismo objeto se recurre, en vez de conectar o desconectar el campo, a cambiar su signo por el opuesto.

Toda vez que la bobina de medición puede hacerse muy pequeña —hasta de un milímetro cuadrado—, las mediciones hechas por este procedimiento pueden contribuir al sondeo exacto del campo magnético en volúmenes pequeños.

Este mismo método se utiliza para medir la tensión magnética. Con este fin se hace un cinturón de medida (llamado cinturón de Rogovski), consistente en un cinturón flexible sobre el que se arrolla una bobina larga. Al cinturón puede dársele cualquier forma y sus dos extremos pueden hacerse llegar a dos puntos cualesquiera del espacio. Estos extremos, si se quiere, también pueden ponerse en contacto. Demostremos que un cinturón de medida de este tipo, unido a un galvanómetro balístico, dará, al conectar un campo, una magnitud proporcional a la tensión magnética que existe a lo largo del camino por el cual está tendido.

El galvanómetro balístico mide la magnitud del flujo magnético que pasa por todas las espiras de la bobina. Sea n la densidad del bobinado, es decir, el número de espiras por unidad de longitud del cinturón de medida. En este caso, en un trozo pequeño de cinturón Δl_i habrá $n\ \Delta l_i$ espiras, y el flujo magnético que pase por estas $n\Delta l_i$ espiras será igual a $\Phi_i\ n\Delta l_i$.

Si el medio es homogéneo y todas las espiras tienen el mismo área,

$$\Phi_i = \mu S H_i,$$

y el flujo magnético total que penetra a todo el cinturón de medida será

$$\Phi = \sum_i \mu Sn\, H_i\, \Delta l_i.$$

Pasando al límite, cuando $\Delta l_i \to 0$, obtenemos

$$\Phi = \mu Sn \int_1^2 H\, dl.$$

Como la medición se lleva a cabo en un medio en que μ se diferencia poco de μ_0, resulta que μSn es la constante del instrumento. Las desviaciones que marca el galvanómetro balístico en las medidas que se hacen por medio del cinturón serán exactamente proporcionales a la tensión magnética que existe entre los puntos en que se encuentran sus extremos.

Con este instrumento es fácil demostrar la ley que consideramos en el § 104. Envolviendo con la bobina una misma corriente veremos que, cualquiera que sea su configuración, la tensión será la misma; también puede comprobarse fácilmente que la tensión magnética a lo largo de un contorno que no rodee a la corriente será nula. Rodeando con la bobina una misma corriente varias veces, nos cercioramos de que la tensión magnética aumenta el número de veces correspondiente, etc.

Hay que subrayar la gran importancia que tiene la medición del campo magnético por el método del impulso de inducción en aquellos casos en que nos interesa conocer el campo magnético que existe dentro de un sólido. Aparte de este método sólo puede recurrirse a practicar ranuras en el sólido, pero esto, en general, no es posible.

Detengámonos en el problema más corriente, en la medición de la permeabilidad magnética de los cuerpos férreos. Los resultados más exactos pueden obtenerse si al cuerpo a analizar se le da la forma de toroide. Sobre este anillo se hacen dos devanados, uno de ellos se une a la fuente de corriente y el otro a un galvanómetro balístico. Si la corriente está conectada, por el anillo pasará el

flujo magnético $\Phi=BS$. Invirtiendo el sentido de la corriente primaria, provocamos en la segunda bobina una corriente de inducción. La cantidad de electricidad Q que pasa por el galvanómetro estará ligada a la inducción magnética dentro del anillo por medio la relación, que ya hemos razonado,

$$B=\frac{QR}{n_2S},$$

donde S es la sección del toroide (se supone que las expiras están bien ajustadas al toroidè). n_2 es el número de espiras del devanado secundario y R su resistencia. En cuanto se refiere a la intensidad del campo magnético, podemos determinarlo por la fórmula, correcta para el solenoide anular, $H=\frac{n_1I}{L}$. El cociente de dividir B por H da el valor de la permeabilidad magnética del material del anillo.

§ 107. *Cuerpos finitos en un campo magnético*

En mayor o menor grado, todos los cuerpos poseen propiedades magnéticas. Las propiedades magnéticas se manifiestan, en primer lugar, en que los cuerpos experimentan las fuerzas y momentos de fuerzas debidos al campo magnético, y en segundo lugar, en que el campo magnético sufre una distorsión si se coloca en él un cuerpo. Como se indicó antes, las propiedades magnéticas de una sustancia se caracterizan por el coeficiente μ, permeabilidad magnética de dicha sustancia. Por los valores de μ, los cuerpos pueden dividirse claramente en tres clases: ferromagnéticos, a los cuales pertenecen el hierro, níquel y cobalto y que poseen valores positivos de la permeabilidad magnética relativa mucho mayores que la unidad; paramagnéticos, cuya permeabilidad es algo mayor que la unidad; y diamagnéticos, con una permeabilidad magnética que es poco menor que la unidad. En la tabla que sigue se dan las cifras típicas.

Sustancia	μ	$\varkappa$
Cobre	0,999990	-10^{-5}
Agua	0,999991	$-9\cdot10^{-6}$
Platino	1,000300	$-300\cdot10^{-6}$
Silicio	0,999986	$-14\cdot10^{-6}$
Volframio	1,000079	$79\cdot10^{-6}$

La distorsión del campo magnético que se produce al introducir en él cuerpos diamagnéticos y paramagnéticos es insignificante.

En cambio, el campo magnético se deforma considerablemente si en el espacio se introducen cuerpos ferromagnéticos.

Las acciones de las fuerzas del campo magnético pueden descubrirse sin dificultad tanto cuando se trata de cuerpos paramagnéticos como diamagnéticos. Y no hablemos ya de las considerables fuerzas que sufren por parte del campo magnético los cuerpos férreos; estas fuerzas son conocidas perfectamente por todos.

Nos detendremos primeramente a estudiar las fuerzas magnéticas. Todo cuerpo carente de propiedades magnéticas se transforma en magnético al ser introducido en un campo. Este proceso es la imanación, imantación o magnetización del cuerpo, que se manifiesta porque el cuerpo adquiere momento magnético. Como sabemos, un sistema que posee momento magnético puede manifestarse de dos maneras. En un campo uniforme, el cuerpo de este tipo gira hasta que la dirección del momento coincide con la del campo exterior. Si el campo no es uniforme, el cuerpo, además de esto, sufre una fuerza cuya acción hace que se mueva a lo largo de las líneas de fuerza.

En los cuerpos ferromagnéticos el momento de rotación puede descubrirse sin dificultad. Por la fórmula $\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{MH}]$ se puede hallar el momento magnético del cuerpo. Pero lo más frecuente suele ser que nos interese no un cuerpo de forma casual, sino una sustancia. Por esta razón, siempre que es posible, el valor medido del momento magnético se refiere a la unidad de volumen. El vector dirigido a lo largo del momento magnético y numéricamente igual a la magnitud de dicho momento correspondiente a la unidad de volumen se llama *vector magnetización* $\boldsymbol{J}$. Está claro que la reducción del momento magnético de un cuerpo al vector de magnetización no ofrece dificultad solamente en el caso en que existe la seguridad de que la imanación de la probeta es uniforme. Esto ocurre cuando dicha probeta tiene la forma de elipsoide o de elipsoide degenerado, es decir, de cilindro, placa o esfera (véase la pág. 274). Con estos cuerpos son con los que se hacen los experimentos.

La determinación del vector de magnetización, midiendo el momento de rotación, es fácil en los cuerpos ferromagnéticos. En los cuerpos paramagnéticos y diamagnéticos son muy pequeños los momentos de rotación y medirlos es difícil. En estos casos es preferible medir la fuerza que actúa sobre el cuerpo cuando éste se encuentra en un campo no uniforme.

Consideremos un elemento de volumen de material magnético que se encuentre en un campo no uniforme. Para simplificar supondremos que dicho campo varía a lo largo de un eje y que el gradiente del campo es igual a $\frac{dH}{dx}$. Cada elemento de volumen del magnético se comportará como un dipolo magnético; por lo tanto,

la energía potencial de la unidad de volumen puede escribirse de la forma $U = -JH$. Si su momento fue establecido a lo largo del campo, la fuerza que actúa sobre la unidad de volumen del magnético será igual a la derivada de la energía potencial con respecto a la coordenada, es decir,

$$f = -J\frac{dH}{dx}.$$

De este modo, conociendo el gradiente del campo y midiendo la fuerza, se puede hallar la magnitud del momento magnético de la unidad de volumen del cuerpo que se analiza. En la práctica esto se lleva a cabo en diversos aparatos. El más simple de ellos es la llamada balanza magnética. En uno de los platillos de una microbalanza de precisión se practica un orificio, a través del cual se hace pasar un hilo. Del extremo libre de este hilo se cuelga la probeta y se coloca entre los polos de un electroimán. La probeta se equilibra primero antes de conectar el electroimán y luego, después de crear el campo. La diferencia de pesos que indica la balanza da el valor de la fuerza f.

La balanza debe ser de suficiente precisión, como se deduce del siguiente ejemplo. Un trocito de bismuto (la sustancia diamagnética más enérgica) colocado en un campo magnético, cuya intensidad $H \sim 1000$ Oe, tiene un vector magnetización $J = 2\cdot 10^{-2}$ u. CGS. Si el gradiente del campo no uniforme $\frac{dH}{dx} \sim 50$ Oe/cm, sobre cada centímetro cúbico de bismuto actuará una fuerza de sólo 1 din, es decir, $f \sim 1$ din/cm³.

La experiencia demuestra que para los cuerpos diamagnéticos y paramagnéticos, entre el vector magnetización y la intensidad del campo magnético existe una dependencia simple

$$J = \mu_0 \varkappa H,$$

donde $\varkappa$ es la *susceptibilidad magnética*. Para los cuerpos diamagnéticos $\varkappa$ es negativa, y para los paramagnéticos, positiva. Los valores de $\varkappa$ se incluyen en la tabla de la pág. 301. Cuando los valores de $\varkappa$ son positivos, el vector magnetización es paralelo al vector intensidad del campo, y cuando los valores de $\varkappa$ son negativos, o sea, para los cuerpos diamagnéticos, el sentido del vector magnetización es opuesto al del vector intensidad del campo.

Esta diferencia de signo hace que el comportamiento de estas dos clases de cuerpos difiera bastante en condiciones idénticas. La fig. 118 ilustra lo dicho. Las diferencias son en realidad sorprendentes. El cuerpo paramagnético es atraído en la zona de campo intenso,

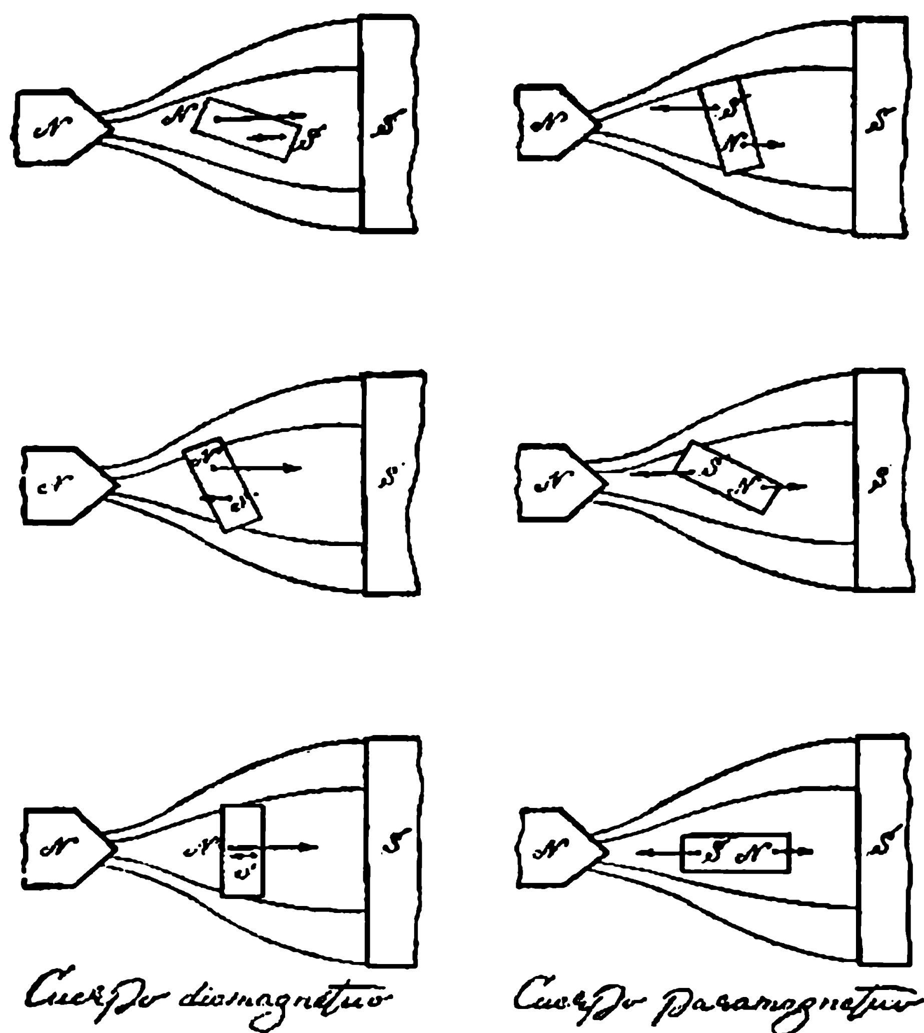


FIG. 118.

mientras que el diamagnético es repelido. En un campo uniforme la aguja paramagnética tiende a situar su eje a lo largo de las líneas de fuerza, la diamagnética, a ponerlo transversal (compárese con el ejemplo análogo acerca del dieléctrico que se puso en la pág. 273).

La determinación de la susceptibilidad magnética midiendo la fuerza en un campo no uniforme puede hacerse tanto con sólidos en forma de monocristales como en forma de polvos. Este método también puede aplicarse sin dificultad a los líquidos. En este caso el experimento se puede hacer de tal forma que la magnitud a medir sea la elevación o el descenso del nivel del líquido atraído o repelido del espacio entre los polos del imán.

§ 108. Relación entre la permeabilidad magnética y la susceptibilidad

Estas dos magnitudes pueden medirse directamente: la permeabilidad magnética se determina midiendo la inducción y la intensidad y calculándola después por la fórmula $\mu = B/H$, y la susceptibilidad, por las acciones que ejercen las fuerzas sobre el magnético, de la forma que acabamos de describir. Está claro que puede establecerse experimentalmente la relación que existe entre estas dos características de las propiedades magnéticas de la sustancia. Pero no hay necesidad de hacer esto, ya que entre μ y $\varkappa$ existe una simple y severa relación que se deduce de los razonamientos que siguen.

Retornemos a la experiencia que hicimos para determinar la permeabilidad magnética del cuerpo en forma de toroide. La bobina primaria que envuelve al toroide crea un campo cuya intensidad $H = nI/L$ no depende de la sustancia del toroide; sin toroide esta misma fórmula representaría también la intensidad del campo. Otra cosa es lo que ocurre con el flujo magnético. Experimentalmente llegamos al convencimiento de que el valor de B depende de la permeabilidad magnética. Si el núcleo de la bobina es de hierro, B se hace centenares y millares de veces mayor. Este aumento del flujo magnético lo relacionamos con el efecto de magnetización.

Prestemos atención en primer lugar al hecho de que, en ausencia del hierro, la inducción magnética del solenoide anular $\mu_0 H$ tiene el sentido del momento magnético de la unidad de volumen.

El momento magnético de una espira de la bobina es igual a IS (haremos los razonamientos refiriéndolos al SI). El momento magnético total del sistema será nIS, y el momento magnético de las corrientes en la unidad de volumen, $\frac{nIS}{LS}$, no será, ni más ni menos, que la intensidad del campo. El momento magnético de los dipolos equivalentes será μ_0 veces mayor (véase el § 103). Por consiguiente, la inducción magnética del campo magnético uniforme creado por las espiras del solenoide anular en ausencia del núcleo, $\mu_0 H$, puede considerarse como el momento magnético de los dipolos equivalentes que le corresponden a la unidad de volumen.

Con todo fundamento podemos suponer que la inducción magnética conservará su sentido si, sin alterar la uniformidad del campo, se llena uniformemente el espacio de la bobina con un número adicional de dipolos magnéticos. Si a la unidad de volumen le corresponde de los dipolos adicionales un momento magnético J, la inducción magnética aumentará en esta magnitud y se hará igual a

$$B = \mu_0 H + J.$$

Este aumento de B ocurre cuando el solenoide se llena de materia. Como $J=\mu_0\varkappa H$, tendremos que $B=\mu_0(\varkappa+1)H$ y, por consiguiente, la susceptibilidad magnética y la permeabilidad se relacionan por medio de la igualdad

$$\mu=1+\varkappa.$$

Razonamientos análogos aplicados al sistema CGS conducen a fórmulas con otros coeficientes. El momento magnético de las corrientes (y dipolos) por unidad de volumen es igual a

$$\frac{n\frac{1}{c}IS}{LS}=\frac{1}{4\pi}H.$$

Por esto, cuando existe medio,

$$\frac{1}{4\pi}B=\frac{1}{4\pi}H+J, \text{ es decir, } B=H+4\pi J.$$

Suponiendo $J=\varkappa' H$, obtenemos

$$B=(1+4\pi\varkappa')H,$$

por consiguiente,

$$\mu=1+4\pi\varkappa', \text{ donde } \varkappa'=\frac{\varkappa}{4\pi}.$$

Ejemplo. Haremos el cálculo del ejemplo de la pág. 303 en el SI. Para el bismuto $\varkappa'=2\cdot 10^{-5}$, o sea, $\varkappa=4\pi\varkappa'=8\pi\cdot 10^{-5}$; el trozo de bismuto se halla en un campo magnético de $H=1000\text{ Oe}=\frac{1}{4\pi}\cdot 10^3\cdot 1000\text{ A/m}=\frac{10^6}{4\pi}\text{ A/m}$, cuyo gradiente de heterogeneidad

$$\frac{dH}{dx}=50\text{ Oe/cm}=50\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot 10^3\cdot 100\text{ A/m}^2=\frac{5\cdot 10^6}{4\pi}\text{ A/m}^2.$$

La magnetización del bismuto será $J=\mu_0\varkappa H=8\pi\cdot 10^{-6}\text{ B}\cdot\text{s/m}^2$. En este caso sobre la unidad de volumen (1 m^3) actuará una fuerza

$$f=J\frac{dH}{dx}=8\cdot 10^{-6}\cdot\frac{5\cdot 10^{-6}}{4\pi}=10\text{ N/m}^3.$$

Está claro que 10 N/m^3=1 din/cm^3, lo que coincide con el resultado del ejemplo anterior.

§ 109. Distorsión del campo al introducir en él un material magnético

La distorsión del campo magnético sólo tiene importancia práctica cuando se introducen en él cuerpos férreos. En gran parte tendremos que repetir aquí razonamientos análogos a los que hicimos en la pag. 274 refiriéndonos a los dieléctricos.

En el límite de separación de dos medios poseedores de distintas permeabilidades magnéticas, los vectores del campo magnético

(tanto de inducción como de intensidad) se refractan. Para hallar las leyes de esta refracción consideremos en primer lugar la tensión magnética tomada a lo largo de un pequeño contorno *ABCD* ajustado estrechamente a la superficie de separación, como muestra la fig. 119. Como por este contorno no pasan corrientes, la tensión magnética será nula. Descompongamos el vector intensidad del campo magnético, por ambos lados de la frontera, en una componente normal y otra tangencial. En la figura se ve claramente que

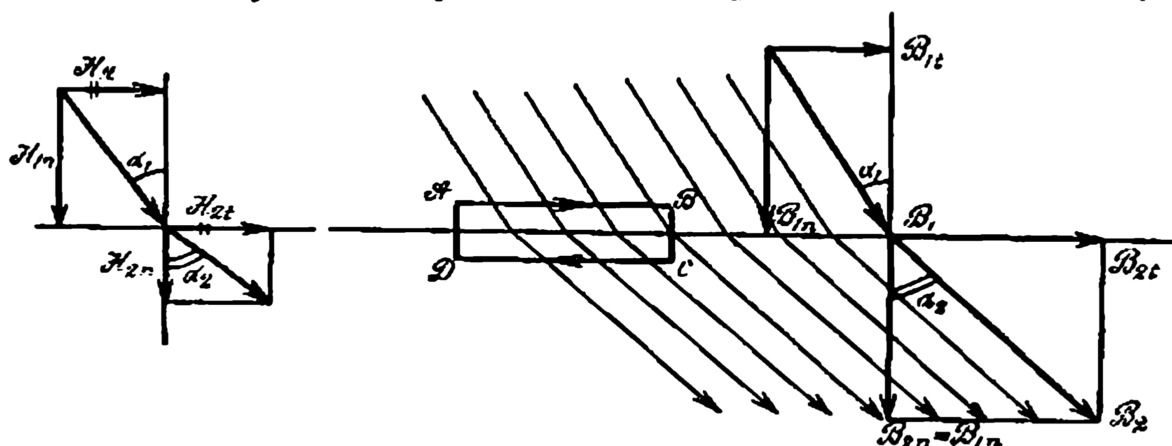


FIG. 119.

la anulación de la tensión magnética sólo puede ocurrir si las componentes tangenciales son iguales entre sí:

$$H_{1t} = H_{2t}.$$

Otra condición en la frontera de los dos medios la hallamos considerando el flujo magnético que pasa por un pequeño cilindro adyacente a la superficie de separación (en la figura no está representado). Como las líneas magnéticas carecen de fuentes, el número de ellas que entran por la base superior del cilindro deberá ser igual al número de las que salen por la base inferior. La superficie lateral es infinitamente pequeña y el flujo a través de ella es nulo. Descompongamos el vector inducción magnética, a ambos lados de la frontera, en dos componentes: una normal y otra tangencial. Es evidente que los flujos que pasan por las bases del cilindro sólo podrán ser iguales si las componentes normales del vector inducción no varían al pasar la frontera: $B_{1n} = B_{2n}$.

Partiendo de estas dos reglas hallamos la ley de la refracción de las líneas de fuerza. En la figura se ve claramente que

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Al pasar del aire al hierro, las líneas magnéticas se desvían de la perpendicular extraordinariamente, por lo que se condensan mucho.

Precisamente por esto el cuerpo de hierro, cuya permeabilidad magnética es centenares y millares de veces mayor que μ_0, «absorbe» las líneas de fuerza. En este fenómeno se basa el blindaje magnético. En el espacio protegido por el hierro no penetra el flujo magnético: la inmensa mayoría de las líneas magnéticas pasará por dentro del hierro (fig. 120).

En completa analogía con los dieléctricos se resuelve el problema del carácter de las distorsiones provocadas en el campo magnético

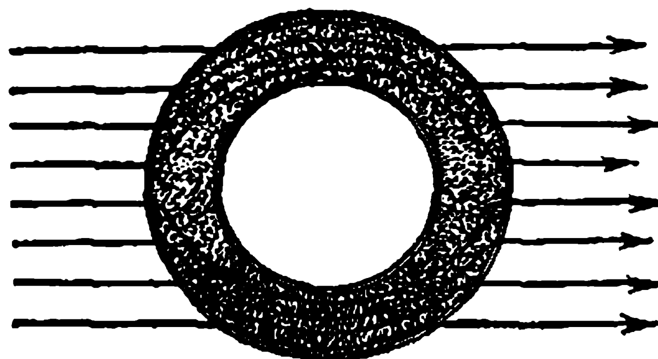


FIG. 120.

por un cuerpo de forma determinada. Si el cuerpo tiene forma de elipsoide, cilindro o placa, el campo dentro de dicho cuerpo, según demuestran los cálculos teóricos, será uniforme si el campo era uniforme antes de que en él se introdujera el cuerpo férreo. Entre el campo exterior uniforme H_0 (que existía) y el campo dentro del cuerpo de hierro H_i (tal como queda después) existe una relación totalmente análoga a la que se consideró en el § 96. La intensidad del campo que se crea en el cuerpo de hierro será menor, que la que existía antes, en una magnitud proporcional a la magnetización:

$$H_i = H_0 - \frac{N'}{\mu_0} J.$$

Para que el factor de desimanación sea adimensional, la magnetización se divide por la permeabilidad magnética del vacío. Utilizando, como hasta ahora, las relaciones del sistema SI y haciendo la sustitución

$$J = \mu_0 (\mu - 1) H_i,$$

obtenemos la siguiente relación entre el campo exterior y el interior

$$H_i = \frac{H_0}{1 + (\mu - 1) N'}.$$

En el sistema CGS

$$H_i = H_0 - NJ,$$

$$J = \frac{\mu - 1}{4\pi} H_i$$

y la relación entre el campo exterior y el interior tendrá la forma

$$H_i = \frac{H_0}{1 + (\mu - 1)\, N/(4\pi)}.$$

El coeficiente de desimanación tiene el mismo valor que en el caso de los dieléctricos: $N = 4\pi/3$ ($N' = 1/3$) para una esfera, $N = 4\pi$ ($N' = 1$) para una placa, etc.

§ 110. Histéresis magnética

Al hablar de la permeabilidad magnética de los cuerpos de hierro podría crearse la idea errónea de que las propiedades de los ferromagnéticos sólo difieren de las de los paramagnéticos en el valor de dicha permeabilidad. Pero esto no es así. Lo que diferencia esencialmente a los ferromagnéticos de los demás cuerpos es la ausencia de dependencia lineal y, más aún, unívoca del estado magnético del cuerpo respecto de la intensidad del campo magnético. Por esto el concepto de permeabilidad magnética tiene un carácter bastante convencional en el caso de los ferromagnéticos. Una idea correcta de las propiedades magnéticas del hierro puede obtenerse estudiando la curva de la magnetización en función de la intensidad, o de la inducción magnética en función de la intensidad del campo. Estas dos curvas son bastante semejantes.

Vamos a medir la magnetización de un cuerpo férreo en función de la intensidad. La magnetización aumentará al principio lentamente, después, con rapidez, y finalmente llega la saturación magnética. Este tipo de curvas de magnetización, que por vez primera fueron construidas por A. G. Stolétov, son características de todos los cuerpos ferromagnéticos (fig. 121). Volvemos a repetir que las curvas de la magnetización y de la inducción magnética son muy parecidas. La marcha de la curva de magnetización da la susceptibilidad magnética, y la de la curva de inducción, la permeabilidad magnética. En la curva que hemos dado se ve que la permeabilidad magnética (o la susceptibilidad) varía según una curva con máximo. Cuando los campos son pequeños, la permeabilidad magnética es pequeña, después crece hasta el máximo, luego decrece y en cuanto llega la saturación permanece invariable. En la mayoría de los casos, cuando se dan los valores de la permeabilidad magnética sin mencionar las condiciones externas, se sobrentiende que es la permeabilidad magnética máxima.

Pero lo expuesto no agota las peculiaridades del comportamiento de los ferromagnéticos. Supongamos que un hierro se hace llegar hasta el estado de saturación magnética y se comienza a disminuir la intensidad del campo magnético. Resulta que la inducción dismi-

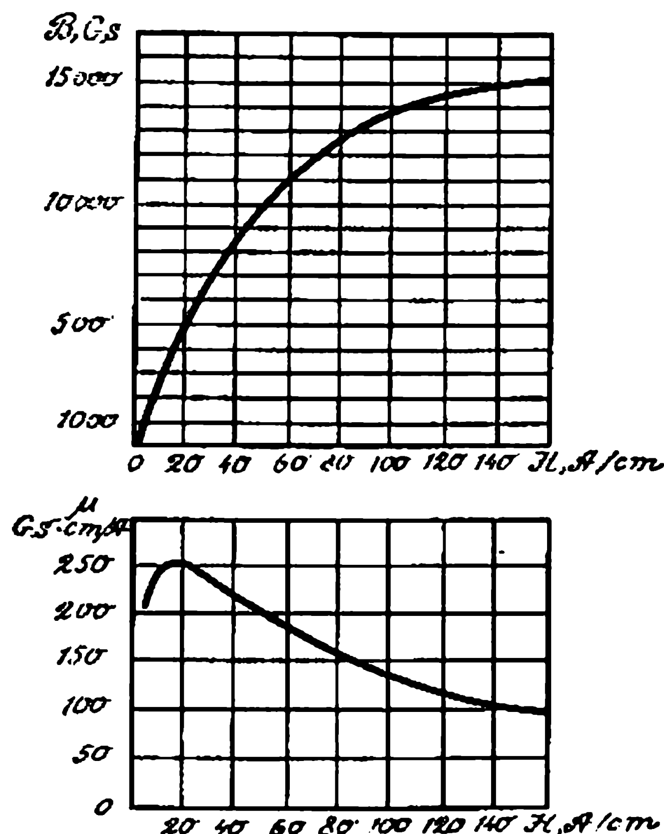


FIG. 121.

nuirá en este caso siguiendo otra curva, más alta que la de la magnetización inicial. La intensidad del campo se puede llegar a anular, pero la imanación no desaparece. Los valores correspondientes de la magnetización y de la inducción reciben el nombre de *remanentes*. Para quitar la imanación remanente hay que invertir el sentido del campo. Si se tiene en cuenta la experiencia de que hablamos en la pág. 300, esto quiere decir que hay que cambiar el sentido de la corriente en la bobina primaria arrollada al cuerpo de hierro. La desimanación se produce cuando la intensidad del campo alcanza cierto valor H_c, que se llama *fuerza coercitiva*. Si se continúa aumentando la corriente, el cuerpo empieza a imanarse en sentido contrario, es decir, donde estuvo el polo sur aparecerá el polo norte. El flujo magnético crecerá hasta llegar al mismo grado de saturación que en el proceso inicial. Una vez alcanzado el máximo negativo de la inducción, se puede invertir el sentido del proceso y obtener el bucle de histéresis representado en la fig. 122.

De esta figura se deduce que la intensidad del campo en que se encuentra el hierro no basta para definir la inducción magnética ni, por consiguiente, la permeabilidad magnética. Por ejemplo,

para la abscisa $H=400$ Oe existen tres valores posibles de la inducción: el primero, en la magnetización inicial, el segundo, en el proceso de desimanación, y el tercero, después de recorrido casi todo el bucle, durante la segunda imanación. El valor de la inducción y de la permeabilidad magnéticas depende de la «historia» de la probeta. De aquí el nombre de «bucle o lazo de histéresis».

El bucle se puede dibujar como construido con la condición de que el cuerpo ferromagnético se hace llegar hasta la saturación magnética. Pero está claro al mismo tiempo que con un trozo de hierro se pueden obtener bucles de histéresis cualesquiera de dimensiones menores, como si estuvieran inscritos en el lazo fundamental.

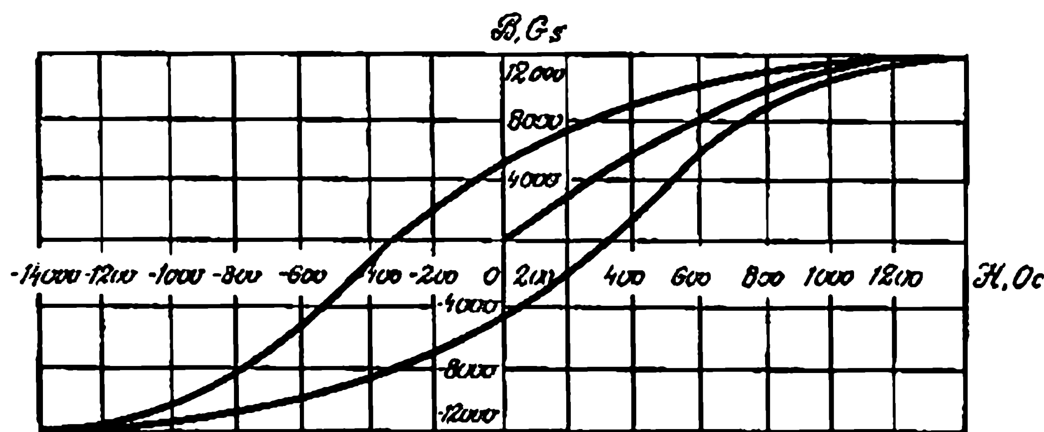


FIG. 122.

Para esto hay que comenzar la desimanación antes de llegar a la saturación. En este caso, a cada valor de H le corresponde un número tan grande como se quiera de valores de B.

De aquí se deduce el procedimiento para conseguir que un cuerpo ferromagnético se encuentre en el estado en el cual son nulas simultáneamente la inducción y la intensidad. Esta «puesta a cero» del cuerpo magnético se lleva a cabo por medio de una serie de reimanaciones sucesivas, empezando cada nuevo ciclo cuando el valor de la intensidad sea menor que el que tenía al comenzar el anterior.

El estado magnético del hierro no puede caracterizarse únicamente por el valor de la permeabilidad o por el de la intensidad o la inducción. Hay que conocer dos magnitudes, por ejemplo, la inducción y la intensidad que determinen el estado magnético del hierro por un punto situado dentro del bucle de histéresis fundamental.

El carácter del lazo de histéresis depende mucho del material. Se llaman magnéticamente blandos los cuerpos en que la fuerza coercitiva es pequeña (y, por lo tanto, el área de su bucle es también pequeña). A los materiales magnéticamente blandos pertenecen el

hierro, el acero al silicio, las aleaciones de hierro y níquel (entre las que destaca el permalloy, con un 78% de níquel). Los aceros al carbono y otros pertenecen a los materiales magnéticamente duros; se utilizan para fabricar imanes permanentes.

La experiencia demuestra que cuando un ferromagnético se reimana, se calienta. Esto tiene gran importancia para la electrotecnia, ya que si se coloca hierro en un campo magnético alternativo, el punto del diagrama $B=f(H)$, que representa el estado magnético del hierro, recorrerá continuamente el lazo de histéresis. Este recorrido va acompañado de un desprendimiento de calor que la teoría del campo magnético relaciona con el área del bucle. Está claro que cuanto menor sea la inducción máxima, menor será el área del lazo. Por esto puede intentarse buscar una fórmula empírica que relacione el calor que se desprende con la inducción máxima. En electrotecnia se usa frecuentemente una fórmula de este tipo:

$$Q=\eta B_{\text{máx}}^{1,6},$$

donde η es un coeficiente cuyo valor se da en ciertas tablas.

Ejemplo. En un buen hierro para transformadores $\eta=0,0011$. Si $B_{\text{máx}}=10\,000$ Gs, las pérdidas serán

$$Q=\eta B_{\text{máx}}^{1,6}=2,5\cdot 10^{3}\ \text{erg/cm}^{3}=2,5\cdot 10^{-4}\ \text{J/cm}^{3}.$$

Esto quiere decir, que si el hierro se reimana con una corriente alterna de frecuencia $\nu=50$ Hz, la potencia de las pérdidas en el hierro será de $12,5\cdot 10^{-3}$ W por centímetro cúbico de su volumen.

16

CAMPO ELECTROMAGNÉTICO. ECUACIONES DE MAXWELL

§ 111. Generalización de la ley de inducción electromagnética

En el capítulo anterior hemos demostrado que el movimiento de un conductor en un campo magnético va acompañado de efectos de inducción. Si este conductor móvil forma parte de un circuito por el que pasa un flujo magnético que varía con el movimiento, en este circuito aparece una corriente, que corresponde a la f. e. m. de inducción $\mathscr{E}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$. La causa de la aparición de dicha corriente

es la acción de la fuerza de Lorentz: sobre la unidad de carga eléctrica actúa una fuerza igual a $\frac{1}{c}[\boldsymbol{vB}]$ (en el sistema CGS).

Para la aparición de la corriente de inducción lo único que tiene importancia es la traslación relativa del conductor y el campo magnético. Con la misma razón puede hablarse de que la fuerza de Lorentz aparece cuando la carga se mueve en un campo magnético, o cuando el campo magnético se mueve y la carga «está en reposo». Este hecho se deduce del principio de la relatividad.

Elijamos un sistema de coordenadas con respecto al cual varíe el campo magnético; por ejemplo, liguemos el sistema de coordenadas con una mesa de laboratorio a lo largo de la cual se mueve el polo de un imán permanente. En este caso, sobre las cargas que se hallen en reposo, con respecto a la mesa de laboratorio, actuará la fuerza de Lorentz. Figurémonos que no sabemos nada acerca del imán permanente que se mueve. Al establecer que hay una fuerza que actúa sobre las cargas eléctricas en reposo, podemos hacer la deducción, totalmente correcta, de que en este sistema existe un campo eléctrico cuya intensidad es igual a la fuerza de Lorentz referida a la magnitud de la carga. Así, pues, la intensidad del campo eléctrico en el sistema de coordenadas «en reposo», con respecto al cual la fuente del campo magnético constante se mueve con la velocidad $\boldsymbol{v}$, viene expresada por la fórmula

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}].$$

Está claro que las leyes del campo eléctrico creado por cargas, y del campo eléctrico creado por el movimiento del sistema con respecto al campo magnético, serán distintas. En primer lugar, en el nuevo campo que estamos estudiando no hay fuentes, o sea, cargas. Por lo tanto, sus líneas de fuerza no tienen principio ni fin. Por otra parte, no es difícil ver que las líneas de fuerza de este campo eléctrico serán cerradas, es decir, el campo eléctrico creado por un campo magnético en movimiento es un campo rotacional.

Construyamos mentalmente un circuito arbitrario (en reposo con respecto a la mesa de laboratorio). El campo magnético móvil cortará a este circuito. Si en vez del circuito ideal hubiera uno de alambre, de acuerdo con la ley de Faraday aparecería en él una f. e. m. igual, como ya sabemos, a $\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}$. Por consiguiente, la integral $U=\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}$ no es nula; lo que significa que el campo eléctrico $\boldsymbol{E}=\frac{1}{c}[\boldsymbol{vB}]$, creado por el campo magnético móvil, es un campo rotacional.

Para el circuito real de alambre $U=\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$, donde Φ es el flujo magnético que pasa a través del circuito. Pero la presencia o ausencia del alambre, en lugar de la curva cerrada, no cambia nada. La igualdad $U=\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$ debe cumplirse también para el circuito imaginario construido en el espacio donde se mueve la fuente del campo magnético.

Nos queda por hacer la última generalización. La experiencia demuestra que las causas de la variación del campo magnético no desempeñan ningún papel en el efecto de inducción. Siempre es posible elegir variaciones equivalentes de los campos creados por el movimiento de un imán permanente o por la variación de la intensidad de la corriente en una bobina inmóvil, por ejemplo, por la aproximación de un imán permanente o por la intensificación de la corriente en la bobina que crea el campo. Por esto, la ley hallada debe ser correcta siempre y en todos los casos, independientemente de la causa por que varíe el campo magnético. Así, pues, si en una región cualquiera del espacio varía el campo magnético (o el flujo magnético), aparece un campo eléctrico rotacional, relacionado con la variación de dicho campo por la ley siguiente: la tensión $U=\oint E\,dl$ a lo largo de un circuito cerrado es igual a la derivada, respecto del tiempo, del flujo magnético que pasa a través de dicho circuito:

$$U=\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$

o, en el SI,

$$U=\frac{d\Phi}{dt}.$$

En esto consiste la *ley de la inducción generalizada*, que es una de las leyes de la naturaleza más importantes.

Explicaremos el contenido matemático de esta ley. Sustituyendo las expresiones de la tensión eléctrica y del flujo magnético, escribimos la ley en la forma desarrollada

$$\oint E\,dl=-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int B\cos\alpha\,dS \quad \text{(CGS)},$$

$$\oint E\,dl=-\frac{d}{dt}\int B\cos\alpha\,dS \quad \text{(SI)}.$$

Detengámonos ante todo en el signo menos que hay que introducir en la fórmula desarrollada. Esto se explica porque, en el álgebra vectorial, el sentido del rodeo de un contorno y el sentido de la normal a la superficie de dicho contorno están ligados entre sí; el sentido positivo de la normal en un sistema helicoidal

dextrógiro es aquel, en que cuando se mira desde el extremo del vector, se ve la rotación en sentido contrario al de las agujas del reloj (fig. 123). Construyamos en el espacio una curva cerrada y asignémosle un sentido de rodeo arbitrario. Con esto estará ya definido el sentido de la normal a la superficie abarcada por dicha curva. A través de un contorno pasa un flujo magnético. En un instante dado este flujo puede ser positivo o negativo, es decir, el vector inducción formará un ángulo agudo u obtuso con la normal. La derivada, con respecto al tiempo, del flujo será positiva si el flujo aumenta, y negativa, si el flujo disminuye. De este modo, teniendo en cuenta el signo menos que figura en la fórmula de la ley de la inducción, se puede decir lo siguiente: la tensión eléctrica será positiva, es decir, el sentido de la línea de fuerza eléctrica coincidirá con el sentido del rodeo que se considera positivo, si el flujo positivo disminuye o el flujo negativo aumenta, y, al contrario, la tensión

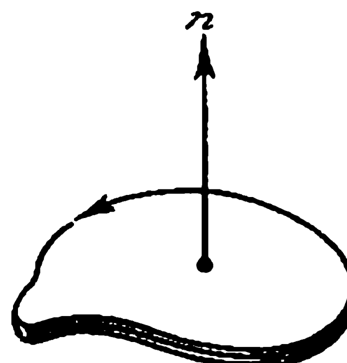


FIG. 123.

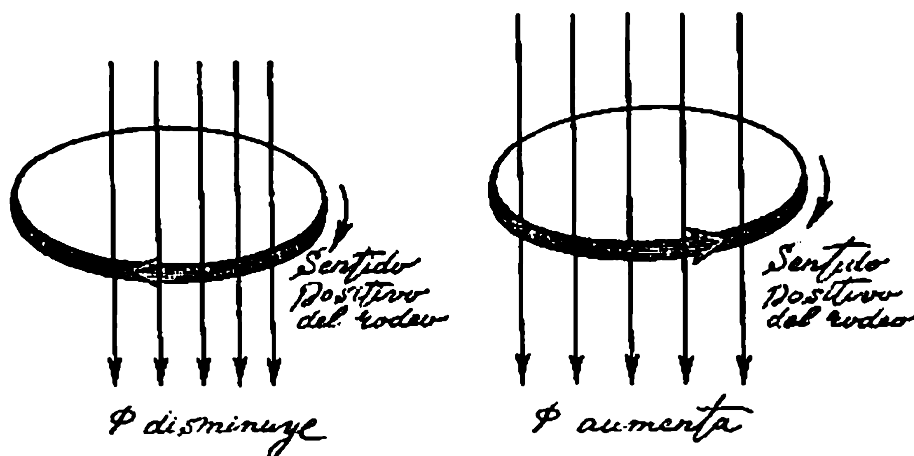


FIG 124.

será negativa si el flujo positivo aumenta o el negativo disminuye. Estas relaciones se ven claramente en la fig. 124.

Demostremos ahora que el signo menos de la fórmula de la inducción es la expresión matemática de la ley de Lenz. Supongamos, por ejemplo, que a una bobina se le acerca el polo norte de un imán recto. Admitamos que el sentido del rodeo del contorno es el que indica la fig. 125. En este caso será positivo el flujo magnético y positiva su derivada con respecto al tiempo. La tensión eléctrica deberá ser negativa y el flujo inducido tendrá el sentido contrario

al tomado como positivo en el rodeo. El campo magnético de la corriente de inducción lo hallamos inmediatamente recordando que las líneas de fuerza salen por la parte de la corriente anular en que el sentido de ésta nos lo figuramos como contrario al de las agujas del reloj. Por consiguiente, cuando el imán se acerca al circuito, en este último se produce una corriente de sentido tal, que con su campo se opone al efecto que la produce. Esta es la ley de Lenz.

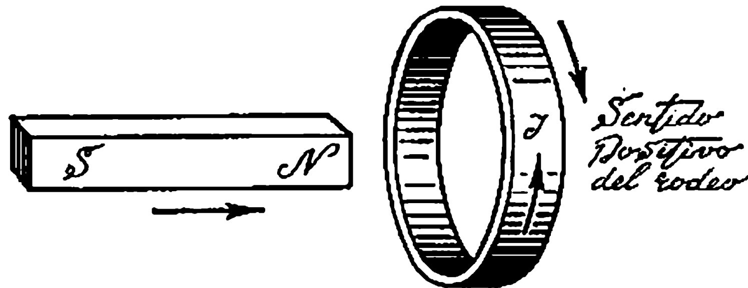


FIG. 125.

Tampoco ofrece dificultad demostrar esta importante ley para otros casos particulares.

Resumamos lo expuesto. El campo magnético alternativo es inseparable del campo eléctrico. Es más, vemos que la división de los campos en eléctricos y magnéticos tiene carácter relativo. Desde un punto de vista, en el espacio sólo existe campo magnético. Desde otro punto de vista, además del campo magnético está presente el eléctrico.

El campo eléctrico rotacional es producido por las líneas eléctricas que envuelven a los vectores inducción magnética, con la condición de que el flujo magnético, que penetra en la línea de fuerza cerrada, varíe con el tiempo. Cuando el flujo aumenta, la línea de fuerza tiene el sentido de las agujas del reloj, si se mira desde el extremo del vector inducción.

§ 112. *Corriente de desplazamiento*

La teoría del campo electromagnético, cuyas bases sentó Faraday, fue acabada matemáticamente por el científico inglés James Clerk Maxwell. Una de las nuevas ideas más importantes propuestas por Maxwell fue la de la necesidad de la simetría en las interacciones de los campos magnético y eléctrico.

Nosotros acabamos de estudiar el problema de la creación de un campo eléctrico por un flujo magnético variable. Se plantea ahora la pregunta natural siguiente: ¿Crea también un campo magnético propio el flujo variable de las líneas de fuerza eléctricas?

Maxwell responde afirmativamente a esta pregunta y plantea la hipótesis de que existe una ligazón entre el flujo eléctrico variable y el campo magnético, la cual es completamente simétrica a la ley generalizada de la inducción. Esta hipótesis consiste en lo siguiente: si en cierta región del espacio se produce una variación del flujo eléctrico, se crea un campo magnético rotacional; la tensión magnética U, tomada a lo largo de una curva cerrada, es igual a la variación del flujo eléctrico que atraviesa a esta curva cerrada, es decir,

$$U = \frac{dN}{dt},$$

donde

$$U = \oint H\,dl$$

y el flujo eléctrico

$$N = \int_S D \cos\alpha\, dS.$$

En el sistema CGS

$$U = \frac{1}{c}\frac{dN}{dt}.$$

La simetría de las relaciones entre los campos magnético y eléctrico no se extiende al signo que figura delante de la derivada del flujo.

Como sabemos, cuando existen corrientes, la tensión magnética por la curva cerrada es igual a $U = I$ (ó $\frac{4\pi}{c} I$ en el sistema CGS). ¿Cómo escribir la ecuación de la tensión magnética para una curva cerrada que abarque a la corriente eléctrica y al flujo variable de líneas de fuerza eléctricas? Maxwell supone que las tensiones magnéticas se componen, de manera que la fórmula general tendrá la forma

$$\oint H\,dl = I + \frac{dN}{dt} \text{ (SI)}$$

o

$$\oint H\,dl = \frac{4\pi}{c}\left(I + \frac{dN}{dt}\right) \text{ (CGS)}.$$

La expresión $\frac{dN}{dt}$ tiene la dimensión de la intensidad de la corriente eléctrica. Maxwell le dio el nombre de *flujo de desplazamiento*, dándole a esta denominación el sentido, muy difundido a finales del siglo XIX, de que, en el vacío, el campo desplaza las partículas de «éter» de sus posiciones de equilibrio. Esta denominación se ha conservado en la ciencia, aunque ahora no ligamos la existencia del campo en el vacío con la idea del desplazamiento de partículas de medio alguno. En un medio dieléctrico, la corriente

de desplazamiento $\frac{dN}{dt}$ puede descomponerse en dos, de acuerdo con la posibilidad de descomponer el vector inducción D en una suma de los vectores intensidad y polarización (véase la pág. 270). Por esto la parte de la corriente de desplazamiento que «va» por el dieléctrico se determina por la variación del vector polarización, es decir, por los desplazamientos relativos de los centros de gravedad de las cargas positiva y negativa.

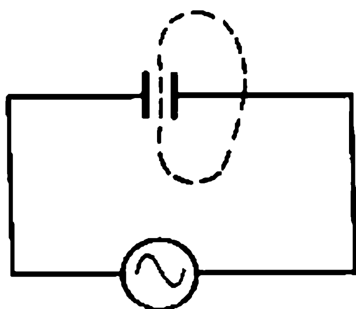


FIG. 126.

Antes de pasar a considerar el papel de la corriente de desplazamiento en unos u otros procesos, demostraremos un postulado muy importante referente a la suma de las corrientes de conducción y de desplazamiento.

Consideremos un sistema arbitrario de corrientes eléctricas y tracemos mentalmente una superficie cerrada, de manera que las corrientes la atraviesen. Si las corrientes son continuas, la ley de la conservación de la electricidad nos conduce inmediatamente a la siguiente condición: la suma de las corrientes que afluyen a la superficie cerrada debe ser igual a la suma de las corrientes que salen de ella o, resumiendo, la suma algebraica de las corrientes que salen de una superficie cerrada es nula. Se comprende perfectamente que esta ley puede no cumplirse cuando se trata de corrientes alternas; figurémonos, por ejemplo, una superficie cerrada que envuelva a una de las placas de un condensador conectado a un circuito de corriente alterna (fig. 126), o una superficie cerrada atravesada en un punto por el extremo superior de una antena.

Demostraremos, sin embargo, que este teorema conserva su validez también para las corrientes alternas si se formula, no para las corrientes de conducción, sino para la corriente «total», compuesta por la corriente de conducción y la corriente de desplazamiento. Para esta demostración basta figurarse una curva cerrada arbitraria y una superficie que se apoye en ella y para la cual sea correcta la ley

$$\oint H\,dl = I + I_{despl}\,.$$

Empecemos a estrechar la curva cerrada de modo que tienda a cero; en este caso la superficie S que se apoyaba en este contorno (fig. 127) se convertirá en cerrada (operación semejante a la de cerrar un saco de viaje). La tensión magnética se anula y, por lo tanto, se anula también la suma de las corrientes de conducción y de desplazamiento que pasan a través de la superficie cerrada.

Ahora podemos considerar el papel de las corrientes de desplazamiento en los fenómenos electromagnéticos.

Los cálculos demuestran que las corrientes de desplazamiento son despreciables por su pequeñez allí donde las corrientes de conducción son distintas de cero. Por esto se desprecian siempre los valores de las corrientes de desplazamiento dentro de los conductores.

Al interesarnos por la magnitud de la corriente de desplazamiento en los dieléctricos, debemos estudiar dos casos: el de las co-

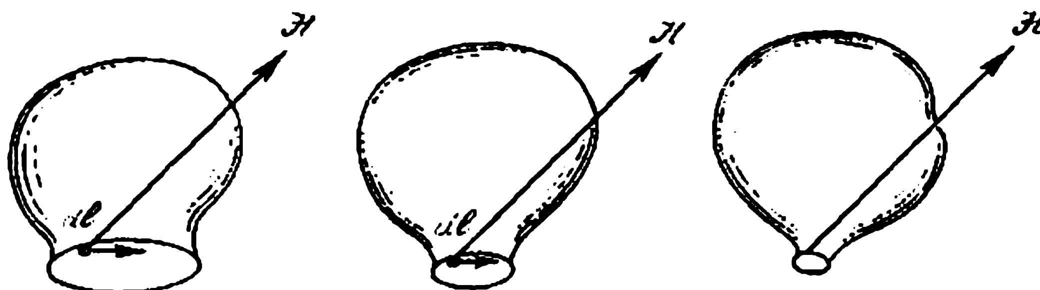


FIG. 127.

rrientes de desplazamiento en un dieléctrico que rodea a un conductor cerrado, y el de las corrientes de desplazamiento que se comportan como prolongación de los conductores en los circuitos abiertos.

Consideremos un conductor cerrado por el que pasa corriente eléctrica y cortémoslo con una superficie cerrada. Si la corriente es continua, en cada instante entrará en la superficie la misma cantidad de electricidad que sale de ella. En el caso de corrientes alternas no ocurre lo mismo. La intensidad de la corriente alterna puede tener valores distintos en diferentes trozos del circuito (véase más adelante, en la pág. 340). Por esta razón, en cualquier instante, las intensidades de las corrientes que entran y que salen de la superficie pueden no ser iguales; en este caso, desde el punto en que la corriente es menor hasta el punto en que la corriente es mayor, «pasa» por el dieléctrico una corriente de desplazamiento que, a su manera, compensa la diferencia entre la corriente menor y la mayor. Está claro que las variaciones con el tiempo de la corriente de desplazamiento seguirán rigurosamente a las variaciones de la corriente de conducción. Este fenómeno sólo desempeña un papel apreciable en las corrientes de frecuencia suficientemente alta.

Si las corrientes de conducción no son cerradas (caso de un circuito de corriente alterna con un condensador), las corrientes de conducción y de desplazamiento son simplemente iguales entre sí. En este caso puede decirse que la corriente de desplazamiento cierra la corriente de conducción

A pesar de que en estas circunstancias las corrientes de desplazamiento son bastante considerables, toda una serie de cálculos pueden hacerse sin tenerlas en cuenta. En efecto, al cerrar la corriente de conducción entre las armaduras del condensador, la corriente de desplazamiento crea en este espacio un campo magnético igual al que se crearía si la corriente de conducción pasara por un circuito ininterrumpido. Por esta razón la corriente de desplazamiento no influye en el cálculo del campo magnético, del coeficiente de autoinducción, etc.

§ 113. *Representación del campo electromagnético*

Las ecuaciones estudiadas en los dos párrafos anteriores

$$\oint E\,dl = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{y} \quad \oint H\,dl = I + \frac{dN}{dt}$$

se llaman *ecuaciones de Maxwell*. Estas ecuaciones expresan concisamente el conjunto de nuestros conocimientos acerca del campo magnético.

Las ecuaciones de Maxwell no pueden deducirse. Los dos párrafos precedentes no son deducción, sino únicamente la exposición de las conjeturas que condujeron a Maxwell al descubrimiento de dichas ecuaciones.

Una clase enorme de fenómenos que interesan a los físicos y a los técnicos en electricidad y radio se subordinan a las ecuaciones de Maxwell. Las reglas que cumplen estos fenómenos son consecuencia de las ecuaciones de Maxwell y pueden deducirse de ellas. El extraordinario valor de predicción de las ecuaciones de Maxwell las coloca a la altura de las grandes leyes de la naturaleza, tales como las ecuaciones de la mecánica de Newton o los principios de la termodinámica.

No entra en nuestros propósitos describir los procedimientos matemáticos de resolución de las ecuaciones de Maxwell. Pero las ecuaciones integrales antes escritas pueden transformarse en diferenciales. Resolviendo las ecuaciones diferenciales de Maxwell se puede, en principio, hallar el campo electromagnético de una distribución dada de cargas y corrientes.

Nos detendremos una vez más en la esencia física de los efectos electromagnéticos que interpretan las ecuaciones de Maxwell. Esta esencia se reduce a lo siguiente.

La división del campo electromagnético en eléctrico y magnético sólo tiene un sentido relativo. Si desde el punto de vista de un sistema inercial de coordenadas sólo existe el campo magnético, desde el punto de vista de un sistema que se mueva en relación al

primero, además del campo magnético existirá el eléctrico. También es correcta la afirmación inversa: si el observador de un sistema establece que sólo existe campo eléctrico, el observador de otro sistema inercial establecerá que existe tanto el campo eléctrico como el magnético.

Consideremos ahora el campo electromagnético tal como se nos figura desde el punto de vista de un sistema inercial de referencia cualquiera. Primero prestaremos atención a la región del

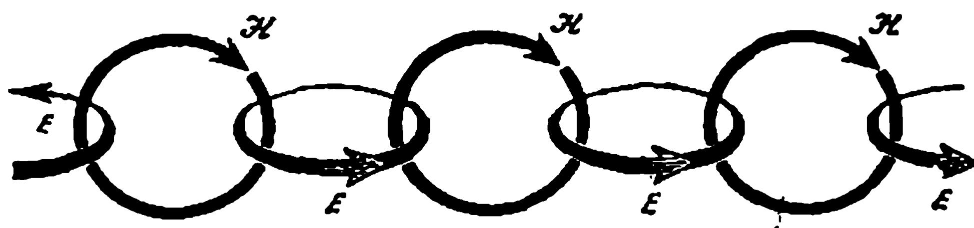


FIG. 128.

espacio en que no existen cargas eléctricas libres y, por lo tanto, corrientes de conducción. Las ecuaciones de Maxwell tienen en este caso la forma

$$\oint E dl = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad \oint H dl = \frac{dN}{dt}.$$

Ambos campos, magnético y eléctrico, tienen carácter puramente rotacional: las líneas de fuerza son cerradas y entrelazadas, las líneas eléctricas se arrollan en las magnéticas y éstas en las eléctricas. Del carácter del campo electromagnético puede dar cierta idea su representación en forma de una cadena de anillos, en la cual las líneas de fuerza cerradas, magnéticas y eléctricas, se suceden entre sí (fig. 128). Esta cadena existe únicamente cuando el campo es alternativo. Un flujo magnético anular creciente crea a su alrededor un flujo eléctrico anular. La variación del campo eléctrico ocasiona la creación de otro flujo magnético anular y así sucesivamente.

Si en la región considerada del espacio hay cargas y corrientes, además de los campos rotacionales de líneas enlazadas, descubrimos un campo magnético rotacional, cuyas líneas se cierran alrededor de las corrientes, y un campo eléctrico potencial, cuyas líneas comienzan en las cargas positivas y terminan en las negativas.

17

TRANSFORMACIONES ENERGÉTICAS EN EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

§ 114. Transformaciones en un circuito de corriente continua

Consideremos un trozo de conductor por el que pasa una corriente eléctrica continua. Si la resistencia del trozo considerado es R y la tensión eléctrica en sus extremos es igual a U, la intensidad de la corriente se determina por la ley de Ohm, $I=U/R$. El campo eléctrico realiza trabajo en trasladar las cargas a lo largo del circuito. Si este trabajo se refiere a la unidad de cargas, será igual a U. Como, por definición, la intensidad de la corriente es la cantidad de electricidad que pasa por la sección en la unidad de tiempo, el producto IU da el trabajo, que realiza el campo en trasladar la electricidad, referido a la unidad de tiempo. IU es la potencia de la corriente. Si la corriente es continua, todo este trabajo se transforma en calor (llamado calor de Joule). Las fórmulas para calcular el efecto calorífico de la corriente son:

$$IU=\frac{U^2}{R}=I^2R.$$

La transformación del trabajo del campo eléctrico en calor tiene lugar en cada punto del conductor. Para expresar esta afirmación por medio de una fórmula, transformaremos la ley de Ohm de modo que no se refiera a un trozo de conductor, sino a un punto del mismo. Introduciendo la densidad de la corriente $j=I/S$, donde S es la sección del conductor, sustituyendo la expresión de la tensión eléctrica por El y, finalmente, expresando la resistencia por la longitud del conductor l y su sección, o sea, $R=\frac{1}{\lambda}\frac{l}{S}$, obtenemos: $j=\lambda E$.

De este modo puede afirmarse que la densidad de la corriente es directamente proporcional a la intensidad del campo eléctrico. El coeficiente de proporcionalidad es la conductividad λ. Suponemos que el sentido de la corriente en cada punto coincide con el de la intensidad del campo. La fórmula

$$\boldsymbol{j}=\lambda\boldsymbol{E}$$

recibe el nombre de *ley de Ohm diferencial*. Esta ley, que debe considerarse como empírica, generaliza las leyes del paso de la corriente por los conductores. La forma ordinaria (integral) de la ley de Ohm es consecuencia de esta ecuación.

Aislemos en el conductor un elemento de volumen infinitesimal $d\tau$, de forma cilíndrica, cuya generatriz a lo largo de las líneas de fuerza sea dl y cuya base, de área dS, sea perpendicular a la corriente. En la unidad de tiempo pasará por la sección de este cilindro la cantidad de electricidad $j dS$ y la tensión en los extremos del elemento será igual a $E\,dl$; por consiguiente, el trabajo realizado por el campo en transportar la electricidad a través de este volumen será igual a $jE\,d\tau$. Esta misma fórmula expresará el calor que se desprende dentro del volumen $d\tau$. Si nos interesa conocer el trabajo de la corriente en un volumen pequeño del conductor, hay que integrar la última expresión. En cambio, la fórmula

$$jE = \frac{j^2}{\lambda} = \lambda E^2$$

nos da la expresión del trabajo de la corriente (calor de Joule) que desprende la unidad de volumen del conductor.

Así, pues, si se considera un trozo cualquiera de circuito conductor de corriente eléctrica continua, las transformaciones energéticas que tienen lugar en él se reducen a la transformación del trabajo del campo en calor. Pero el cuadro varía si nos interesamos por el balance energético dentro de los límites de todo el circuito cerrado de corriente continua. El trabajo de las fuerzas eléctricas a lo largo de una curva cerrada, en el caso de un campo continuo, es nulo, ya que el trabajo que las fuerzas eléctricas realizan al transportar la carga por la parte externa del circuito es igual y de signo contrario al trabajo necesario para transportar la carga por la parte interna del circuito. Por consiguiente, el desprendimiento de calor de Joule en el circuito de corriente continua se produce únicamente a expensas de la energía que proporciona la fuente de corriente —el acumulador, la máquina eléctrica, etc.—, es decir, a costa de una energía de procedencia no eléctrica (o, como a veces se dice, «extraña»). El papel de la corriente eléctrica se reduce simplemente a «transportar» la energía desde la fuente de corriente hasta el lugar en que se desprende el calor. La energía que es capaz de proporcionar la fuente se caracteriza por la fuerza electromotriz $\mathcal{E}$, que, por definición, se mide por el trabajo realizado al transportar la unidad de carga a lo largo del circuito cerrado. De hecho, las fuerzas extrañas realizan este trabajo únicamente en los cortos espacios del circuito en que la carga tiene que moverse venciendo las fuerzas del campo eléctrico.

La potencia desprendida por un circuito de corriente continua viene expresada por la fórmula $I\mathcal{E}$. Esta expresión puede referirse a la unidad de volumen si se supone que las fuerzas extrañas están distribuidas volumétricamente. En este caso el trabajo de las fuer-

zas extrañas se representa de la forma

$$jE^{ext},$$

donde E^{ext} es la «intensidad» de las fuerzas extrañas.

Llamando P al trabajo de las fuerzas extrañas y Q al calor de Joule que se desprende, podemos expresar concisamente la esencia de las transformaciones eléctricas que tienen lugar en un circuito de corriente continua por la fórmula

$$P-Q=0.$$

Ejemplo. Para un alambre de cobre aislado, de sección $S=4$ mm^2, cuando el tendido es al descubierto se tolera una densidad de corriente $j=9\cdot 10^6$ A/m^2. Un trozo, de este tipo de conductor, de 1 m de longitud tiene una resistencia de $4{,}25\cdot 10^{-3}$ Ω. Cuando el valor de j es el indicado, por el alambre pasa una corriente $I=36$ A. La pérdida de energía, en calor de Joule, por segundo, en este trozo de circuito será igual a $I^2R=1296\cdot 4{,}25\cdot 10^{-3}\approx 6$ J, es decir, en la unidad de volumen se desprenderán 0,33 cal=1,38 J por segundo.

§ 115. Transformaciones en un circuito cerrado de corriente alterna

El paso de la corriente alterna va acompañado inevitablemente de fenómenos de inducción. En efecto, a una intensidad de corriente variable le corresponde un flujo magnético Φ también variable. Se entiende por Φ el número de líneas de fuerza que crea el circuito de corriente que se considera y que atraviesan el circuito conductor. En este caso los fenómenos de inducción serán provocados por su propio flujo magnético, por lo que dicho fenómeno se llama *autoinducción*. Como Φ varía continuamente, en el circuito de corriente, además de la f. e. m. extraña, existirá en cada instante una f. e.m. de inducción igual a $\mathscr{E}^{ind}=-\frac{d\Phi}{dt}$.

El flujo magnético es siempre proporcional a la primera potencia de la corriente. La fórmula $\Phi=LI$ es universalmente correcta. El coeficiente L es la *inductancia* (*o coeficiente de autoinducción*) del circuito. El valor de L depende de las propiedades geométricas del circuito y del carácter de la disposición de los cuerpos magnéticos en el sistema, y no depende de las condiciones en que funciona este sistema de alambres y cuerpos magnéticos. Por lo tanto, para la f. e. m. de autoinducción se cumple la igualdad

$$\mathscr{E}^{ind}=-L\frac{dI}{dt}.$$

El sentido que tiene el signo menos en esta fórmula se reduce a lo siguiente. La f. e. m. de inducción se opone a la fuerza extraña en aquellos instantes en que la corriente aumenta; la f. e. m. de induc-

ción, en este caso, está dirigida contra la fuerza extraña. En cambio, cuando la corriente disminuye, la f. e. m. de inducción tiene el mismo sentido que la f. e. m. extraña. Esta circunstancia determina la analogía que se establece con frecuencia entre el fenómeno de la inercia mecánica y el fenómeno de la autoinducción. La autoinducción se opone tanto al aumento de la corriente como a su disminución. La ley de Ohm, que liga la f. e. m. y la intensidad de la corriente, sigue en vigor. Por esto, el producto de la intensidad de la corriente por la resistencia total del circuito tendrá en cada instante el valor

$$IR = \mathcal{E}^{\text{ext}} + \mathcal{E}^{\text{ind}} = \mathcal{E}^{\text{ext}} - L\frac{dI}{dt}.$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la intensidad instantánea de la corriente, obtenemos una igualdad energética de la forma

$$I^2R = I\mathcal{E}^{\text{ext}} - LI\frac{dI}{dt}.$$

Aquí $I\mathcal{E}^{\text{ext}} = P$ es el trabajo de las fuerzas extrañas, y $I^2R = Q$ es el calor de Joule. Como puede verse, en un circuito de corriente alterna no existe la igualdad de estas dos magnitudes. La diferencia $P - Q$ es igual en cada instante a $LI\frac{dI}{dt}$, es decir, a la derivada de $\frac{1}{2}LI^2$. En otras palabras, el trabajo de las fuerzas extrañas, que excede al calor de Joule desprendido, va a incrementar la magnitud $\frac{1}{2}LI$. Y al contrario, el calor desprendido, que excede al trabajo de las fuerzas extrañas, implica una merma de la magnitud $\frac{1}{2}LI^2$. La ecuación

$$P - Q = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right)$$

expresa la ley de conservación de la energía.

La magnitud $W = \frac{1}{2}LI^2$ tiene indudablemente sentido de energía. Esta es la energía magnética del sistema, que va ligada indisolublemente con la existencia del campo magnético en él (en el sistema CGS la fórmula de esta energía toma la forma $\frac{1}{c^2}\frac{1}{2}LI^2$). La energía magnética existe también en el circuito de corriente continua. Pero en este caso no se manifiesta, permanece invariable. Los fenómenos de inducción se producen únicamente al conectar y desconectar la corriente. Al cerrar el circuito, las fuerzas extrañas realizan un trabajo que se gasta, además de en desprendimiento de calor, en acumular energía magnética. Y al contrario, cuando se abre el circuito, el desprendimiento de calor de Joule se efectúa a costa de la energía magnética de la corriente.

La formula de la energía magnética se podría comprobar experimentalmente estudiando la conexión o, mejor aún, la desconexión de la corriente. El calor de Joule, que se desprende en el instante de desconectar la fuente, debe ser numéricamente igual a la energía magnética de la corriente. Si el coeficiente de autoinducción es grande, el desprendimiento de calor dura bastante y se puede medir, por ejemplo, por procedimientos calorimétricos.

La inductancia puede medirse haciendo diversas experiencias, y en los casos más simples se puede calcular por la fórmula $L=\Phi/I$. El problema se reduce a calcular el flujo magnético que pasa por el sistema.

Más adelante nos hará falta la expresión de la inductancia de un solenoide circular. El flujo magnético a través de una espira de la bobina será $\Phi=\mu_0\mu\, HS$, donde S es el área de la espira; y el flujo a través de n espiras $\Phi=n\mu_0\mu HS$. Sustituyendo aquí la expresión de la intensidad del campo (utilizando el SI):

$$\Phi=n\mu_0\mu S\frac{nI}{l}.$$

Dividiendo por la intensidad de la corriente, obtenemos la expresión de la inducción de la bobina (en cálculos aproximados, esta fórmula es aplicable también al solenoide abierto):

$$L=\mu_0\mu\frac{n^2}{l}S.$$

La inductancia de la bobina es directamente proporcional a la permeabilidad magnética del medio y depende mucho del número de espiras. La inductancia se aumenta utilizando hierro y aumentando el número de espiras. Para que quede clara la relación entre el valor del coeficiente de autoinducción y las dimensiones de la bobina, multipliquemos el numerador y el denominador por l. Entonces

$$L=\mu_0\mu\left(\frac{n}{l}\right)^2V,$$

y está claro que la inductancia es directamente proporcional al volumen ocupado por el campo megnético y al cuadrado de la densidad con que las espiras se arrollan en la bobina.

Ejemplo. Sea un solenoide largo y estrecho ($l=15$ cm, $n=1500$ espiras, $S=1$ cm², $I=0{,}1$ A). En el centro del solenoide se produce un flujo magnético $\Phi=n\mu_0\mu HS=6\cdot10^{-6}$ V·s. La inductancia de este solenoide

$$L=\mu_0\mu\frac{n^2}{l}S=4\pi\cdot10^{-7}\cdot1\cdot\frac{1500^2}{0{,}15}\cdot10^{-4}=1{,}9\cdot10^{-3}\ \text{henrios (H)}.$$

En el SI la inductancia se mide en henrios, 1H=1Ω·s. En radiotecnia la inductancia de las bobinas se mide en millonésimas y milésimas de henrio. El coeficiente de autoinducción de las bobinas de reactancia con núcleo de hierro puede alcanzar el valor de henrios enteros.

§ 116. *Energía magnética del campo*

En el capítulo dedicado al campo eléctrico demostramos que la energía eléctrica de un sistema podemos figurárnosla como una magnitud distribuida en el espacio con la densidad $\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ (en el SI). La energía eléctrica total de un sistema puede hallarse integrando esta expresión con respecto al espacio ocupado por el campo. Subrayamos la importancia de este hecho, ya que permite expresar la energía por medio de la intensidad del campo y fundamenta la idea acerca de la localización del campo.

Es natural esperar que semejantes razonamientos sean correctos también para el campo magnético. Esto es así en efecto y puede demostrarse mediante cálculos rigurosos el paso de la fórmula de la energía magnética $\frac{1}{2}LI^2$ a la expresión de la densidad de dicha energía $\frac{1}{2}\mu_0\mu H^2$, que es totalmente análoga a la expresión correspondiente del campo eléctrico.

Hagamos esta transición para el caso más simple del campo uniforme de un solenoide circular. Sustituyendo el valor de la inductancia en la fórmula de la energía magnética, obtenemos

$$W_m = \frac{\mu_0\mu\left(\frac{n}{l}\right)^2 I^2}{2} V.$$

Pero $\frac{nI}{l}$ es la intensidad del campo. Por consiguiente, la energía magnética de la bobina se puede representar de la forma

$$W_m = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} V,$$

de manera que la densidad de la energía magnética vendrá representada por la expresión

$$w_m = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} \quad \text{(SI)},$$

$$w_m = \frac{1}{8\pi}\mu H^2 \quad \text{(CGS)}.$$

De este modo, para un sistema cualquiera de corrientes, la energía magnética puede representarse por la integral con respecto al volumen ocupado por el campo:

$$W_m = \frac{\mu_0}{2}\int \mu H^2\, d\tau \quad \text{(SI)},$$

$$W_m = \frac{1}{8\pi}\int \mu H^2\, d\tau \quad \text{(CGS)}.$$

Consideremos la energía magnética de dos corrientes. Su expresión se descompone naturalmente en tres integrales, si la intensidad del campo resultante H nos la figuramos como la suma de las intensidades de ambas corrientes: $H=H_1+H_2$. El sentido de cada una de las integrales que figuran en la expresión de la energía magnética

$$W=\frac{\mu_0}{2}\int \mu H_1^2\,d\tau+\mu_0\int \mu H_1 H_2\,d\tau+\frac{\mu_0}{2}\int \mu H_2^2\,d\tau,$$

es bastante evidente. La primera integral y la última dan las energías magnéticas de la primera y de la segunda corriente. En cuanto a la segunda integral, puede llamársele energía de interacción de las corrientes. En efecto, esta integral puede tener diversos valores para magnitudes iguales de las intensidades de los campos H_1 y H_2. Figurémonos que varía la posición mutua de ambas corrientes; en este caso, los vectores de los campos H_1 y H_2, hablando en general, se vuelven el uno hacia el otro y el valor de la energía de interacción varía.

Las integrales primera y tercera pueden, desde luego, representarse, por medio de la intensidad de la corriente y de la inductancia, como $\frac{1}{2}L_1 I_1^2$ y $\frac{1}{2}L_2 I_2^2$. En lo referente a la integral de en medio, está claro que su magnitud debe ser proporcional al producto de las intensidades de las corrientes. Por lo tanto,

$$\int \mu H_1 H_2\,d\tau=M I_1 I_2.$$

El coeficiente de proporcionalidad M se llama *coeficiente de inducción mutua*. Lo mismo que la inductancia, M depende de la geometría del sistema y de la distribución de los cuerpos magnéticos en él.

De este cálculo se deduce claramente que con la variación de la energía magnética del sistema de corrientes no sólo están ligados el trabajo de las fuerzas extrañas y el desprendimiento de calor de Joule, sino también el trabajo del campo que se gasta cuando se trasladan los conductores por la acción de la fuerza de Ampere. La ley de conservación de la energía exige por esto el cumplimiento de la igualdad

$$dW_m=-A-(Q-P)\,dt.$$

Aquí A es el trabajo mecánico. De este modo se confirma que la energía magnética se invierte, en el caso general, en trabajo de traslación de los conductores y en el desprendimiento de calor de Joule que supera el trabajo de las fuerzas extrañas.

En las relaciones que hemos dado en este párrafo sólo no se toma en consideración un fenómeno, el de la histéresis magnética. Como esta cuestión tiene un carácter especial, no nos detendremos en ella.

Ejemplo. La energía almacenada en el campo magnético de la bobina (del ejemplo de la pág. 326) será

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{1{,}9\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}1^2}{2} = 0{,}95\cdot 10^{-5}\ \text{J}$$

y la densidad de la energía

$$w_m = \mu_0\mu\,\frac{H^2}{2} = 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot\frac{1000^2}{2} = 0{,}63\ \text{J/m}^3.$$

Está claro que este mismo resultado puede obtenerse dividiendo la energía total del campo magnético por el volumen de la bobina: $w_m = W_m/Sl$.

§ 117. Oscilaciones eléctricas

Para la electrodinámica tienen una importancia fundamental los procesos de transformación de la energía eléctrica en magnética y viceversa. En calidad de sistema simplísimo en el cual tienen lugar transformaciones de este tipo, podemos considerar un condensador, eléctrico cargado cuyas armaduras se unen en un instante determinado con los extremos de una bobina (fig. 129). Cuando el condensador se descarga, a través de la bobina pasa corriente eléctrica y alrededor de ella se crea un campo magnético. En este sistema existen en cada instante dos campos ligados estrechamente entre sí: el eléctrico del condensador y el magnético de la bobina. La energía de este circuito se compone en cada instante de la energía eléctrica del campo, concentrado principalmente entre las armaduras del condensador, y la energía magnética, concentrada en lo fundamental dentro de la bobina. Como sabemos, en un circuito de este tipo se producen oscilaciones eléctricas. Ahora demostraremos la necesidad de que dichas oscilaciones se produzcan.

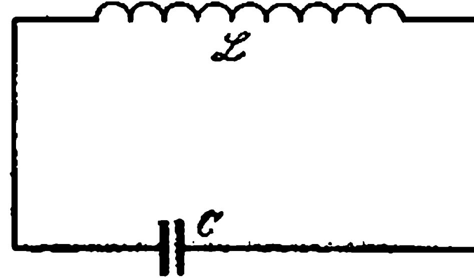


FIG. 129.

Al principio no tomaremos en consideración la pérdida de energía en calor de Joule. En este caso la ley de conservación de la energía exige que se cumpla la igualdad

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2 = \text{const.}$$

La suma de las energías eléctrica y magnética es la misma en cada instante y, por consiguiente, la derivada con respecto al tiempo de la expresión que acabamos de escribir debe ser nula:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + L\,\frac{I\,dI}{dt} = 0.$$

Y como la intensidad de la corriente debe ser igual a la disminución de la carga en las placas del condensador,

$$I = \frac{dQ}{dt},$$

la ecuación se simplifica y toma la forma

$$\frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0.$$

Esta relación entre la carga en las placas del condensador y la intensidad de la corriente, que es la derivada de la carga respecto del tiempo, sólo puede satisfacerse si la carga y la corriente oscilan según una ley armónica.

Esto queda claro si comparamos las ecuaciones de una oscilación armónica (pag. 92) con las halladas:

$$I = \frac{dQ}{dt}, \qquad v = \frac{dx}{dt};$$

$$L\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{C}Q, \qquad m\frac{dv}{dt} = -kx.$$

La analogía existe entre la carga y la corriente, de una parte, y la elongación y la velocidad del movimiento, de otra. En cuanto a los parámetros del sistema, la inductancia desempeña el papel de la inversa de la capacidad, el de la rigidez del sistema.

Tomando el origen del tiempo en el instante en que el condensador está totalmente cargado, suponemos que

$$Q = Q_0 \cos \omega t.$$

Entonces

$$I = -Q_0 \omega \sin \omega t.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación diferencial, obtenemos

$$-LQ_0 \omega^2 \cos \omega t = -\frac{1}{C} Q_0 \cos \omega t$$

o después de simplificar

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

De este modo, cualquiera que sea la carga inicial en las armaduras del condensador, se producen en él oscilaciones armónicas de frecuencia propia $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. La frecuencia de las oscilaciones eléctricas será tanto mayor cuanto menor sea la capacidad y la inductancia del circuito.

Pero, ¿qué ocurre en un circuito de corriente real, en el que no pueden despreciarse las pérdidas en calor de Joule? Es evidente que en este caso disminuirá la energía total del sistema de acuerdo

con la igualdad

$$dW = -I^2 R\, dt,$$

es decir,

$$-I^2 R = \frac{1}{C} Q \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt}.$$

Volviendo a derivar con respecto al tiempo y aplicando la relación entre la carga y la corriente, llegamos a una ecuación de la forma

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0.$$

Aquí también se puede apreciar la analogía entre las correspondientes magnitudes eléctricas y mecánicas. Comparando la última ecuación con la de las oscilaciones mecánicas con rozamiento (pág. 97), notamos la analogía entre la resistencia R y el coeficiente α que caracteriza la resistencia mecánica.

La resolución de estas ecuaciones diferenciales lineales se estudia en los cursos de matemáticas superiores. Nosotros nos limitaremos a dar la fórmula definitiva, cuya corrección no es difícil de comprobar haciendo la sustitución en la ecuación

$$I = I_0 e^{-\beta t} \cos \omega t.$$

La frecuencia de las oscilaciones

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Por lo tanto, el proceso viene determinado por dos características: la frecuencia propia de las oscilaciones libres no amortiguadas $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ y el coeficiente de amortiguación $\beta = R/(2L)$. Vemos, en primer lugar, que una amortiguación pequeña se obtiene disminuyendo la resistencia con respecto a la inductancia (está claro que esto es difícil de conseguir; por ejemplo, aumentando el número de espiras de la bobina, aumentamos al mismo tiempo ambas magnitudes, aunque L crecerá más de prisa). En segundo lugar, podemos señalar que si se da la condición

$$\omega_0^2 < \beta^2, \text{ es decir, } 4L < CR^2,$$

las oscilaciones serán imposibles. La descarga del condensador en estas condiciones da lugar a un proceso aperiódico análogo al retorno de un péndulo, desviado en un medio viscoso, a su posición de equilibrio.

Ejemplo. Tenemos un condensador variable cuya capacidad máxima $C = 500$ pF. Calculemos la inductancia de las bobinas necesarias para el circuito de un receptor de radio que funcione en los bandas 1500 m y 15 m.

1. La frecuencia de las ondas eléctricas correspondientes a $\lambda_1 = 1500$ m es $\nu_1 =$

$=2\cdot 10^5$ Hz$\approx$200 k Hz. Como $\omega=2\pi\nu_1=\frac{1}{\sqrt{L_1C}}$, tendremos que $L_1=\frac{1}{4\pi^2\nu_1^2C}=$ $=1{,}2\cdot 10^{-3}$ H$=1{,}2$ mH. Para que el proceso que tiene lugar en el circuito sea periódico, la resistencia de éste debe ser menor que $R_1=2\sqrt{L_1/C}=3000\ \Omega$.

2. $\lambda_2=15$ m, $\nu_2=2\cdot 10^7$ Hz$=20$ MHz, $L_2=0{,}12\cdot 10^{-6}$ H$=0{,}12$ μH. Para que las oscilaciones sean posibles, la resistencia del circuito debe ser menor que $R_2=\sqrt{L_2/C}=30\ \Omega$.

§ 118. Energía electromagnética

En un sistema como un circuito oscilante formado por un condensador (sobre todo si está constituido por placas próximas de gran superficie) y una bobina (especialmente si tiene muchas espiras superpuestas), los campos eléctrico y magnético se concentran cada uno en su región. Por esto puede hablarse de las energías eléctrica y magnética como de dos magnitudes que, aunque ligadas entre sí, son distintas. Esta división pierde en un grado considerable su sentido físico cuando pasamos a considerar campos rápidamente variables, en los cuales los campos magnéticos y eléctricos son considerables por su magnitud y se encuentran en las mismas regiones del espacio. Recordando lo dicho en el § 113 acerca del carácter relativo de la división del campo electromagnético en eléctrico y magnético, se comprende la necesidad de introducir en la teoría el concepto de energía electromagnética, igual formalmente a la suma de las energías eléctrica y magnética del campo. La energía electromagnética está distribuida en el espacio con la densidad

$$w=\frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2+\mu H^2).$$

Un volumen V contiene la energía electromagnética

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\limits_V(\varepsilon E^2+\mu H^2)\,dV.$$

En los campos rápidamente variables pierde su sentido físico el problema de la transformación de la energía magnética en eléctrica y viceversa. Sin embargo, hay que tener en cuenta todas las transformaciones energéticas que ocurren en el campo electromagnético, incluyendo en el balance energético el valor de la energía electromagnética considerada como un todo único.

Si admitimos que la expresión escrita para la energía electromagnética es correcta, aplicando las ecuaciones del campo electromagnético, que estudiamos en el capítulo anterior, puede demostrarse rigurosamente el siguiente teorema para las disminuciones de la energía electromagnética dentro de un volumen determinado

del espacio:

$$-\frac{dW}{dt}=(P-Q)+\oint K\cos\alpha\, dS.$$

Este teorema fue demostrado en 1884 por J. H. Poynting, y en una forma más general (aplicable no concretamente al campo electromagnético), por N. A. Umov en el año 1874. La integral que figura en el segundo miembro de la igualdad es el flujo del vector K*). Este vector, como demuestran los cálculos que debido a su complejidad omitimos, es perpendicular al plano que pasa por los vectores del campo E y H (fig. 130) e igual a

$$K=\frac{c}{4\pi}[EH] \text{ en el sistema CGS y}$$

$$K=[EH] \text{ en el SI.}$$

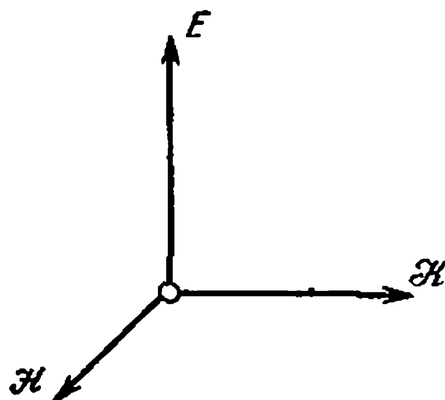


FIG. 130.

Como al alejarse de las fuentes del campo hacia el infinito los valores de las intensidades disminuyen bastante de prisa, el flujo del vector de Poynting se anula, si nos referimos a todo el espacio. En este caso, el teorema afirma que la variación de la energía electromagnética es igual al exceso de trabajo de las fuerzas extrañas sobre el desprendimiento de calor.

No obstante, lo que ofrece más interés es la aplicación del teorema a un volumen finito, es decir, cuando el flujo del vector de Poynting no es nulo. Supongamos que el volumen que se considera no abarca las corrientes; en este caso la igualdad tiene la forma

$$-\frac{dW}{dt}=\oint K\cos\alpha\, dS.$$

La variación de la energía electromagnética es igual al flujo del vector de Poynting a través de la superficie que limita el volumen considerado.

El vector de Poynting caracteriza al flujo de energía electromagnética, y la última ecuación expresa el siguiente hecho fundamental: la variación de la energía electromagnética dentro de un volumen cualquiera va acompañada de la entrada o salida en este volumen de una cantidad equivalente de energía.

*) Recordamos que, en matemáticas, una expresión del tipo $\int_S A\, dS$ recibe el nombre de flujo del vector A a través de la superficie S.

En realidad, el teorema de Poynting es una consecuencia necesaria de la ley de conservación de la energía y de la hipótesis sobre la localización de la energía electromagnética en el espacio.

Si el vector de Poynting tiene en efecto el sentido de un flujo de energía, debe estar ligado a la densidad de la energía por la relación $K=vw$ (véase la pág. 123, donde se estudia un problema análogo relacionado con la propagación de las ondas elásticas en un medio). La teoría de Maxwell permite calcular la velocidad de propagación v de la energía electromagnética. Esta velocidad resulta ser

$$v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Por lo tanto, la energía electromagnética debe propagarse en el vacío con la velocidad $c=3\cdot 10^{10}$ cm/s, lo que de un modo brillante está de acuerdo con la experiencia. La coincidencia de los valores de c determinados a partir de los experimentos electrodinámicos puros (por ejemplo, de la medida de la interacción de dos corrientes), con el valor de esta constante hallado por medición directa de la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas, es una magnífica y casi concluyente demostración de que la teoría de Maxwell es correcta.

En un medio, la velocidad de propagación del campo electromagnético es $\sqrt{\varepsilon\mu}$ veces menor. Más adelante veremos en qué casos se cumple esta relación y explicaremos las desviaciones de ella.

Consideremos ahora las transformaciones energéticas que ocurren en las regiones limitadas del espacio, que incluyen corrientes de conducción.

Supongamos que en la región que analizamos hay un conductor cilíndrico de radio r por el que pasa una corriente de densidad j. La intensidad del campo magnético en la superficie del conductor (véase la pág. 295) será en el sistema CGS, $H=\frac{2\pi}{c}rj$, y las líneas de fuerza magnéticas son en este caso circunferencias que rodean al eje de la corriente. Con ayuda de la fig. 131 nos convencemos de que el vector de Poynting estará dirigido hacia dentro del conductor, puesto que la intensidad del campo y el vector de corriente coinciden en dirección. En cuanto al valor numérico del vector de Poynting, obtenemos (en la superficie del conductor), que

$$\frac{c}{4\pi}EH=\frac{c}{4\pi}\frac{j}{\lambda}H=\frac{j^2r}{2\lambda}.$$

Determinemos ahora el flujo del vector de Poynting que entra en un trozo de conductor de longitud l. Este flujo es igual a

$$K \cdot 2\pi r l = \frac{j^2}{\lambda} \pi r^2 l = \frac{j^2}{\lambda} V,$$

donde V es el volumen del trozo de conductor. Pero j^2/λ no es más que el calor de Joule que se desprende en la unidad de volumen del conductor. Hemos demostrado, pues, de esta forma, que el flujo del vector de Poynting entra en el conductor y trae una energía cuya cantidad es precisamente igual a la que se gasta en calor de Joule.

¿De dónde proviene este flujo? Por este mismo procedimiento puede demostrarse que el flujo de energía proviene de aquellos trozos del conductor en que están localizadas las fuerzas extrañas.

Este cuadro hace comprensible la propagación de la energía electromagnética a lo largo de los conductores. Si la corriente eléctrica se conecta en Kúibishev, y una lámpara eléctrica se enciende en Moscú, la energía habrá sido traída por las ondas electromagnéticas, y no por los primeros electrones que comenzaron a moverse a lo largo del cable.

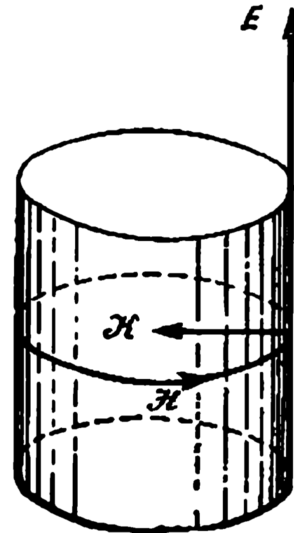


FIG. 131.

Ejemplos. 1. Calculemos de qué orden será la tensión que aparece en la antena de un receptor de radio que se halla a la distancia R—100 km de una emisora que radia con la potencia $P=100$ kW$=10^5$ J/s.

El valor numérico del vector de Poynting en el punto en que se encuentra la antena receptora será

$$K = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{10^5}{4\pi (10^5)^2} = 8 \cdot 10^{-7} \text{ J/(m}^2 \cdot \text{s) (W/m}^2\text{)}.$$

En el sistema CGS los vectores E y H tienen las mismas dimensiones ($g^{1/2} \cdot cm^{-1/2} \cdot s^{-1}$). Puede demostrarse que, para una onda electromagnética que se propague en el vacío, los valores numéricos de los vectores E y H, medidos en el sistema CGS, son iguales entre sí: $E=H$. Recordemos la relación que existe entre las unidades de E y H en el sistama CGS y SI

$$1 \text{ V/m} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-4} \text{ u. CGS}; \qquad 1 \text{ A/m} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Oe}.$$

En este caso, los valores numéricos de los vectores E y H en el SI serán

$$E' = \frac{1}{3} 10^{-4} E \quad \text{y} \quad H' = 4\pi \cdot 10^{-3} H.$$

Para la onda electromagnética ($E'=H'$) se obtiene de aquí que $E=120\pi H$. En el SI, $K=EH$, por consiguiente, $K=E^2/(120\pi)$,

$$E=\sqrt{120\pi K}=1,7\cdot 10^{-2}\ \text{V/m}.$$

Esto quiere decir, que en una antena receptora de 1 m de longitud se producirá una diferencia de potencial del orden de 20 mV.

2. Comparemos el valor de K que hemos obtenido, con la constante solar, es decir, con la energía que la Tierra recibe del Sol por 1 cm² en 1 s, descontando las pérdidas en la atmósfera:

$$K_{\text{Sol}}=0,15\ \text{W/cm}^2=1500\ \text{W/m}^2.$$

§ 119. *Impulso y presión de un campo electromagnético*

De acuerdo con la teoría de la relatividad (véase la pág. 448) la materia que posee energía tiene también masa. La relación entre la masa y la energía viene dada por la ley $E=mc^2$, donde c es la velocidad de propagación de la luz. Como ya sabemos, la energía del campo electromagnético puede considerarse distribuida en el espacio con una densidad determinada:

$$w=\frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2+\mu H^2).$$

De este modo, una unidad de volumen ocupada por un campo electromagnético posee una masa $m=w/c^2$.

La materia en movimiento, que posee masa, debe tener también un impulso, igual al producto de la masa por la velocidad con que se mueve. De aquí puede deducirse que la unidad de volumen del campo electromagnético posee el impulso

$$g=mc=\frac{w}{c}.$$

A esta expresión es oportuno llamarle densidad del impulso.

Como ya hemos dicho antes (pág. 333), el vector de Poynting, que tiene el sentido de flujo de energía, debe estar ligado con la densidad de la energía por medio de la relación $K=wc$. Comparando las dos últimas fórmulas vemos que la densidad del impulso y el vector de Poynting están ligados por un coeficiente de proporcionalidad —el cuadrado de la velocidad de propagación de las ondas, c^2—, y que, precisamente, la densidad del impulso es $g=K/c^2$.

El flujo de materia electromagnética, que posee masa e impulso, debe ejercer presión sobre una superficie que se interponga en su camino. El valor de esta presión puede expresarse en función de la densidad del impulso. Este valor puede ser distinto en dependen-

cia de si la energía de la onda es absorbida por la superficie o se refleja en ella. Como es natural, puede haber casos intermedios.

Durante un tiempo Δt, a la superficie S llega el campo magnético contenido en el volumen $Sc\,\Delta t$. Si la absorción es completa, durante este tiempo desaparecerá el impulso $gSc\Delta t$. Pero el cociente de dividir la variación del impulso por el tiempo, es una fuerza, y la fuerza dividida por la superficie es una presión. De este modo, la presión que sufre la superficie que absorbe la energía electromagnética es igual al producto de la densidad del impulso por la velocidad de la luz, $p=gc$ o, como $g=w/c$, la presión es igual a la densidad de la energía w.

Consideremos ahora el encuentro perfectamente elástico del campo con la superficie. Si se refleja toda la energía del campo (onda) electromagnético, la variación del impulso será dos veces mayor, puesto que el impulso cambia su dirección por la contraria. Absolutamente lo mismo ocurre en los casos puramente mecánicos (pág. 71), en los cuales la fuerza de un choque elástico es el doble que la de un choque inelástico. Así, pues, la presión que ejerce la onda sobre una placa perfectamente reflectora será

$$p=2gc \quad \text{ó} \quad p=2w.$$

Ahora ya es fácil obtener la fórmula para el caso general. Si sobre una placa se refleja parte de la energía y el coeficiente de reflexión es ρ, la presión del flujo (onda) vendrá representada por la fórmula

$$p=w(1-\rho)+2\rho w=(1+\rho)\,w.$$

La comprobación experimental de estas fórmulas, llevada a cabo, para la luz, en 1900 por P. N. Lébedev, desempeñó un papel muy importante en el establecimiento de nuestros puntos de vista sobre la naturaleza de las ondas electromagnéticas. La presión de la luz es extraordinariamente pequeña incluso cuando se utilizan las fuentes más potentes. Por ejemplo, la presión que la luz de una «lámpara» de un millón de bujías (candelas), situada a 1 m de distancia, ejerce sobre un espejo, será una magnitud del orden de 10^{-4} din/cm^2. Precisamente por esto, el trabajo de Lébedev, para medir la presión de la luz con una exactitud del orden de 1—2%, se considera como la cumbre del arte de la experimentación.

La parte fundamental del aparato de Lébedev era una suspensión ligera (balanza de torsión) a la cual se sujetaban unas aletas. Una de estas aletas se hizo absorbente de la luz al máximo y la otra, reflectora. La luz se dirigía ya sobre una aleta, ya sobre la otra y se comparaban los ángulos de torsión, por los cuales se podía calcular la intensidad de la fuerza. Las grandes dificultades que tuvieron que vencerse en este experimento consistían, en primer lugar, en

que había que tener en cuenta la acción que el calentamiento de los restos de gas, que quedaban en el recipiente en que se encontraba la suspensión, ejercía sobre las aletas.

La teoría del campo electromagnético alternativo condujo, como hemos visto ahora, a la idea del campo como realidad física (materia electromagnética). La importancia enorme de los experimentos de Lébedev consiste en que demostraron directamente que esta idea es justa.

El campo electromagnético posee energía e impulso, se traslada en el espacio con una velocidad determinada y presiona sobre los obstáculos. Más tarde sabremos también (pág. 638) que el campo electromagnético puede transformarse en sustancia. Este conjunto de hechos demuestran indiscutiblemente que el campo electromagnético es una realidad física.

18

RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

§ 120. Dipolo elemental

La radiación electromagnética se produce en todos los casos en que en el espacio se crea un campo electromagnético variable. A su vez, el campo electromagnético variará con el tiempo, si cambia la distribución de la carga eléctrica en el sistema o si es variable la densidad de la corriente eléctrica. De este modo, son fuentes de radiación electromagnética todos los tipos de corriente alterna y de cargas eléctricas pulsantes.

Los sistemas más simples creadores de campo electromagnético son los dipolos magnéticos y eléctricos (y, antetodo, los últimos) de momento variable. Un dipolo eléctrico de este tipo es un sistema formado por una carga positiva en reposo y otra carga, negativa, que oscila en torno a la primera. Si esta oscilación se cumple según la ley armónica, el momento de dipolo variará también según esta ley, es decir, se representará por la fórmula $p=p_0 \cos \omega t$. La importancia de este modelo tan sencillo de emisor es muy grande, debido a que una multitud de sistemas reales se comportan, con buena aproximación, como dipolos ideales.

Debemos recordar el § 93, donde se indicó que las propiedades eléctricas de cualquier sistema en el cual los «centros de gravedad» de la carga positiva y negativa no coinciden, pueden definirse si se conoce el momento dipolar del sistema. Pero los sistemas eléctrica-

mente neutros, en los que las cargas positivas y negativas son capaces de desplazarse las unas respecto de las otras, constituyen la parte fundamental de los emisores de energía electromagnética, ante todo, porque bajo este rótulo se comprenden los sistemas moleculares y atómicos. Un electrón que gira alrededor de un núcleo atómico, es un sistema con momento de dipolo variable; una molécula neutra, cuyos átomos se encuentran en estado de oscilación, también es con frecuencia un sistema con momento dipolar variable. Sin embargo, esto no agota aún nuestro interés por el dipolo eléctrico. En el párrafo siguiente demostraremos que una antena radiotécnica lineal puede compararse a un dipolo (los términos análogos, como oscilador y vibrador, tienen un sentido más amplio que el término exacto «dipolo»).

En cuanto a los dipolos magnéticos, nos encontraremos con ellos en aquellos casos en que la distribución de la carga eléctrica y, por consiguiente, el momento de dipolo del sistema permanecen invariables, pero al mismo tiempo la densidad de la corriente y, por lo tanto, el momento magnético del sistema varían con el tiempo. El ejemplo principal es el de un cuadro por el que pasa corriente eléctrica alterna. Si la corriente se cierra, las cargas eléctricas no se concentrarán ni disiparán en parte alguna y el momento dipolar eléctrico de este cuadro será nulo e invariable. Pero al mismo tiempo, el campo magnético del cuadro, que está relacionado con el valor de su momento magnético, cambiará y, por consiguiente, ocasionará la emisión de energía electromagnética. Señalaremos el siguiente resultado de la teoría: si un sistema posee simultáneamente momento eléctrico y magnético, la emisión del dipolo magnético a grandes distancias de la fuente es generalmente menor que la emisión del dipolo eléctrico.

Si el dipolo emite cediendo su energía interna o, como ocurre en la antena, transformando en energía de emisión la energía de las fuentes extrañas, este dipolo puede llamarse *radiador o emisor primario*. Pero, además de éstos, también ofrece gran interés la *radiación secundaria*, es decir, el fenómeno en virtud del cual un dipolo entra en oscilación debido a la acción de una onda electromagnética y se convierte en emisor únicamente por esta causa. Las oscilaciones secundarias serán particularmente intensas en el caso en que la onda primaria tenga la misma frecuencia que la propia del dipolo (resonancia).

La acción de poner un dipolo en estado de oscilación nos la podemos figurar como un proceso mecánico: el de puesta en oscilación de las cargas por una fuerza exterior igual al producto de la carga por la intensidad. Pero al mismo tiempo, el proceso de generación, en una antena receptora, de oscilaciones secundarias se puede considerar como un proceso inducido de provocación de una

corriente eléctrica alterna por un campo magnético variable. Estas dos consideraciones coinciden dentro de la exactitud con que la antena puede sustituirse por un dipolo.

§ 121. Una antena como dipolo eléctrico

Entre el estado de oscilación de un circuito oscilante (pág. 329) y las oscilaciones de la corriente en la antena existe una diferencia esencial. Cuando hablábamos de la oscilación eléctrica de un circuito nos referíamos a una determinada intensidad instantánea de la corriente, a una determinada carga instantánea en las armaduras del condensador. Se sobrentendía tácitamente que la intensidad de la corriente era igual en todas las partes del circuito y que la carga eléctrica estaba concentrada en las armaduras del condensador y que, por consiguiente, en un instante dado podía tener sólamente un valor único.

Al pasar a la antena deja de ser lícito considerar la oscilación eléctrica del mismo modo que estudiamos en su tiempo la oscilación del péndulo. No obstante, la oscilación de la corriente eléctrica en la antena tiene su analogía mecánica: se asemeja mucho a la oscilación (vibración) de una varilla o de una cuerda, es decir, es una onda estacionaria.

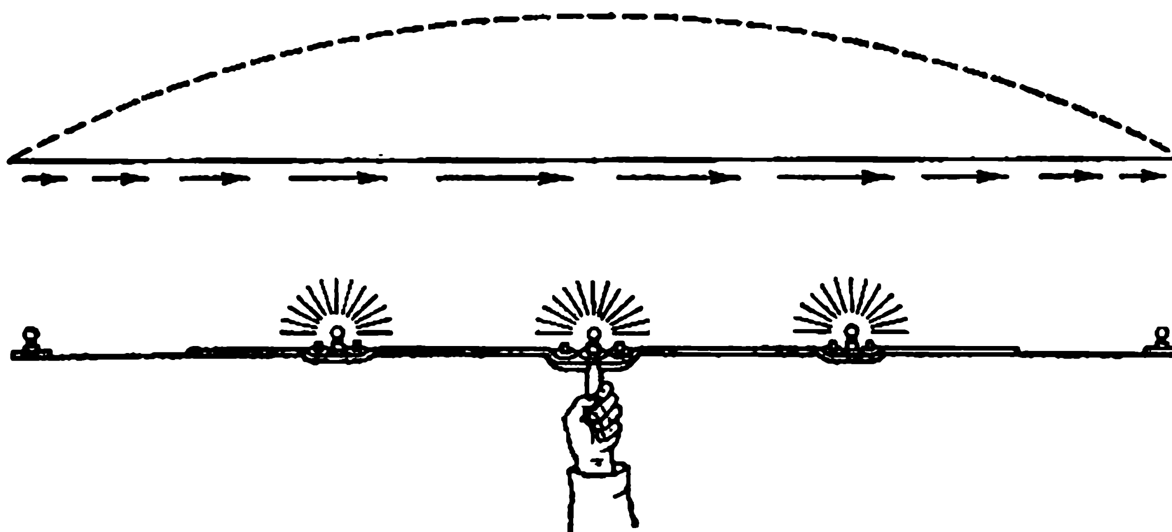


FIG. 132.

Este hecho se puede evidenciar demostrando que en una antena sometida a corriente existen nodos y vientres. De indicador de corriente puede servir una pequeña lámpara de incandescencia (fig. 132). Nos convenceremos de que en el punto medio del trozo de conductor libre en que se inducen las oscilaciones electromagnéticas existe

un vientre de corriente de conducción, mientras que en los extremos hay nodos de dicha corriente. En cada instante la corriente pasa por todas las partes de este conductor en el mismo sentido. En un instante determinado se anula la corriente en todos los puntos del conductor, y luego comienza a pasar en sentido contrario. Respectivamente varían las cargas eléctricas que se hallan repartidas continuamente a lo largo de dicho conductor. Es evidente que, mientras la corriente pasa en un sentido, se produce la concentración de la carga positiva en una mitad del conductor y la formación de una carga negativa en la otra. En el instante en que la corriente se anula, en los extremos se acumulan las cargas máximas de signos opuestos. Después la corriente empieza a pasar en sentido contrario y las cargas comienzan a disminuir hasta que se anulan en el instante en que la intensidad de la corriente es máxima en todos los puntos del conductor. Luego empieza la recarga; en las dos mitades del conductor comienzan a acumularse cargas de signo contrario y así sucesivamente.

Llamamos la atención sobre el hecho de que, en cada instante, en las dos mitades de la varilla hay cargas de signo contrario. Dos cargas de igual valor y signo contrario, situadas a cierta distancia una de otra, constituyen un dipolo eléctrico. Puede decirse por esto, que las oscilaciones eléctricas que tienen lugar en una antena son muy parecidas a las de un dipolo eléctrico, en que el momento dipolar varía desde su valor positivo máximo hasta cero y después, desde cero, crece en sentido contrario para luego volver a disminuir y así sucesivamente.

La diferencia entre la antena y el dipolo sólo se manifiesta a cortas distancias de ella. A distancias centenares de veces mayores que las dimensiones de la antena, el campo creado por ésta es prácticamente indistinguible del generado por un dipolo eléctrico ideal.

Retornemos una vez más a la analogía de la antena con una varilla. Las frecuencias propias de las oscilaciones eléctricas que pueden existir en una antena libre, no puesta a tierra, no se limitan al caso más simple en que en la longitud de dicha antena cabe una semionda (en la técnica de ondas ultracortas se utiliza principalmente este tipo de dipolo en media onda). Entre la longitud de la onda y de la antena existe una relación, comprensible desde el punto de vista expuesto en la pág. 140, $L=n\frac{\lambda}{2}$. Estas son las longitudes de onda que una antena de longitud L es capaz de emitir y captar.

Los procedimientos para variar las frecuencias propias de una antena son bien conocidos por los especialistas en radiotecnia. Se reducen a acoplar a la antena una bobina de autoinducción o un

condensador. Cambiando la inductancia o la capacidad pueden variarse las frecuencias propias de la antena dentro de límites muy ámplios.

§ 122. *Radiación de un dipolo*

La radiación de dipolo puede estudiarse experimentalmente. El resultado coincide totalmente con el estudio teórico que realizó por primera vez Hertz. Nosotros consideraremos únicamente los resultados de las experiencias y de los cálculos teóricos, limitándonos al estudio del campo del dipolo lejos de él, en la llamada zona de onda, es decir, a distancias considerablemente mayores que las dimensiones del dipolo.

Por muy complejas que sean las leyes por que oscila un dipolo, sus oscilaciones siempre se pueden descomponer, por el teorema de Fourier, en un espectro, o sea, se pueden representar en forma de una suma de oscilaciones armónicas de frecuencias ω, 2ω, 3ω, etc. Por esta razón basta estudiar el campo electromagnético de un dipolo cuyo momento varíe según la ley armónica $p=p_0 \cos \omega t$.

El cálculo y la experiencia demuestran que el campo de un sistema de este tipo es una onda esférica que se propaga con la velocidad $v=c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Los vectores eléctrico y magnético de esta onda forman entre sí un ángulo de 90° y un ángulo igual con la dirección de propagación. La última circunstancia se deduce del teorema de Poynting.

Los vectores eléctrico y magnético varían en la zona de onda en una misma fase, realizando en cada punto del espacio oscilaciones armónicas. Entre los valores numéricos de los vectores intensidad existe una relación simple, a saber:

$$\sqrt{\varepsilon}E=\sqrt{\mu}H.$$

De aquí se deduce la siguiente representación del vector de Poynting:

$$K=\frac{c}{4\pi}E^2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}=\frac{v}{4\pi}=\varepsilon E^2.$$

De este modo, la intensidad de la onda, o sea, la energía correspondiente a la unidad de superficie en la unidad de tiempo es proporcional al cuadrado de la amplitud de la intensidad del campo eléctrico.

La radiación del dipolo no es igual en distintas direcciones. La amplitud, y junto con ella la intensidad, dependen del ángulo de inclinación de la línea de propagación con respecto al eje del dipolo. La radiación es máxima en la dirección perpendicular al eje del dipolo, y nula, en la dirección del momento dipolar. La

teoría da la siguiente expresión de la intensidad del campo eléctrico:

$$E = \frac{p_0 \omega^2}{c^2 R} \operatorname{sen} \theta \cos \omega \left(t - \frac{R}{v}\right),$$

donde el factor que figura delante del coseno es la amplitud de la onda del vector $\boldsymbol{E}$. El ángulo θ es el formado entre la dirección de propagación y el eje del dipolo. La expresión para el campo magnético sólo difiere, de la escrita, en un factor no esencial.

La dependencia de la intensidad de la radiación respecto de la dirección suele representarse por un diagrama como el de la fig. 133. Aquí el radio vector, trazado en la dirección que nos interesa, corta a la curva de intensidades. El segmento formado en esta intersección da, en una escala determinada, la intensidad de la radiación.

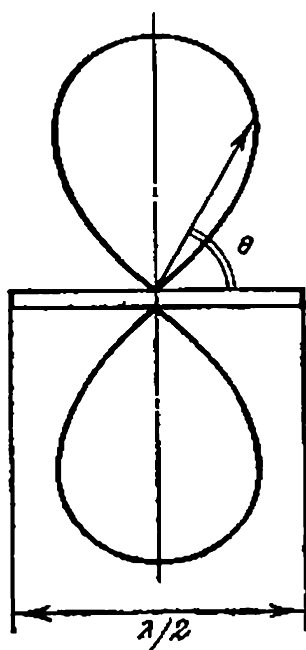


FIG. 133.

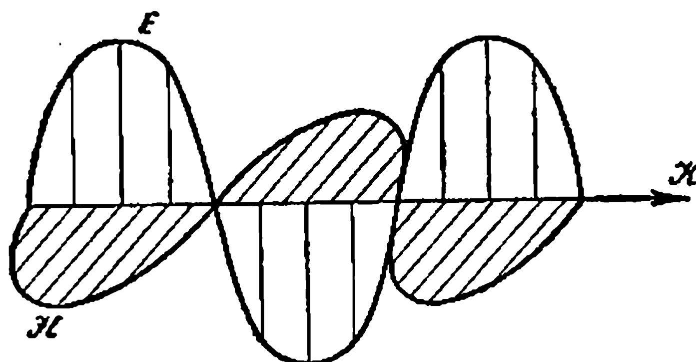


FIG. 134.

Un resultado muy importante es la proporcionalidad de la amplitud al cuadrado de la frecuencia de radiación. Es evidente que la intensidad de radiación de un dipolo dependerá mucho de la frecuencia; concretamente es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia:

$$K \sim \frac{\omega^4}{R^2} \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Así, por ejemplo, si la frecuencia se reduce a la mitad, la intensidad se hará 16 veces menor.

La teoría condujo a una importante conclusión acerca del carácter transversal de la onda electromagnética. Esto se ve claramente en la fig. 134. Los vectores eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación. En virtud de esto, al girar alrededor de la dirección de propagación, la onda electromagnética cam-

bia de propiedades. Estas últimas reciben el nombre de *propiedades de polarización*.

La figura de las líneas de fuerza de un dipolo radiante no ofrece gran interés. En la fig. 135 se representan los vectores intensidad del campo eléctrico para ciertos puntos del espacio. El campo es rotacional y las líneas de fuerza son cerradas. Durante la emisión, las líneas cerradas se mueven, extendiéndose hacia el lado opuesto al emisor. En lo tocante a las líneas de fuerza magnética, estas líneas son circunferencias que rodean al eje del dipolo.

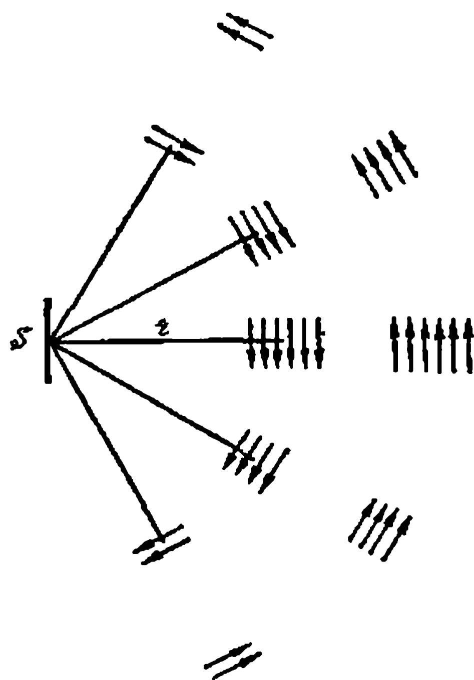


FIG. 135.

A grandes distancias del dipolo, la onda esférica no difiere prácticamente de una onda plana. La disposición de los vectores ***E***, ***H*** y ***K*** en la onda plana y las relaciones numéricas que hemos dado más arriba continúan, claro está, siendo las mismas.

§ 123. Espectro electromagnético

La teoría demuestra que la radiación electromagnética se produce cuando el movimiento de las cargas eléctricas es variado, es decir, acelerado. Un flujo de cargas con movimiento uniforme (libre) no radia. También carecen de radiación de campo electromagnético las cargas que se mueven por la acción de una fuerza constante, por ejemplo, las cargas que describen una circunferencia en un campo magnético.

En los movimientos oscilatorios la aceleración varía continuamente, por lo que las oscilaciones de las cargas eléctricas dan radiación electromagnética. Además de esto, la radiación electromagnética se produce cuando las cargas se retardan bruscamente, por ejemplo, cuando un haz de electrones se encuentra con un obstáculo (producción de rayos X). En el movimiento térmico caótico de las partículas también se genera radiación electromagnética (radiación térmica). Las pulsaciones de la carga nuclear ocasiona la radiación electromagnética conocida con el nombre de rayos γ. Los rayos ultravioleta y la luz visible son producidos por el movimiento de los electrones atómicos. Las oscilaciones de una carga eléctrica a escalas cósmicas origina la radioemisión de los cuerpos celestes.

Además de los procesos naturales, como resultado de los cuales se producen radiaciones electromagnéticas de las más diversas propiedades, existen distintas posibilidades experimentales de crear una radiación electromagnética.

La característica fundamental de la radiación electromagnética es su frecuencia (si se trata de oscilaciones armónicas) o su banda de frecuencias. Está claro que por medio de la relación $c=\nu\lambda$ se puede reducir la frecuencia de la radiación a la longitud de la onda electromagnética en el vacío.

La intensidad de la radiación es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia. Por esta razón, una radiación de frecuencias muy bajas, con longitud de onda del orden de centenares de kilómetros, es inobservable. La gama de las ondas radioeléctricas comienza prácticamente en las longitudes del orden de 1—2 km, lo que corresponde a frecuencias del orden de 150 kHz; las longitudes de onda del orden de 200 m pertenecen a la gama de ondas medias, y las de decenas de metros son ya ondas cortas. Las ondas ultracortas se salen de la gama ordinaria de las ondas radioeléctricas; las longitudes de onda del orden de varios metros y fracciones de metro e incluso hasta un centímetro (es decir, las frecuencias del orden de 10^{10}—10^{11} MHz) se utilizan en la televisión y en la radiolocalización (radar).

Ondas electromagnéticas aún más cortas fueron obtenidas en 1924 por la física soviética A. Glagóleva-Arkádieva. Utilizó como generador las chispas eléctricas que saltaban entre limaduras de hierro suspendidas en aceite y obtuvo ondas de hasta 0,1 mm de longitud. Aquí ya se llega a la superposición con las longitudes de onda de la radiación térmica.

La región de la luz visible es bastante pequeña: comprende solamente las longitudes de onda desde $7{,}6\cdot 10^{-5}$ hasta $4\cdot 10^{-5}$ cm. Después siguen los rayos ultravioletas, imperceptibles a la vista, pero que se detectan bien con aparatos físicos. Estos rayos tienen longitudes de onda desde $4\cdot 10^{-5}$ hasta 10^{-5} cm.

A continuación de los rayos ultravioletas van los rayos X, cuyas longitudes de onda se extienden desde 10^{-6} hasta 10^{-10} cm. Cuanto menor es la longitud de onda, tanto más débilmente son absorbidos los rayos X por las sustancias. Las radiaciones electromagnéticas más cortas y penetrantes son las llamadas rayos γ (con longitud de onda desde 10^{-9} cm en adelante).

La característica de cualquiera de las radiaciones electromagnéticas enumeradas será exhaustiva si se efectúan las siguientes medidas. En primer lugar hay que, por cualquier método, descomponer la radiación electromagnética en su espectro. En el caso de la luz, de los rayos ultravioletas y de la radiación infrarroja, esto puede conseguirse mediante la difracción por un prisma o

haciendo pasar la radiación a través de una red de difracción (véase más adelante). En el caso de los rayos X y γ, la descomposición en el espectro se logra por reflexión en un cristal (véase la pág. 410).

Las ondas de la gama que se usa en radiotecnia se desdoblan en el espectro aplicando el fenómeno de la resonancia.

El espectro que se obtiene de la radiación puede ser continuo o de rayas, es decir, puede llenar sin interrupción cierta banda de frecuencias o puede estar formado por rayas nítidas aisladas correspondientes a un intervalo de frecuencias extremadamente estrecho. En el primer caso, para la característica del espectro hay que dar la curva de la intensidad en función de la frecuencia (o de la longitud de onda), en el segundo, el espectro quedará definido si se dan todas las rayas que hay en él, indicando sus frecuencias e intensidades.

La experiencia demuestra que una radiación electromagnética de frecuencia e intensidad dadas puede distinguirse por su estado de polarización. Junto a las ondas en que el vector eléctrico oscila a lo largo de una línea determinada (onda linealmente polarizada), nos encontramos también con una radiación en la cual las ondas linealmente polarizadas han girado la una con respecto a la otra alrededor del eje del rayo y se superponen entre sí. Cuando se da una característica completa de una radiación, hay que indicar su polarización.

Conviene advertir que, incluso en las oscilaciones electromagnéticas más lentas, no es imposible medir los vectores eléctricos y magnéticos de la onda. El cuadro del campo que hemos pintado antes tiene carácter teórico. Sin embargo, teniendo en cuenta la integridad e indisolubilidad de toda la teoría electromagnética, su veracidad no ofrece duda.

La afirmación de que tal o cual tipo de radiación pertenece a las ondas electromagnéticas tiene siempre un carácter indirecto. No obstante, las consecuencias que se deducen de esta hipótesis son tantísimas y concuerdan entre sí tan estrechamente, que la hipótesis sobre el espectro electromagnético hace ya mucho tiempo que adquirió todos los rasgos de una realidad natural.

§ 124. Naturaleza cuántica de la radiación

Ya hemos dicho (pág. 163) que el estudio de los fenómenos atómicos condujo al descubrimiento de la ley según la cual la energía interna de un sistema no puede tener un valor arbitrario, sino que se caracteriza por un sistema de niveles energéticos. La radiación de energía está ligada al paso del sistema de un nivel más alto a otro más bajo. La absorción de energía guarda relación con la elevación a un nivel más alto.

Esto se refiere en primer término a la radiación electromagnética. La naturaleza cuántica de los fenómenos ultramicroscópicos fue descubierta al estudiar una serie de hechos contradictorios hallados en relación con la radiación electromagnética a principios ya de nuestro siglo. De este modo, la emisión por un dipolo de una radiación electromagnética de frecuencia ν no se efectúa de manera continua, sino por cuantos (porciones). El valor de la energía de un cuanto es igual a $h\nu$, donde h es la constante de Planck, que es igual a $6,62 \times 10^{-27}$ erg·s$=6,62 \cdot 10^{-34}$ J·s.

La naturaleza cuántica de las ondas electromagnéticas se manifiesta en la emisión o en la absorción, ya que también la absorción sólo puede efectuarse por cuantos de energía. Si el valor de un cuanto de energía es igual a la diferencia entre dos niveles de energía cualesquiera, del sistema sobre el cual incide la onda, el proceso de absorción será bastante claro. En este caso se dice que la absorción es por resonancia. Desde el punto de vista de la física clásica este hecho se produce cuando la frecuencia del campo exterior es igual que la frecuencia de la oscilación de las partículas que constituyen el sistema. Si el valor del cuanto de la onda electromagnética es menor que la diferencia entre dos niveles de energía, la absorción no puede producirse y esta onda pasará libremente a través del sistema.

La radiación secundaria de un sistema se define en términos cuánticos del modo siguiente. El sistema absorbe un cuanto de energía electromagnética y se eleva a un nivel de energía más alto. En este nivel permanece el sistema cierto tiempo, y después retorna al nivel de energía en que estaba antes, cediendo en este caso energía también en forma de un cuanto.

Como esto se deduce evidentemente de la fórmula del cuanto de energía $h\nu$, los fenómenos cuánticos se revelan con tanta mayor claridad cuanto mayor es la frecuencia de la radiación. A pesar de esto, en la actualidad puede decirse que se ha puesto ya de manifiesto la naturaleza cuántica de la radiación de todas las zonas del espectro electromagnético. Resulta posible detectar la absorción cuántica de ondas radioeléctricas de varios cientos de metros de longitud (radioespectroscopia, véase la pág. 578). El origen de un espectro electromagnético de radiación depende, en primer lugar, de la distribución de los niveles de energía en el sistema y, en segundo, de las probabilidades de que éste pase desde el nivel n-ésimo al nivel m-ésimo. Si estas probabilidades se conocieran previamente, al mismo tiempo que el cuadro de los niveles de energía, la predicción del espectro irradiado por el sistema sería un problema fácil.

En más de una ocasión volveremos a ocuparnos de problemas de radiación y absorción de la energía electromagnética, pero ahora vamos a estudiar los relacionados con la propagación de las ondas

electromagnéticas en que la naturaleza cuántica de la radiación no se manifiesta si el fenómeno no va acompañado de absorción y radiación de energía.

19

PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 125. *Dispersión y absorción*

En un medio uniforme las ondas electromagnéticas se propagan con velocidad invariable y en dirección invariable. La velocidad de la onda en el vacío es máxima. Su velocidad en un medio es

$$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}.$$

o, como en la mayoría de los casos que nos interesan $\mu=1$,

$$v = c/\sqrt{\varepsilon}.$$

La relación de la velocidad de propagación de la onda en el vacío a la velocidad de propagación en el medio recibe el nombre de *índice de refracción*. De este modo, la teoría electromagnética nos lleva a la igualdad $n=\sqrt{\varepsilon}$, que se cumple bien cuando se trata de ondas muy largas. Cuando la longitud de onda varía, también cambia el índice de refracción. Este fenómeno, que se llama *dispersión*, es ajeno a la teoría electromagnética de Maxwell, que supone que el espacio es continuo y no tiene en cuenta la interacción de la radiación con la sustancia. Como quiera que sea, la igualdad $n=\sqrt{\varepsilon}$ no se cumple para oscilaciones electromagnéticas rápidas.

Al propagarse por una sustancia, la onda electromagnética hace entrar en estado de oscilación a las cargas eléctricas de las moléculas. Como la nube electrónica se mueve fácilmente comparada con los núcleos pesados, la oscilación eléctrica consiste en una desviación del centro de gravedad de los electrones con respecto al centro de gravedad de las cargas positivas de los núcleos atómicos, el cual permanece en reposo. Llamando m y e, respectivamente, a la masa y a la carga de los electrones oscilantes, puede escribirse la ecuación de las oscilaciones de la forma

$$m\ddot{x} = -kx - eE_0 \cos \omega t$$

o, diviendo por m y aplicando la fórmula de la frecuencia propia de las oscilaciones $\omega_0^2=k/m$,

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t.$$

Hemos igualado el producto de la masa por la aceleración a dos fuerzas: la fuerza de recuperación $-kx$ y la fuerza exterior variable periódicamente $eE_0 \cos \omega t$. Esta es la ecuación de las oscilaciones armónicas forzadas, que se cumple suponiendo que

$$x = x_0 \cos \omega t.$$

Después de hacer la sustitución en la ecuación, hallamos que

$$x_0 = \frac{-\frac{e}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

El momento de dipolo de la molécula será igual a

$$ex_0 = \frac{\frac{e^2}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

El vector de polarización, es decir, el momento de dipolo en la unidad de volumen, será N veces mayor, si N es el número de moléculas que hay en la unidad de volumen:

$$P = \frac{\frac{Ne^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} E.$$

Recordando la fórmula que relaciona la polarización con la intensidad,

$$P = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E,$$

vemos que hemos expresado la permitividad del medio en función de los parámetros del dipolo molecular

$$\varepsilon = 1 + \frac{\frac{4\pi Ne^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

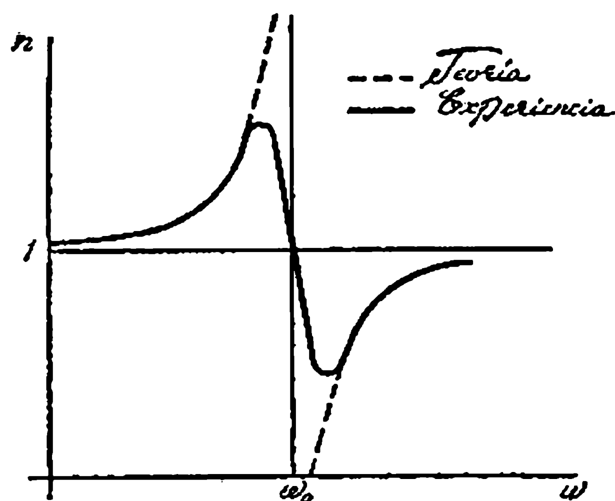


FIG. 136.

El índice de refracción del medio debe ser igual a la raíz cuadrada de esta expresión.

El carácter general de la dependencia se confirma bien en la práctica, como demuestra la fig. 136, en la cual se comparan la curva del índice de refracción, en función de la frecuencia, calculada por la fórmula que hemos dado, con la curva de las mediciones

para una sustancia concreta *). ¿En qué consiste el resultado principal de los experimentos y del cálculo? El índice de refracción crece, en general, al aumentar la frecuencia en todo el intervalo de frecuencias, a excepción de la región inmediatamente contigua a la frecuencia de absorción por resonancia. Esta región se llama *zona de dispersión anómala.* Una sustancia puede tener no una, sino varias frecuencias de resonancia, correspondientes a las diferencias entre sus niveles energéticos. En este caso también serán varias las zonas de dispersión anómala.

Así, pues, la velocidad de propagación de la onda, o sea, el índice de refracción, depende considerablemente de la relación entre su frecuencia y las frecuencias propias de los dipolos moleculares.

Está claro que de estas mismas causas depende el grado de absorción de la onda electromagnética por el cuerpo. Repitiendo los razonamientos hechos en la pág. 126 para las ondas elásticas, llegamos a una fórmula totalmente análoga

$$I = I_0 e^{-\mu d},$$

que permite valorar la relación entre la intensidad de la radiación transmitida I y la incidente I_0, si se conoce el coeficiente de absorción μ y el espesor de la capa d. Recordamos que el coeficiente de absorción es igual a una magnitud recíproca del espesor de la capa que debilita la intensidad de la radiación e veces. Debido al complejo sistema de niveles de energía peculiar de la sustancia, la dependencia del coeficiente de absorción respecto de la frecuencia de la onda incidente puede ser rara y «a saltos».

Hasta ahora nos hemos referido a los medios dieléctricos en cuya composición entran solamente cargas eléctricas ligadas. Pero las leyes que rigen cuando las ondas electromagnéticas se propagan en un medio en el que hay un número apreciable de electrones libres son otras. A los medios de este tipo pertenecen los metales y la ionosfera, que es un conjunto de cargas libres semejante a un gas. Aplicando la teoría que hemos expuesto, deberemos suponer que la frecuencia propia ω_0 de la carga libre en la fórmula de ε es igual a cero (ya que la frecuencia es proporcional a la rigidez del enlace). En este caso, la constante dieléctrica se representa por la fórmula

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi N e^2/m}{\omega^2}.$$

Cuando los valores de ω son suficientemente grandes, el índice de refracción $n = \sqrt{\varepsilon}$ tiende a la unidad. Y al contrario, cuando

*) Una teoría más exacta proporciona también la coincidencia en la región próxima a ω_0.

$\omega^2 < 4\pi Ne^2/m$, el índice de refracción se convierte en imaginario. Esto último quiere decir que, con dichos valores de la frecuencia, las ondas no pueden penetrar en un metal o en la ionosfera. Por el contrario, cuando las frecuencias son grandes, las ondas «no notan» el medio en que hay electrones. Estas predicciones se cumplen bien para las ondas radioeléctricas. En efecto, las ondas largas y medias se reflejan en la ionosfera y no penetran en ella, las ondas cortas son capaces de penetrar en la ionosfera, y las ondas ultracortas pasan sin dificultad a través de ella.

Estas consideraciones son simplificadas en extremo y, por eso, no hay que asombrarse si no se justifican en la gama óptica, donde los valores del índice de refracción pueden ser próximos a cero y mucho mayores que la unidad.

§ 126. Comportamiento de las ondas electromagnéticas en el límite de separación de dos medios

Lo mismo que la onda elástica, la onda electromagnética se refleja y se refracta si encuentra en su camino un límite de separación entre dos medios. Las leyes fundamentales de estos fenómenos pueden analizarse teóricamente mediante las condiciones de frontera de los vectores del campo electromagnético. Estas condiciones, que estudiamos en las págs. 272 y 307 son consecuencia a su vez de las ecuaciones de Maxwell. Como las relaciones entre los campos por ambos lados de la frontera no son arbitrarias, la división de la onda en reflejada y transmitida tampoco puede ser arbitraria.

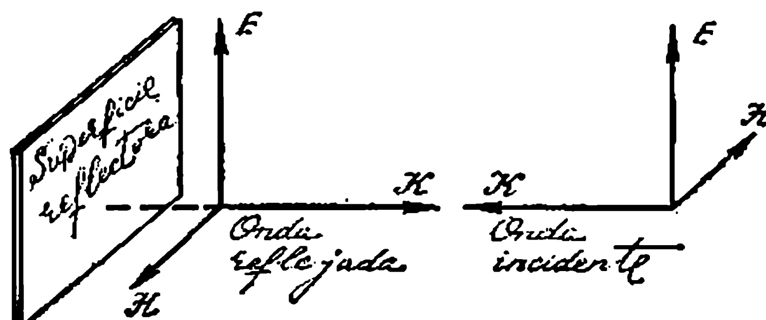


FIG. 137.

Las relaciones fundamentales son dos: las componentes tangenciales de los vectores eléctrico y magnético deben ser iguales por ambos lados del límite de separación.

Veamos qué limitaciones imponen estas relaciones en el caso más simple de la incidencia normal. La fig. 137 representa este

caso. Supongamos que en el plano del dibujo se encuentran los vectores eléctricos, en este caso los magnéticos serán perpendiculares a dicho plano. Ya sabemos que en la dirección de propagación de los vectores eléctrico y magnético debe formarse un sistema dextrógiro: el vector E girará, siguiendo el camino más corto, hacia el vector H en sentido contrario al de las agujas del reloj; si se mira en sentido opuesto al de propagación. Vemos que esta consecuencia indispensable de la teoría electromagnética puede satisfacerse por dos procedimientos: invirtiendo la dirección del vector H de la onda reflejada o haciendo lo mismo con la del vector E. Por lo tanto uno de los vectores, el eléctrico o el magnético, sufre un salto de fase de 180° durante la reflexión.

La solución del problema de cuál de estos dos casos es el que ocurre la encontramos al estudiar la incidencia oblicua. Resulta que se producen ambos casos: uno, cuando la onda pasa a un medio de mayor ε, y otro, cuando lo hace a un medio de menor ε.

Si la incidencia es normal, el cálculo ulterior no dependende del esquema que se elija. Las condiciones de frontera las escribiremos de la forma

$$E_{\text{inc}} = E_{\text{refl}} + E_{\text{trans}};$$
$$H_{\text{inc}} = -H_{\text{refl}} + H_{\text{trans}}.$$

Pero entre los valores numéricos de los vectores H y E existe la relación

$$H = \sqrt{\varepsilon} E = nE.$$

Por consiguiente, obtenemos las ecuaciones

$$E_{\text{inc}} = E_{\text{refl}} + E_{\text{trans}}$$

y

$$n_1 E_{\text{inc}} = -n_1 E_{\text{refl}} + n_2 E_{\text{trans}},$$

de las cuales pueden hallarse las relaciones $E_{\text{refl}}/E_{\text{inc}}$ y $E_{\text{trans}}/E_{\text{inc}}$. Como la intensidad de la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud y al índice de refracción (véase la pág. 342), para los factores de reflexión y de transmisión obtenemos, introduciendo el índice relativo $n = n_2/n_1$, las fórmulas siguientes:

$$\text{factor de reflexión} = \left(\frac{E_{\text{refl}}}{E_{\text{inc}}}\right)^2 = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2},$$
$$\text{factor de transmisión} = \left(\frac{E_{\text{trans}}}{E_{\text{inc}}}\right)^2 = \frac{4n}{(n+1)^2}.$$

La analogía con las ondas elásticas (véase la pág. 135) es bastante grande.

Por medio de cálculos análogos, hechos para el caso de una inclinación arbitraria y cualquier estado de polarización de la onda, se han obtenido todos los resultados generales a cuya exposición pasamos ahora. Todos ellos coinciden bastante satisfactoriamente con la experiencia.

Como quiera que la suma de los factores de reflexión y de transmisión es igual a la unidad, los resultados de la teoría vienen definidos completamente por la fig. 138, en la cual la intensidad de la onda reflejada se representa como función del ángulo de incidencia.

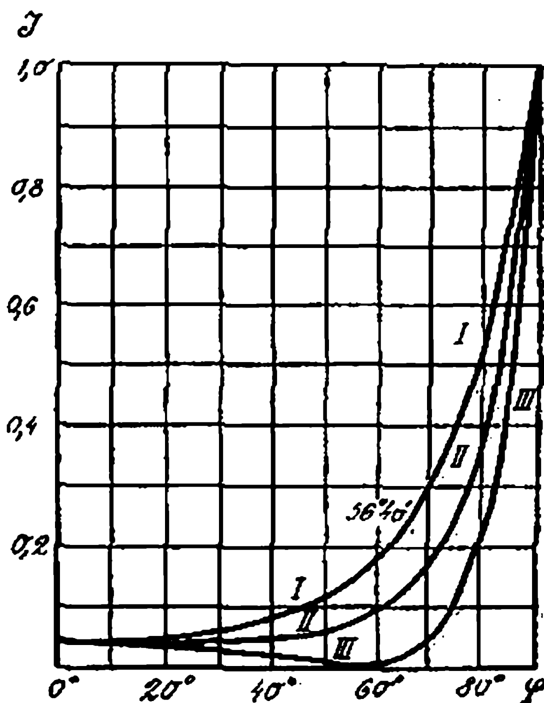


FIG. 138.

Los cálculos y la experiencia demuestran que el carácter de la reflexión depende esencialmente del estado de polarización de la onda incidente con respecto al plano de incidencia. El vector intensidad del campo eléctrico ***E*** es «más importante» que el vector ***H*** aunque sólo sea en el sentido de que la acción fotoquímica la posee el vector ***E***. Por esta razón, cuando se define el estado de polarización de una onda, se acostumbra hacerlo con respecto al vector eléctrico. La posición del vector ***H*** siempre es fácil de hallar si se conoce la dirección de propagación. Así, pues, resulta que el factor de reflexión es diferente para dos ondas que incidan formando el mismo ángulo φ sobre una misma frontera divisoria, si en un caso el vector eléctrico se encuentra en el plano de incidencia y en el otro caso es perpendicular a dicho plano. La curva *I* corresponde en la figura al caso en que el vector ***E*** es perpendicular al plano de incidencia; la curva *III* corresponde al vector ***E*** que se encuentra en el plano de incidencia, y la curva *II*, al caso en que la onda incidente no está polarizada.

En el primer caso el factor de reflexión varía monótonamente; cuando la incidencia es normal, la reflexión es pequeña — el factor es del orden de un 5% —, al aumentar el ángulo, el factor de reflexión crece, siendo este crecimiento tanto más rápido cuanto más se aproxima a la posición de deslizamiento. Totalmente distinto es el comportamiento del rayo cuyo vector eléctrico se encuen-

tra en el plano de incidencia. Su intensidad de reflexión decrece y llega a anularse cuando el ángulo φ_B satisface la interesante igualdad $n = \operatorname{tg} \varphi_B$. Nuestra figura se construyó para el valor $n = 1{,}52$ (paso del aire al vidrio), de acuerdo con lo cual el ángulo de anulación del factor de reflexión es igual a 56°40′. En adelante dicho factor aumenta hacia la unidad.

¿A qué se debe la ausencia de reflexión precisamente en este caso?, ¿qué tiene de particular? Es evidente que deberemos buscar la respuesta en las mismas condiciones de frontera de que se deduce toda la teoría del fenómeno. Damos al lector la oportunidad de construir los vectores del campo para este ángulo y de demostrar lo que hace falta.

Al lector puede planteársele la siguiente cuestión. Si las condiciones de frontera permiten comprender todos los fenómenos en el límite entre dos medios, ¿cómo explicar la reflexión total, en que existe campo en uno de los medios ($E_{1t} \neq 0$), mientras que en el otro medio no lo hay? La pregunta es lógica, y la teoría da respuesta a ella. Resulta que, en las condiciones de la reflexión total, el campo penetra en el segundo medio pero no se propaga dentro de él. La igualdad $E_{1t} = E_{2t}$ no se infringe.

Existe una serie de experiencias que demuestran la penetración, en el segundo medio, de las ondas luminosas en las condiciones de la reflexión total. Mencionaremos únicamente un experimento, cuya idea es sencilla, que describe L. I. Mandelshtam. Un prisma de vidrio se introduce en una solución de fluoresceína, sustancia que posee la propiedad de producir luminiscencia característica por la acción de la luz. Se hace que un rayo de luz incida sobre el prisma de manera que ocurra la reflexión total por la parte interior de la cara del prisma introducida en la solución. En este experimento la fluoresceína se ilumina intensamente en una capa extraordinariamente delgada contigua al vidrio, lo que demuestra que la onda electromagnética penetra en la disolución.

§ 127. Luz natural y polarizada. Polarización por reflexión

Coloquemos una lámina de vidrio de modo que forme un ángulo φ_B con un rayo de luz. El rayo se reflejará. Hagamos girar alrededor de su eje (en realidad giraremos la fuente de luz en torno al eje a lo largo del cual va el rayo), contando con que más temprano o más tarde desaparecerá el rayo reflejado. Pero si para hacer el experimento utilizamos un rayo de luz natural, nuestras esperanzas no se verán cumplidas: el rayo reflejado tendrá la misma intensidad cualquiera que sea la posición acimutal del rayo inci-

dente. No obstante, sería un error sacar de aquí una conclusión que contradijera la teoría que acabamos de exponer. Con esta experiencia sólo se demuestra una cosa: que el estado de polarización del rayo de luz natural es más complejo que el que proporciona el esquema de los dos vectores ***E*** y ***H*** con dirección de oscilación fija.

Continuando este experimento, hagamos que el rayo, después de reflejado bajo el ángulo φ_B, incida sobre una segunda lámina de vidrio, igual que la primera, que forme con él un ángulo igual a φ_B. Comencemos ahora a girar el rayo alrededor de sí mismo. Pero como lo que importa, claro está, es solamente la posición relativa del rayo y del espejo, resulta ser más fácil hacer girar la segunda lámina de vidrio. Observando el rayo doblemente reflejado veremos que no se reflejará siempre igualmente, y no será difícil hallar una posición en la cual no existe reflexión. Es evidente que esta posición mutua del rayo y el espejo será aquella en la cual el vector eléctrico del rayo se encuentra en el plano de incidencia. De aquí podemos hacer la deducción siguiente: la reflexión en el primer espejo hizo que el rayo de luz natural entrase en un estado polarizado en el cual el vector eléctrico tiene una sola dirección determinada de oscilación.

A diferencia de los rayos de luz natural, los rayos con direcciones determinadas de oscilación de los vectores reciben el nombre de polarizados. ¿Cómo debemos figurarnos el estado de polarización de un rayo de luz natural? Hay que suponer que en la onda electromagnética natural están representadas todas las direcciones posibles de oscilación del vector eléctrico. Subrayamos la palabra «posibles», puesto que la teoría electromagnética nos habla del carácter transversal del vector eléctrico. Por consiguiente, una onda natural no polarizada es, en esencia, la superposición de una cantidad innumerable de ondas polarizadas linealmente con las direcciones de oscilación de los vectores uniformemente representadas. Todas las direcciones transversales son direcciones de oscilación de los vectores eléctricos del rayo de luz natural.

La reflexión en dos espejos sucesivos, colocados formando ángulos φ_B con el rayo, es uno de los posibles procedimientos de polarizar los rayos de luz.

Los vectores eléctricos de la luz natural siempre se pueden descomponer según dos direcciones perpendiculares entre sí. Cuando se estudia la reflexión, lo más cómodo es descomponer los vectores en una componente que se encuentre a lo largo del plano de incidencia y otra que sea perpendicular a ella. El comportamiento del rayo de luz natural es equivalente al de dos ondas de este tipo, si se tiene en cuenta que la diferencia de fases entre ellas varía según la ley de la casualidad. Por esto, cuando se habla de la polarización de la luz, se utiliza la expresión: una de las componentes no

se transmitió o sólo se transmitió una fracción de ella. Si al reflejarse o refractarse la luz una de sus componentes se transmite en mayor grado que la otra, como suele ocurrir y puede verse en la figura de las curvas de refracción, se produce una polarización parcial de la luz

Este fenómeno puede utilizarse para polarizar totalmente un rayo cualquiera. El empleo de dos espejos colocados formando ángulos φ_B con los rayos es incómodo. Resulta más fácil hacer pasar el rayo de luz a través de una pila de láminas de vidrio. En este caso cada refracción aumentará en un porcentaje determinado la fracción de una de las componentes del rayo. De este modo se puede efectuar prácticamente la polarización total.

El estado natural de un rayo luminoso es el no polarizado. Pero de esto no debe sacarse la conclusión de que todo rayo que no haya sufrido reflexión o refracción no está polarizado. Esto se refiere en primer lugar a las ondas radioeléctricas. Las ondas electromagnéticas cortas que se emplean en la televisión están intensamente polarizadas. Precisamente esta circunstancia es la que permite determinar, por la orientación de una antena de televisión, la dirección en que se encuentra la estación transmisora. La onda electromagnética portadora de la transmisión de televisión está intensamente polarizada; la antena debe orientarse de tal modo que la dirección de las oscilaciones del vector eléctrico coincida con la de dicha antena.

§ 128. Propagación de las ondas luminosas en un medio con gradiente del índice de refracción

Las diferencias de densidad acarrean, por regla general, diferencias en los índices de refracción. Se plantea naturalmente el problema del carácter que tiene la propagación de una onda en un medio en que el valor del factor de refracción varía de un punto a otro (es decir, el gradiente del índice de refracción es distinto de cero).

La diferencia en los índices de refracción denota que las velocidades de avance del frente de onda son distintas. De aquí se deduce que el frente de onda, a medida que avance en un medio de este tipo, se deformará continuamente. Si construimos las normales al frente de onda obtendremos una línea curva. Puede decirse que, en un medio no homogéneo, la luz no se propaga siguiendo líneas rectas, sino curvas.

A su debido tiempo analizamos ya un problema análogo referido a las ondas sonoras (pág. 154). Las leyes aquí son las mismas y la marcha de los rayos se rige por el mismo principio de Fermat.

uando un rayo de luz se propaga en un medio ilimitado con gra-iente del índice de refracción, lo hace de manera que en recorrer ı distancia entre dos puntos tarda el tiempo mínimo. Por esto el ıayo de luz se torcerá para acortar su camino en las partes del espacio en que el índice de refracción es grande, y, al contrario, tenderá a que la mayor parte del camino pase por regiones del espacio cuyo índice de refracción sea pequeño.

El ejemplo más conocido de propagación de la luz en un medio con gradiente n es el del paso de un rayo de luz a través de la atmósfera. La densidad y el índice de refracción del aire disminuyen al aumentar la altura. Esto ocasiona el fenómeno de la refracción astronómica: un rayo que va desde una estrella cualquiera a la Tierra y que entra en la atmósfera no en dirección radial, sino formando ángulo, se torcerá y la posición aparente de la estrella estará desviada con respecto a su posición verdadera. Para las estrellas situadas en el horizonte, el ángulo de desviación alcanza la enorme magnitud, desde el punto de vista de la astronomía, de 1/2 de grado.

La existencia de gradiente del índice de refracción en la atmósfera da lugar a que se produzcan los espejismos. Los espejismos se observan en los desiertos africanos a causa de que sobre la arena caldeada pueden formarse con facilidad corrientes de calor, que ocasionan diferencias de temperatura y, por lo tanto, el gradiente de la densidad y del índice de refracción. Como resultado, el rayo de luz sigue una línea curva y aparece la imagen del paisaje en el lugar en que mentalmente la sitúa el observador, que está acostumbrado a que la luz se propague en línea recta.

Está claro que cuando se trata de la propagación de la luz en un medio heterogéneo no puede hablarse de ondas esféricas o planas. Debe recordarse que la velocidad variable de propagación significa que la longitud de onda también varía de un punto a otro. ¿Qué ecuación define el movimiento de la onda en un medio en que el índice de refracción varía de un punto a otro? Teniendo en cuenta la variación de los parámetros de la onda de un punto a otro, debemos buscar la ecuación diferencial que define este fenómeno, puesto que sólo una ecuación diferencial puede establecer la ley que relaciona las magnitudes físicas para un punto dado del espacio.

Esta ecuación puede hallarse por medio de las ecuaciones de Maxwell. La deducción es algo complicada y no podemos darla aquí. El resultado de los cálculos es el siguiente: tanto para el vector $\boldsymbol{E}$ (o sus proyecciones) como para el vector $\boldsymbol{H}$ (o sus proyecciones) es correcta la siguiente ley:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial s^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\,.$$

La función Ψ se llama *función de onda*. Esta función representa al vector $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{H}$ o a sus componentes, ya que para todos ellos la ecuación es la misma. s es la coordenada en el sentido de propagación de la onda, t es el tiempo y v, la velocidad de propagación.

La ecuación que hemos escrito se llama *ecuación de la onda* y es correcta para los puntos del espacio que se encuentran fuera de las fuentes del campo (es decir, fuera de las regiones con carga o de aquellas por las cuales pasan corrientes eléctricas).

Demostraremos ante todo que el proceso ondulatorio más simple, o sea, la onda plana, satisface esta ecuación diferencial. Como sabemos (pág. 119), la expresión de una onda plana de frecuencia ω, que se propaga a lo largo de la dirección s, tiene la forma

$$\Psi = A\cos\omega\left(t - \frac{s}{v}\right).$$

Calculando las segundas derivadas de la función de onda Ψ con respecto al tiempo y a la coordenada, obtenemos

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\omega^2\Psi; \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial s^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}\Psi.$$

Como puede verse, entre las segundas derivadas existe la relación que hace falta:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial s^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2},$$

esto quiere decir que la ecuación diferencial propuesta contiene la ecuación de la onda plana. Pero esta ecuación diferencial es mucho más amplia. Solución suya es cualquier función del argumento $\left(t - \frac{s}{v}\right)$, ya que para cualquier función $\Psi\left(t - \frac{s}{v}\right)$, las expresiones de las derivadas por medio de Ψ serán las mismas.

La dependencia de la función respecto del argumento $\left(t - \frac{s}{v}\right)$ se considera como el único criterio de proceso ondulatorio. El sentido de este argumento consiste en lo siguiente: si el estado en el punto $s=0$ se caracteriza en el instante $t=0$ por un valor determinado de la función de onda, este mismo estado se dará en el punto s_1 al cabo de un tiempo $t_1 = \frac{s_1}{v}$ en el punto s_2 al cabo del tiempo $t_2 = \frac{s_2}{v}$ y así sucesivamente. En este caso s es la coordenada, que se toma a lo largo de cualquier trayectoria rectilínea o curvilínea.

La ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial s^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

es la ecuación general del proceso ondulatorio y es válida para cualquier medio, incluido el no homogéneo en que v varía de un punto a otro.

Si la función de onda debe expresarse por medio de las tres coordenadas del espacio x, y, z, la generalización de la ecuación de la onda es la fórmula siguiente:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}.$$

Para la suma de las segundas derivadas parciales de cualquier función existe el símbolo $\Delta\Psi$ (que se lee «laplaciano de Ψ»). Así, pues,

$$\Delta\Psi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}.$$

La ecuación diferencial de la onda es correcta para un proceso arbitrario en el cual los valores de la longitud de onda y de la amplitud de onda varían de un punto a otro.

Llamemos ψ a la amplitud de la función de onda Ψ. Precisamente ψ es la que interesa en la mayoría de los problemas. Si en el espacio existe un proceso oscilatorio de frecuencia ω,

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=-\omega^2\Psi$$

en el caso más general. Por consiguiente, la función de onda satisfará siempre la ecuación

$$\Delta\Psi=-\frac{\omega^2}{v^2}\Psi.$$

La parte de la expresión de Ψ que depende del tiempo se simplifica siempre en semejante igualdad, por esta razón, la última ecuación es la de la *amplitud* de onda ψ. Haciendo uso de la relación $\lambda=v\frac{2\pi}{\omega}$, la ecuación anterior se puede escribir de la forma

$$\Delta\psi+\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\psi=0.$$

A veces también esta expresión recibe el nombre de ecuación de la onda.

§ 129. Propagación de las ondas radioeléctricas

Las leyes de la reflexión y la refracción determinan las de la propagación de las ondas radioeléctricas. Para analizar los resultados concretos basta generalizar la teoría al caso de un medio con factor de refracción continuamente variable. Pero estos razonamien-

tos se hicieron ya (pág. 154) para las ondas elásticas. Su carácter también se conserva para la onda electromagnética, sea luminosa o sea radioeléctrica. Trasladándose en el medio con n variable, es decir, con velocidad variable, la onda se propaga de manera que el tiempo necesario para recorrer la distancia entre dos puntos sea mínimo. El camino a recorrer por la onda será curvilíneo, con la particularidad de que al pasar de una capa con menor n a otra capa con n mayor, la onda se desviará hacia el lado de la normal trazada al límite de separación.

Para poder formarse una idea del carácter de la propagación de las ondas radioeléctricas hay que conocer las propiedades eléctricas de la tierra y de la atmosfera. Los valores de la conductibilidad eléctrica y de la constante dieléctrica de estos dos medios influyen decisivamente en el campo electromagnético de la onda.

¿Cómo se explica que el comportamiento de las ondas electromagnéticas de distinta longitud sea diferente? Está claro que un papel muy importante lo desempeña la dispersión. Sin embargo podemos formarnos un juicio aproximado acerca del comportamiento de la onda electromagnética si valoramos la relación entre la corriente de desplazamiento y la corriente de conducción. Se comprende que el medio pone de manifiesto sus propiedades dieléctricas si la corriente de desplazamiento es mucho mayor que la de conducción. Por el contrario, si la corriente de desplazamiento puede despreciarse, el medio se puede llamar conductor.

Desde este punto de vista deben evaluarse las propiedades de la superficie terrestre y de la atmósfera.

Pondremos un ejemplo característico. En radiotecnia es sabido que un terreno llano cubierto de bosques se caracteriza por un coeficiente dieléctrico ε del orden de 12 y una conductividad eléctrica γ (en el sistema CGS) de $7 \cdot 10^7$. Cuando las ondas se propagan sobre el mar los que importan son los valores de ε y γ para el agua del mar. Las cifras correspondientes son: $\varepsilon=80$ y $\gamma=10^{10}$. La razón de la densidad de la corriente de conducción a la densidad de la corriente de desplazamiento (en la pág. 335 se dan las fórmulas necesarias) viene expresada por la fórmula

$$\frac{j_{\text{cond}}}{j_{\text{desp}}} = \frac{2}{c}\frac{\gamma\lambda}{\varepsilon} = 0{,}7 \cdot 10^{10}\frac{\gamma\lambda}{\varepsilon}$$

(en el sistema CGS). Para las ondas largas (tomemos, por ejemplo, 2000 m) esta relación es igual en el terreno de bosque a 77, y en la superficie del mar a 1600. El medio puede considerarse buen conductor en ambos casos, y en particular cuando se trata de la propagación sobre el mar. Para las ondas cortas (por ejemplo, para 20 m) la primera cifra cae hasta 0,77, y la segunda, hasta 16. Esto significa que para las ondas cortas el agua del mar continúa siendo en

lo fundamental un medio conductor, pero el terreno de bosque se comporta en un grado considerable como dieléctrico.

Cuando las ondas se propagan sobre una superficie conductora, esta última «no deja» que las ondas se aparten de ella. Las líneas de fuerza eléctricas llegan a la Tierra formando un ángulo recto y se propagan a lo largo de su superficie. Por esto precisamente la onda electromagnética rodea fácilmente la esfera terrestre (en lo que emplea 0,13 s; este tiempo puede determinarse con bastante exactitud y, por consiguiente, también la velocidad de propagación de las ondas radioeléctricas). Esto se refiere a las ondas largas. Las ondas cortas se mantendrán solamente sobre la superficie del mar. En otros lugares pueden comportarse como ondas completamente libres. Cuando se mueve a lo largo de la superficie de la Tierra, la onda penetra dentro de ésta y es absorbida por ella con tanta mayor intensidad cuanto más elevada sea la frecuencia de las oscilaciones.

Toda una serie de notables peculiaridades en el comportamiento de las ondas radioeléctricas se explica por la existencia, en la parte superior de la atmósfera, de una capa que contiene una cantidad considerable de iones y electrones libres (ionosfera). De este modo, el espacio en que se mueve la onda electromagnética nos lo podemos figurar aproximadamente como una capa dieléctrica comprendida entre dos capas conductoras.

La ionización de la atmósfera no es uniforme, es decir, el número de cargas libres por unidad de volumen varía de una capa a otra. Como vimos en el § 125, al aumentar el número de cargas, disminuye el factor de refracción. Y como el factor de refracción del medio conductor es menor que la unidad, la onda que llega del medio dieléctrico a la ionosfera formando cierto ángulo, se desvía alejándose de la normal. Si la ionización aumenta, la desviación aumentará de una capa a otra.

Luego, como muestra la fig. 139, la onda puede salir de la ionosfera y alejarse de la Tierra o continuar doblándose y volver a la Tierra. En términos generales (sin tener en cuenta la heterogeneidad de la ionosfera), la onda vuelve a la Tierra si llega a la ionosfera formando un ángulo mayor que el ángulo de reflexión total:

$$\operatorname{sen}\theta_0 > n = \sqrt{1 - \frac{4\pi N^2 e}{m\omega^2}},$$

en el caso contrario la onda se escapa al espacio extraterrestre. Reflejándose repetidas veces ya en la ionosfera, ya en la superficie de la Tierra, la onda corta es capaz de contornear la esfera terrestre con pérdidas de energía considerablemente menores que las que sufren las ondas largas.

Las ondas ultracortas pasan a través de la capa de cargas libres, por esto no se reflejan en la ionosfera. Esto hace que la radiorecepción por ondas ultracortas sólo sea posible dentro de los límites de la visibilidad directa.

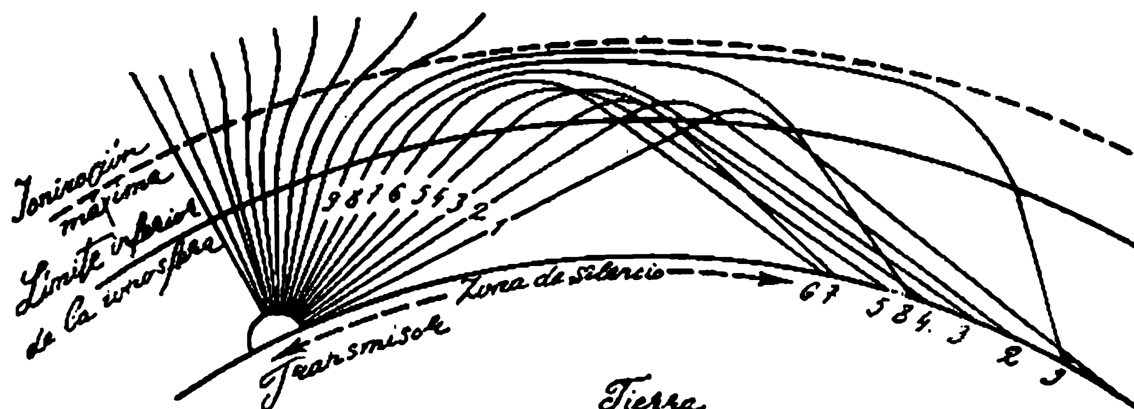


FIG. 139.

Hasta ahora hemos simplificado mucho el cuadro de la atmósfera. Las investigaciones llevadas a cabo demuestran que la distribución de las densidades de las cargas eléctricas libres en la atmósfera se caracteriza por tener varios máximos, de modo que la ionosfera se descompone en varias capas. Estas capas poseen distinta estabilidad en las diversas estaciones del año. Es interesante que la existencia de estas capas está ligada a la actividad del Sol, ya que se observan variaciones del estado de la ionosfera que se corresponden con el ciclo de 11 años de las manchas solares. La ionización de las capas superiores de la atmósfera está ligada indudablemente con la llegada a la Tierra de la radiación cósmica.

Del análisis de las propiedades eléctricas de la ionosfera y de la superficie terrestre, la radiotecnia saca una serie de conclusiones acerca de las condiciones más favorables para la radioemisión y recepción por ondas de diversa longitud. Pero en esto no nos detendremos.

§ 130. Radiolocalización

Una instalación de radiolocalización consta de una parte emisora y otra receptora. El emisor lanza al espacio impulsos de duración a (del orden de microsegundos) con intervalos de diezmilésimas de segundo (λ) (fig. 140). Si en el ángulo sólido «iluminado» por las ondas radioeléctricas hay un objeto capaz de reflejar la onda, ésta se refleja y retorna a la instalación de radiolocalización, la cual recibe la señal reflejada al cabo de un tiempo $\tau=2R/c$ de haber sido lanzado al espacio el impulso correspondiente.

Este tiempo se mide por medio de un oscilógrafo electrónico. La exploración del rayo se sincroniza con el lanzamiento al espacio de los impulsos del emisor. La tensión que se produce en el receptor como resultado de la demodulación de la señal, se transmite al segundo par de placas del oscilógrafo. Entonces en la pantalla del oscilógrafo aparece un «diente» desplazado, con respecto al punto inicial de la exploración, una distancia proporcional al tiempo τ.

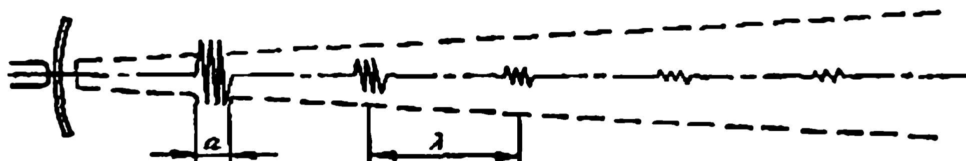


FIG. 140.

Si en el campo visual del localizador cae un objeto en reposo, el «diente» no se moverá en la pantalla del oscilógrafo; en efecto, la sincronización consiste en que el tiempo que dura la exploración se hace igual a una diezmilésima de segundo, es decir, al intervalo de tiempo al cabo del cual se suceden unos a otros los impulsos del emisor. Si el objeto «visto» por el localizador se mueve, también se desplaza el diente que se observa en la pantalla del oscilógrafo.

La técnica moderna de localización está ya muy lejos de este esquema. El rayo electrónico del oscilógrafo da la posibilidad de realizar un movimiento más complejo desde el centro de la pantalla, a lo largo de un radio, hacia el borde de la misma. Al mismo tiempo la línea que describe el rayo electrónico gira lentamente alrededor del centro de la pantalla, de modo análogo a como lo hacen las agujas del reloj.

Esta rotación está sincronizada con la rotación de la antena del radar, de manera que la línea luminiscente tiene la misma dirección que el haz de radio del emisor. Después se introduce una importante modificación en el funcionamiento del oscilógrafo: si el haz de radio no encuentra ningún obstáculo y, por consiguiente, el receptor no recoge el rayo reflejado, la pantalla del oscilógrafo se mantiene oscura. Por el contrario, si el impulso se recibe, en la pantalla resplandece un punto.

De este modo, el cuerpo, encontrado por el haz al explorar el horizonte, se manifiesta por medio de un punto luminiscente en la pantalla del oscilógrafo. En este caso la distancia desde este punto hasta el centro de la pantalla será proporcional a la distancia desde el radar hasta el objeto, y su ángulo acimutal indicará la dirección en que se encuentra dicho objeto.

Las pantallas de oscilógrafo poseen luminiscencia residual. Por esta razón, una vez que aparece un punto luminoso, no desaparece

ni después que el localizador, hecha la exploración, retorna a la misma posición.

Si el punto luminoso se produjo debido a que el haz se reflejó en un objeto en reposo, su imagen no se moverá en la pantalla del oscilógrafo. Pero si el objeto se mueve, en la pantalla se verá su imagen móvil.

En virtud de que los distintos objetos poseen diferentes factores de reflexión, en la pantalla del radar de exploración circular se ve una imagen peculiar del terreno. Los ríos y los lagos aparecen como franjas oscuras (poca reflexión), la tierra, más clara, y los bosques, aún más. Y, como es lógico, los objetos metálicos se «ven» con bastante nitidez.

Usando distintas longitudes de onda se puede variar el carácter de la visibilidad. Así, con la gama de ondas centimétricas se pueden observar bien las nubes. Las ondas más largas no son sensibles a las nubes ni a la lluvia, y los radares que funcionan con ellas sirven para todo tiempo, si no se plantea el problema especial de observar las nubes.

Los principios de la radiolocalización encuentran en la ciencia y la técnica aplicaciones muy diversas. Los radares permiten a los

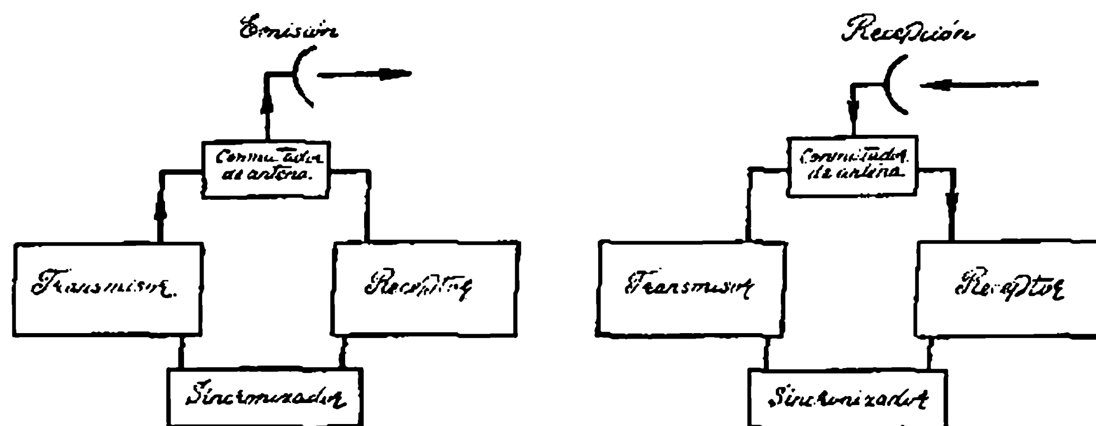


FIG. 141.

aviones efectuar sin dificultad vuelos nocturnos y aterrizar en aeródromos sin iluminación. La radiolocalización tiene una importancia especial para la meteorología; además de descubrir a grandes distancias o de noche las nubes, que tiene gran importancia para componer los partes meteorológicos, pueden seguir a los globos-sondas. Los radares montados en los barcos elevan considerablemente la seguridad de sus movimientos, anulando el peligro de choques fortuitos con obstáculos u otros navíos. Valiéndose de los métodos de la radiolocalización, en la astronomía se hallan las distancias a los meteoritos y se determina su dirección y su velocidad. Las ondas

se reflejan principalmente en las «colas» de los meteoritos, formadas por gases ionizados. Puede efectuarse la radiolocalización de la Luna, el Sol y los planetas. La radiolocalización astronómica o radarastronomía tiene gran importancia práctica, ya que permite crear aparatos de navegación con los cuales sea cual fuere el tiempo y a cualquier hora del día o de la noche se podrá determinar la posición de una nave observando los cuerpos celestes.

A los problemas de la radiolocalización se ha consagrado mucha literatura, y como esta es una cuestión de radiotecnia, y no de física, creemos que con esto queda suficientemente claro el principio en que se basa este magnífico método.

En la fig. 141 se representa el esquema sinóptico de un radiolocalizador.

20

FENÓMENOS DE INTERFERENCIA

§ 131. Composición de las ondas de dos fuentes

Consideremos en primer lugar dos fuentes o focos ideales que emitan ondas esféricas. Ambas fuentes oscilan sincrónicamente. Como sabemos, en este caso, sea cual fuere el tipo de ondas (lo más fácil es demostrar esto con ondas en el agua), se produce un campo característico en el que vemos «surcos» brillantes y oscuros que pasan por los puntos en que las ondas se refuerzan o se debilitan entre sí.

El cálculo de esta figura de interferencias no es difícil. Consideremos un punto cualquiera que se encuentre a la distancia r_1 de una de las fuentes de ondas y a r_2 de la otra. En este caso el reforzamiento máximo se producirá si la diferencia de marcha entre las ondas $r_1 - r_2$ es igual a un número entero de longitudes de onda $n\lambda$. Y, al contrario, la extinción tendrá lugar en los puntos en que la diferencia de marcha sea igual a un número impar de semiondas $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$.

Como sabemos por la geometría analítica, una superficie curva cuyos puntos satisfacen la condición de que la diferencia de las distancias desde ellos a dos focos es una magnitud constante, es un hiperboloide. En la fig. 59 (pág. 129) se representa la sección que pasa por los dos focos de ondas. En esta sección se muestran las hipérbolas, es decir, los lugares geométricos de los puntos en

los cuales las diferencias de marchas a lo largo de la curva tienen un mismo valor.

Veamos ahora (fig. 142) lo que ocurre en una superficie cilíndrica cuyo eje pase por los focos (que siempre suponemos puntuales). En esta «pantalla» la figura de interferencia se manifiesta por medio de un sistema de rectas oscuras y brillantes que se suceden entre sí, ya que todos los puntos del cilindro que se encuentran a una misma altura se hallan en condiciones absolutamente iguales, es decir, en la misma posición con respecto a los focos de radiación. En la línea media del cilindro tendremos una franja brillante, puesto que la distancia a ella desde ambos focos es la misma y las ondas se refuerzan entre sí. Para los puntos que se encuentran a una altura z sobre la línea media, la diferencia de marcha de los rayos r_1-r_2 la podemos representar como $\frac{r_1^2-r_2^2}{r_1+r_2}$. Pero $r_1^2-r_2^2 \approx 2lz$, donde l es la distancia entre los focos.

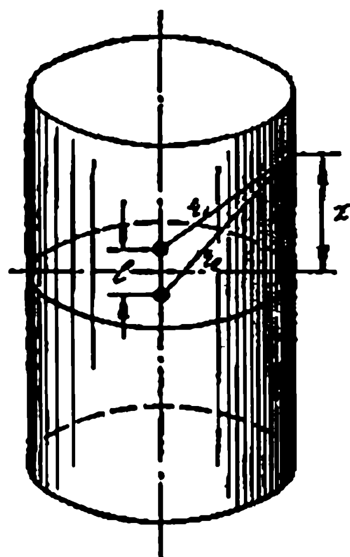


FIG. 142.

Por consiguiente, la condición de la n-ésima franja brillante tendrá la forma

$$\frac{2lz}{r_1+r_2}=n\lambda.$$

Si la pantalla está lejos, para las franjas próximas al centro

$$r_1+r_2 \approx 2R,$$

donde R es el radio del cilindro. Las franjas brillantes pasarán por los puntos z que cumplan la condición

$$\frac{lz}{R}=n\lambda.$$

La distancia entre dos franjas contiguas será $\Delta z=\lambda R/l$.

Ejemplo. Si dos fuentes coherentes (véase el § 132), que se encuentran entre sí a una distancia $l=1$ mm, emiten luz de longitud de onda $\lambda=6000$ Å, en la superficie de un cilindro de radio $R=1$ m, que las circunde, aparecerán franjas de interferencia entre las cuales existirán distancias iguales a $\Delta z=\lambda R/l=0{,}6$ mm.

Si una fuente de luz emite ondas de distinta longitud, la figura de interferencia resultará coloreada, porque las condiciones de máximo serán diferentes para las distintas λ.

Puede interesarnos conocer no sólo la posición que ocupan los máximos y los mínimos de interferencia, sino también la forma que tiene la curva de intensidad transversalmente a las franjas.

Si lz/R es la diferencia de marcha entre las ondas,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{lz}{R}$$

será la diferencia de fases, y la amplitud total en cualquier punto se escribirá de la forma

$$A \cos \omega t + A \cos (\omega t + \delta).$$

Si las amplitudes son iguales, esto da la expresión que estudiamos en la pág. 109, o sea,

$$2A \cos \frac{\delta}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right).$$

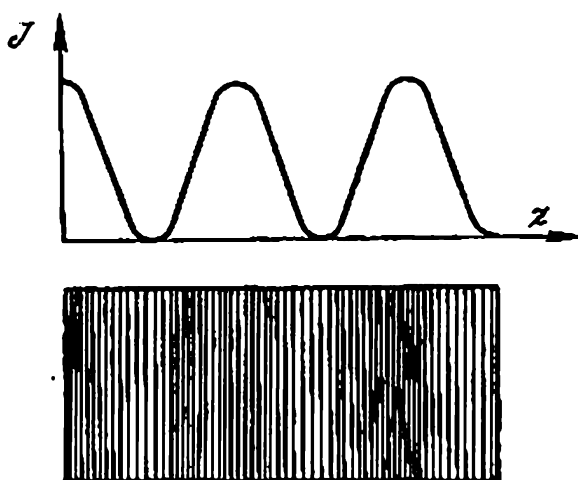


FIG. 143.

La intensidad (cuadrado de la amplitud de la onda) que se mide en la práctica es igual al valor medio de esta expresión tomado durante un período de oscilación. Y como

$$\left[\cos^2 \left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right)\right]_{med} = \frac{1}{2}$$

(véase lo que se dice acerca del cálculo del valor medio en el párrafo siguiente), se tiene que

$$I = 2A^2 \cos^2 \frac{\pi lz}{\lambda R}$$

La curva de intensidad puede construirse en el diagrama en función de la coordenada vertical z (fig. 143).

§ *132. Coherencia*

La composición de las dos ondas descrita en el párrafo precedente puede intentarse realizar por diversos procedimientos y para distintas longitudes de onda. Pueden, por ejemplo, establecerse dos antenas, próximas entre sí, que emitan ondas radioeléctricas; se pueden poner dos lámparas eléctricas, de filamento de caldeo puntual, de manera que estén la una cerca de la otra; finalmente, puede reunirse un rayo incidente consigo mismo, después de reflejado en un espejo. La experiencia demuestra que los fenómenos de interfe-

rencia no se producen en todos los casos. Esto puede aclararse estudiando cómo se componen los campos de dos antenas. Es fácil demostrar que la figura de interferencia se observará únicamente si entre las ondas que se superponen existe una diferencia de fases constante mientras dura la observación. En este caso se dice que las oscilaciones son *coherentes*.

Si la diferencia de fases es fija, la oscilación electromagnética en el punto dado del espacio se produce siempre con la misma amplitud. De este modo, en el punto en que se produce un máximo, habrá siempre un máximo; y el sitio donde las ondas se extinguen entre sí conservará siempre una intensidad nula.

Pero si la diferencia de fases varía desordenadamente, el cuadro será completamente distinto. En un punto dado se producirán durante cierto tiempo oscilaciones de amplitud máxima, en el intervalo siguiente se producirán con amplitud media y después, durante un plazo determinado, las ondas se extinguirán entre sí. Si estos períodos duraran un tiempo conmensurable con las posibilidades prácticas de los instrumentos, podríamos establecer la existencia de un campo de interferencia variable. Pero si las variaciones en la diferencia de fases se suceden con tanta rapidez que los instrumentos no pueden ponerlas de manifiesto, el campo de interferencia no se revela y los instrumentos indican el valor medio de la intensidad. En estos casos se dice que las oscilaciones no son coherentes.

¿A qué será igual la intensidad media que se manifiesta en el espacio en que los campos se superponen? Veámoslo haciendo un cálculo elemental.

La amplitud de la onda resultante en un punto dado, en un instante determinado, puede escribirse de la forma

$$A_1 \cos \omega t + A_2 \cos (\omega t + \delta).$$

La intensidad instantánea es proporcional al cuadrado de esta expresión, es decir, igual a

$$A_1^2 \cos^2 \omega t + A_2 \cos^2 (\omega t + \delta) + 2A_1 A_2 \cos \omega t \cos (\omega t + \delta).$$

La intensidad media de la radiación, con respecto al tiempo (que es la que nos interesa), será

$$I = A_1^2 (\cos^2 \omega t)_{med} + A_2^2 [\cos^2 (\omega t + \delta)]_{med} + \\ + 2A_1 A_2 [\cos \omega t \cdot \cos (\omega t + \sigma)]_{med}.$$

Los valores medios de magnitudes trigonométricas se encuentran con bastante frecuencia en los cálculos físicos. Conviene por esto recordar que el valor medio de sen x y cos x es cero, y el de sen$^2 x$ y cos$^2 x$ es $\frac{1}{2}$, siempre que el argumento x de la función trigonométrica tome con igual probabilidad unos valores cuales-

quiera. El valor medio de una función cualquiera f (x), por el sentido del concepto, es

$$[f(x)]_{med}=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}.$$

Esta fórmula es válida para calcular el valor medio si la variable x toma valores discretos. Pero si la variable x es continua y toma unos valores cualesquiera dentro de un intervalo comprendido entre a y b, la fórmula para el cálculo del valor medio se obtiene del modo siguiente. El intervalo $(b-a)$ se divide en n partes Δx, y multiplicando por Δx el numerador y el denominador de la fórmula anterior, se obtiene

$$[f(x)]_{med}=\frac{f(x_1)\,\Delta x+f(x_2)\,\Delta x+\ldots}{n\,\Delta x}.$$

Pasando al límite, tenemos que

$$[f(x)]_{med}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Con esta fórmula puede calcularse el valor medio de cualquier función de una magnitud aleatoria continuamente variable. Si se calcula el valor medio de una función periódica hay que tomar como límites de integración la magnitud de un período, puesto que el valor medio correspondiente a un período será igual, indudablemente, al valor medio correspondiente a cualquier número de períodos. De este modo, por ejemplo,

$$[\cos^2 x]_{med}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}.$$

Escribamos la fórmula de la intensidad de la forma

$$I=A_1^2(\cos^2(\omega t))_{med}+A_2^2[\cos^2(\omega t+\delta)]_{med}+$$
$$+A_1A_2[\cos 2\omega t+\delta)]_{med}+A_1A_2(\cos\delta)_{med}.$$

Haciendo uso de lo que sabemos acerca de los valores medios de $\cos x$ y $\cos^2 x$, obtenemos que: si la diferencia de fases de las dos ondas varía desordenadamente, es decir, si las oscilaciones no son coherentes,

$$I=\frac{1}{2}(A_1^2+A_2^2);$$

y, por el contrario, si la diferencia de fases es fija, las oscilaciones son coherentes e

$$I=\frac{1}{2}(A_1^2+A_2^2+A_1A_2\cos\delta)$$

o, cuando las amplitudes son iguales,

$$I=2A\cos^2\frac{\delta}{2},$$

que es la fórmula de la interferencia que vimos en el párrafo anterior.

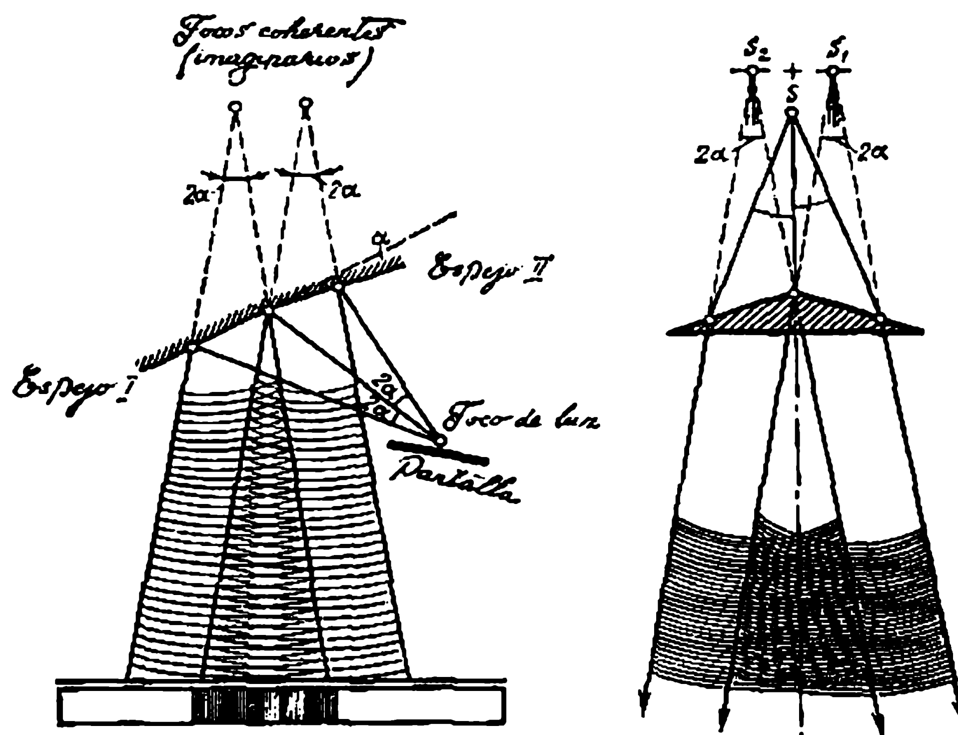


FIG. 144.

La coherencia de las ondas radioeléctricas emitidas por antenas vecinas puede evitarse o crearse por procedimientos técnicos.

En lo tocante a las oscilaciones luminosas, ante todo, hay que distinguir la luz de las fuentes ordinarias de la luz de los lásares. En las fuentes ordinarias las radiaciones de los distintos átomos no concuerdan entre sí. Las fases de las ondas emitidas por distintos átomos están desplazadas en magnitudes aleatorias. Es completamente natural que dos focos de luz, cuyas dimensiones se aproximen tanto como se quiera a las de un punto, no producirán un campo de interferencias. Sólo hay un procedimiento de crear oscilaciones luminosas coherentes: «desdoblando» una misma onda luminosa.

La figura 144 representa dos procedimientos para obtener fuentes coherentes artificiales. Dos espejos *I* y *II* ligeramente inclinados el uno con respecto al otro, o un doble prisma (biprisma) son las fuentes de ondas de dos focos virtuales. En cualquier punto del campo de interferencias puede colocarse una pantalla en la cual se observarán las franjas de interferencia. Los razonamientos teóricos antes expuestos son totalmente aplicables en estos casos; el paso de las franjas viene determinado por la distancia entre las imágenes virtuales del foco luminoso y por las distancias desde ellas hasta el punto de observación.

La causa de que las dos partes de un rayo «desdoblado» sean coherentes es evidente. Entre un par de átomos cualesquiera de la verdadera fuente no existen relaciones de coherencia. Pero al dividir el rayo en dos partes, creamos la posibilidad de que la radiación de cada átomo interfiera consigo misma.

Los múltiples dispositivos que existen para observar la interferencia valiéndose de fuentes de luz ordinaria difieren entre sí por los procedimientos de desdoblar el rayo de luz por reflexión o refracción y la ulterior superposición de las partes de la onda desdoblada en la región del campo de interferencias.

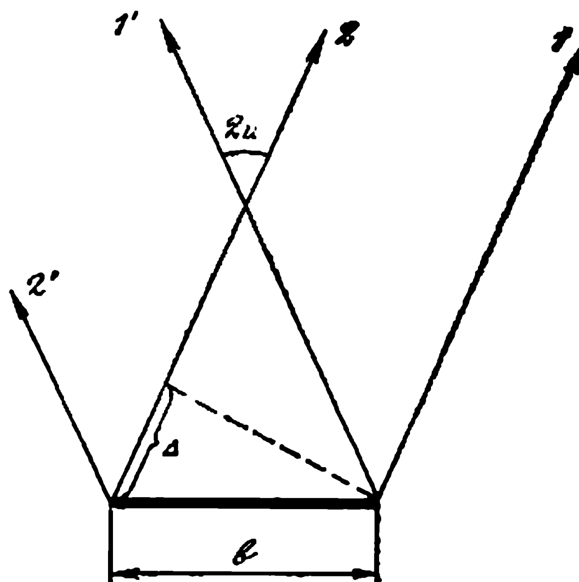


FIG. 145.

El tamaño de la fuente de luz influye sensiblemente en la coherencia de sus rayos «desdoblados». Supongamos que la fuente de luz (fig. 145) tiene el tamaño b y que en la creación del campo de interferencias toman parte los rayos que salen constituyendo el ángulo sólido $2u$. Los rayos del tipo 1, 1' parten de un mismo átomo y, por consiguiente, son coherentes. Esto mismo puede decirse de los rayos 2, 2'. Supongamos ahora que queremos observar la interferencia superponiendo los campos de los rayos 1, 2 y 1' 2'. Para que se produzca la interferencia es necesario que los campos de los rayos coherentes 1, 1' y 2, 2' se mantengan el uno al otro. Pero las diferencias de marchas $\Delta = b$ sen u que existen entre 1', 2' y 1 y 2 impiden que esto ocurra. La interferencia sólo es posible si se da la condición b sen $u \leqslant \lambda/2$.

Está claro que sólo pueden interferir las ondas luminosas de igual longitud. Por consiguiente, la intensidad de una franja de interferencia vendrá determinada no por la potencia integral de la radiación, sino por la potencia de la radiación de la longitud de onda dada.

Los experimentos para obtener interferencias con luz ordinaria se ven muy limitados por la longitud de coherencia del rayo de luz. El problema consiste en que el átomo radia cada vez durante un tiempo del orden de 10^{-8} s. Teniendo en cuenta la velocidad de la luz, no es difícil comprobar que el «tren» de ondas emitido tendrá una longitud del orden de un metro. Por lo tanto, conservando el carácter rigurosamente monocromático, la longitud de coherencia de

la luz visible será del orden de un metro. Si se utiliza un foco luminoso como la lámpara de vapor de mercurio a alta presión, la longitud de coherencia será tan sólo del orden de un milímetro. Esto significa, que la radiación de un mismo átomo sometida a desdoblamiento y reunida después en un punto, con una diferencia de marchas mayor de un milímetro (es decir, mayor que la longitud de coherencia), ya no producirá el fenómeno de la interferencia.

La emisión estimulada del laser, cuyo origen se estudia en la pág. 471, es idealmente monocromática: su intervalo de frecuencias es millones de veces menor que la frecuencia de la luz. Lo principal es que todos los átomos del laser crean emisión estimulada en la misma fase. Por consiguiente, en este caso, las radiaciones de átomos distintos son capaces de interferir entre sí. Carece de importancia la longitud finita del tren de ondas. Los sucesivos actos de emisión se producen en una misma fase. Por esta razón pierde su sentido la longitud de coherencia, y la luz desdoblada de un laser interferirá incluso en el caso en que una parte del rayo recorra un camino que sea decenas y centenares de metros más largo que el recorrido por la otra parte. El desdoblamiento de un rayo de laser para conseguir interferencias no exige ni siquiera parte de las medidas que había que tomar para observar la interferencia con luz ordinaria. Basta colocar el laser detrás de una pantalla con dos rendijas y crear el campo común de la luz que sale por ambas rendijas.

La extraordinaria potencia de la luz del laser permite realizar con facilidad experimentos de interferencias que antes parecían extraordinariamente difíciles o imposibles.

§ 133. Interferencia en una lámina

Consideremos la reflexión y refracción de la luz que incide sobre una lámina plana de espesor d (fig. 146).

Supongamos que una onda plana incide sobre la lámina formando un ángulo i con la normal. El rayo de luz se refleja y se refracta. El rayo refractado incide sobre la cara inferior de la lámina y también se refleja y se refracta. Como resultado se produce una multitud de rayos paralelos al reflejado directamente, y otra multitud de rayos paralelos transmitidos al segundo medio. Todos estos rayos son coherentes y entre ellos existe diferencia de fases; por consiguiente se dan las condiciones para que interfieran tanto los rayos reflejados como los transmitidos.

Como sabemos (véase la pág. 352), el factor de reflexión, por lo menos cuando la incidencia es vertical, es pequeño. En este caso la intensidad de cada rayo «siguiente» será mucho menor que la del

anterior. Por ejemplo, si el factor de reflexión es del 5%, el primer rayo reflejado tendrá la intensidad 0,05 I_0. El segundo rayo reflejado sufre dos refracciones y una reflexión. Su intensidad será, pues, 0,95·0,95·0,05 I_0=0,045 I_0. De este modo, las intensidades de los dos primeros rayos serán bastante próximas entre sí. Pero el

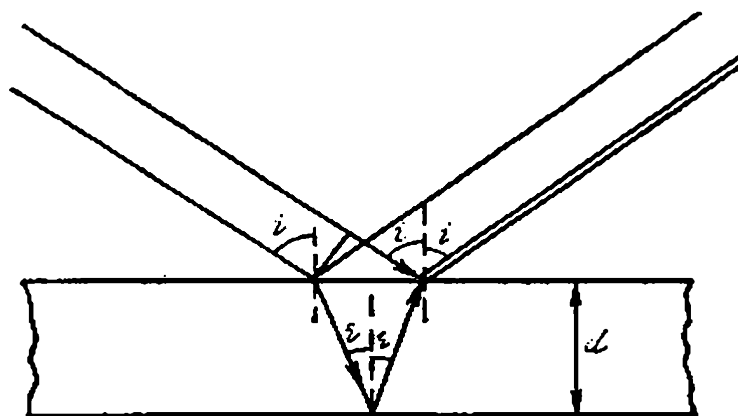


FIG. 146.

tercer rayo será ya mucho más débil, puesto que sufre tres reflexiones y dos refracciones. Su intensidad será igual a 0,95·0,95·0,05×0,05·0,05 I_0, es decir, será *cuatrocientas* veces más débil que el rayo precedente.

En las condiciones de un factor de reflexión pequeño, el fenómeno se reduce a la observación de la interferencia de los dos primeros rayos.

En cuanto a los rayos transmitidos, en las condiciones de un factor de reflexión pequeño no se observa su interferencia, ya que el segundo rayo es ya cuatrocientas veces (para el mismo ejemplo numérico) más débil que el primero, el tercero, cuatrocientas veces más débil que el segundo y así sucesivamente. Sin embargo no es difícil crear unas condiciones para el experimento en las cuales, tanto en la luz reflejada como en la transmitida, se produzcan multitud de rayos de interferencia.

Si sobre la lámina plana incide una onda monocromática, la figura del campo de interferencias vendrá determinada por la diferencia de fases entre el primer rayo reflejado y el segundo.

Partiendo de la fórmula de la onda

$$A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right),$$

es evidente que la fase de una onda que recorra el camino x con la velocidad v variará en $\omega \frac{x}{v}$ ó $\frac{2\pi}{\lambda} x$, donde λ es la longitud de la onda en el medio. Llamando λ_0 a la longitud de la onda en el vacío

y teniendo en cuenta que el factor de refracción es igual a $n=\frac{\lambda_0}{\lambda}$, podemos escribir la variación de fase como $\frac{2\pi}{\lambda_0}nx$. El producto nx suele recibir el nombre de trayectoria óptica de la onda. Si la onda atraviesa en su recorrido varios medios, su fase varía en $\frac{2\pi}{\lambda_0}S$, donde $S=(n_1x_1+n_2x_2+\ldots)$ es la trayectoria óptica.

La diferencia de fases δ de las ondas que interfieren, que determina la intensidad del campo resultante, es

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta.$$

es decir, está definida por la diferencia óptica de las trayectorias S' y S'' de estas ondas $\Delta=S'-S''$.

El cálculo de Δ para el caso que nos interesa se hace valiéndose de la fig. 146. Lo más cómodo es expresar Δ en función del ángulo de refracción r, del espesor de la lámina d y del índice de refracción n. Como puede verse en la figura,

$$\Delta=2dn\cos r.$$

Pero además debe tomarse en consideración el salto de fase que se produce durante la reflexión (véase la pág. 352). En este sentido el primer rayo difiere del segundo, ya que el primero se refleja en la cara externa de la lámina, mientras que el segundo lo hace en la interna. Por esto, el vector eléctrico de uno de ellos experimenta un salto de fase de 180°, mientras que el segundo, no. Por consiguiente, la diferencia de fases resultante será:

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda_0}2dn\cos r\pm\pi.$$

El máximo de la interferencia se observa cuando se da la condición $\delta=m\cdot2\pi$, siendo m un número entero; y el mínimo, cuando se da la condición $\delta=m\cdot\pi$. Por lo tanto,

la condición de máximo es: $2dn\cos r=m\lambda_0\pm\frac{\lambda_0}{2}$;

y la condición de mínimo: $2dn\cos r=m\lambda_0$

De este modo, en dependencia de λ, n, d y r, la interferencia reducirá a cero o a un máximo la intensidad de la onda reflejada en la lámina. En la experiencia ideal realizada con un rayo monocromático, variando, por ejemplo, el ángulo de incidencia, deberíamos fijar la extinción y aparición periódica del rayo reflejado. En el experimento análogo hecho con un rayo de luz blanca, la lámina debe pasar sucesivamente por todos los colores del iris.

§ 134. *Franjas de igual espesor y franjas de igual inclinación*

En la condición de extremo $2\,dn\cos r = m\lambda$ figuran varios factores. La variación simultánea de todos ellos puede conducir a un resultado confuso. El fenómeno se observa con mayor claridad cuando se puede considerar que todos los parámetros menos uno son invariables.

Si la lámina tiene el espesor d variable, el factor de refracción es constante, y el ángulo de incidencia (y, por consiguiente, el de refracción) es prácticamente el mismo para la parte de la lámina que se considera, la interferencia se manifestará en forma de las llamadas *franjas de igual espesor*. Todos los puntos de la lámina que posean el mismo espesor d se encontrarán en las mismas condiciones. Por esta razón si la lámina no es plana aparece en ella un sistema de franjas oscuras y claras (o irisadas, si la luz es blanca) que caracterizan los puntos de igual espesor. En esto consiste la explicación de las manchas coloreadas que vemos de ordinario en las películas de petróleo o de aceite que flotan en el agua. Si la lámina tiene forma de cuña, las franjas de igual espesor serán rectas. Estas franjas son fáciles de observar en las películas de jabón. En una película vertical, el jabón escurre hacia abajo y la película se hace más delgada en sus partes altas. En este caso aparecen en la película franjas horizontales.

Si la luz incide verticalmente sobre la lámina, $\cos r \approx 1$; las franjas aparecen en aquellos sitios de la lámina cuyos espesores d satisfacen la relación $2\,dn = m\lambda_0$.

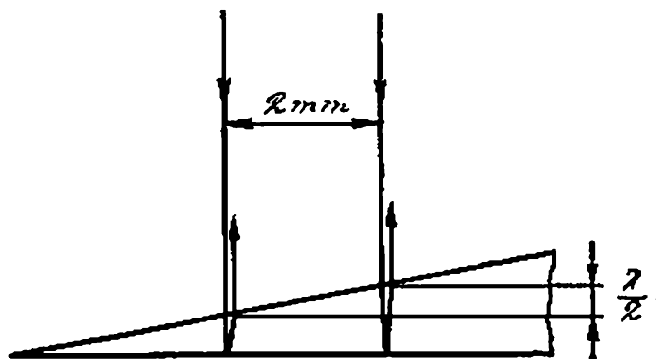


FIG. 147.

Dos franjas contiguas corresponderán a espesores que difieran el uno del otro en $\frac{\lambda_0}{2n} = \frac{\lambda}{2}$, es decir, en media longitud de onda. Por lo tanto, las franjas luminosas de igual espesor revelan irregularidades del orden de décimas de micra que existen en los espesores de las láminas.

Si de un punto a otro el espesor varía muy lentamente, las franjas pueden estar a una distancia bastante grande unas de otras. Así, por ejemplo, en una película jabonosa escurrida puede formarse una cuña cuyo ángulo de abertura sea de 0,5 minutos de arco; en este caso, como no es difícil de calcular valiéndose de la fig. 147,

ángulos del orden de centésimas de radián impedirá ya el poder observar las franjas de igual espesor.

Pero incluso cuando la forma sea perfecta, los experimentos con láminas relativamente gruesas no crean figura de interferencia debido a que la longitud de coherencia es limitada.

Para la luz de laser desaparece esta dificultad en la observación de la interferencia producida por las láminas gruesas.

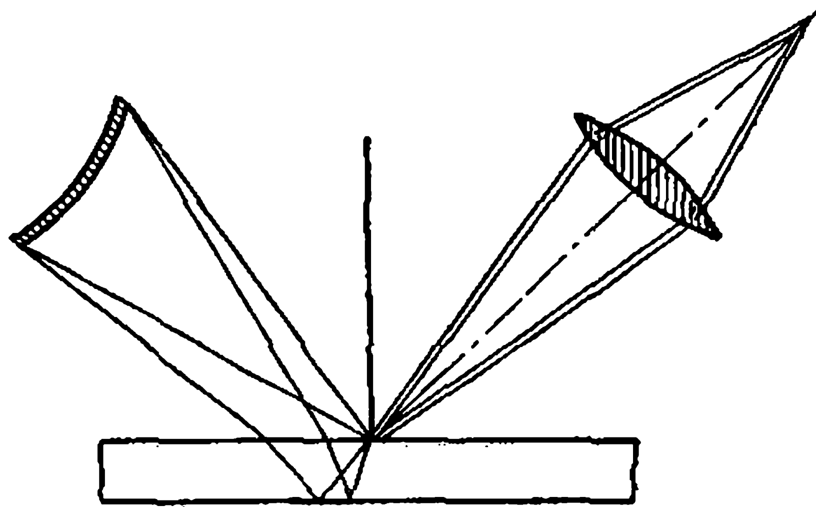


FIG. 148.

Pasemos ahora a analizar otro tipo de franjas, llamadas *franjas de igual inclinación*. Se observan en las láminas de caras planas y paralelas (d es igual en todos los puntos de la lámina) cuando sobre ellas incide un haz de luz cuyos ángulos de incidencia forman un conjunto continuo (fig. 148).

Del haz de rayos reflejados, presentes en el ángulo sólido, podemos siempre destacar aquellos que se encuentran en las generatrices de un mismo cono cuyo eje sea la normal a la lámina. Los rayos que descansan en este cono tienen un mismo valor de r. Estos rayos dan líneas de igual inclinación.

Conviene subrayar la diferencia que existe en el procedimiento de observar las líneas de igual espesor y las líneas de igual inclinación. Las líneas de igual inclinación se observan en el infinito, por esto hay que interponer una lente en el camino que siguen los rayos; las curvas de igual inclinación se observarán en su plano focal. En cuanto a las líneas de igual espesor, si la incidencia es normal sobre una lámina cuneiforme, se observan a simple vista en la superficie de dicha lámina. Pero si la luz incide sobre esta lámina formando ángulo, las líneas de igual espesor sólo se observan en la superficie de la cuña si se trata de películas muy delgadas. En el caso contrario la figura de interferencia se observa en dos planos

situados, uno sobre la cuña y otro debajo de ella, a la distancia $d \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} \alpha}$ (α es el ángulo de la cuña). Para deducir esta fórmula, cosa que recomendamos hacer al lector, hay que construir el rayo que incide sobre la superficie de la cuña formando el ángulo i, y los rayos reflejados en las caras superior e inferior de la misma cuña. El plano de observación de la figura de interferencia pasará por el punto de intersección de las prolongaciones de los rayos reflejados. La fórmula que hemos dado es la de la cuña de aire.

§ 135. Aplicaciones prácticas de la interferencia

Los métodos de interferencia se utilizan mucho para medir pequeñas distancias o pequeñas variaciones de distancias. Estos métodos permiten notar variaciones del espesor menores que unas centésimas de la longitud de la onda luminosa. En las medidas interferométricas de las irregularidades de la superficie de un cristal se consigue una exactitud del orden de 10^{-7} cm.

Muchas de las aplicaciones se basan en la utilización del método de las curvas de igual espesor. Este método está muy difundido en la industria óptica. Si, por ejemplo, hay que comprobar la calidad de la superficie de una lámina de vidrio, se recurre a la observación de las franjas de igual espesor de la cuña de aire creada por la lámina que se ensaya y una lámina patrón de superficie idealmente plana. Si estas dos láminas se oprimen por uno de sus bordes, se forma una cuña de aire. Si ambas superficies son planas, las líneas de igual espesor serán rectas paralelas.

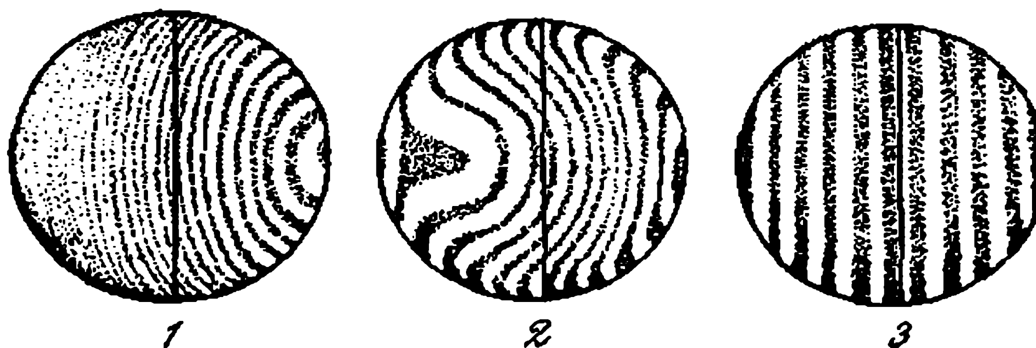


FIG. 149.

Figurémonos que la lámina que se ensaya tiene una cavidad o una prominencia. En este caso las líneas de igual espesor se torcerán y rodearán el lugar defectuoso. Si se varía el ángulo de incidencia de la luz, las franjas se mueven hacia un lado o hacia otro, dependiendo de que si el defecto es una prominencia o una cavidad. En la fig. 149

se muestra el aspecto que ofrece el campo visual del microscopio en estos casos. Los primeros dos dibujos corresponden a muestras defectuosas. En el primero el defecto se encuentra en la parte derecha junto al mismo borde, y en el segundo, en la parte izquierda. El tercer dibujo corresponde a una muestra sin defectos.

Este mismo método puede aplicarse para medir con bastante exactitud el coeficiente de dilatación. Con este fin hay que crear un espacio de aire entre la superficie del objeto que se analiza y un plano invariable. Si el objeto se dilata, el espesor de la capa de aire comienza a variar. Las franjas de igual espesor entran en movimiento. Si una de las franjas se desplaza y su lugar lo ocupa la siguiente, el espesor de la capa de aire habrá variado en este punto en $\lambda/2$.

Si, como se hace de ordinario, la medida se realiza con luz monocromática, las franjas se ven nítidamente y un desplazamiento del orden de la centésima parte de la distancia entre ellas puede medirse.

Medidas exactas del índice de refracción de una sustancia se pueden llevar a cabo con los llamados refractómetros de interferencia. En estos aparatos se observa la interferencia entre dos rayos luminosos alejados entre sí lo más posible (fig. 150). Para esto se

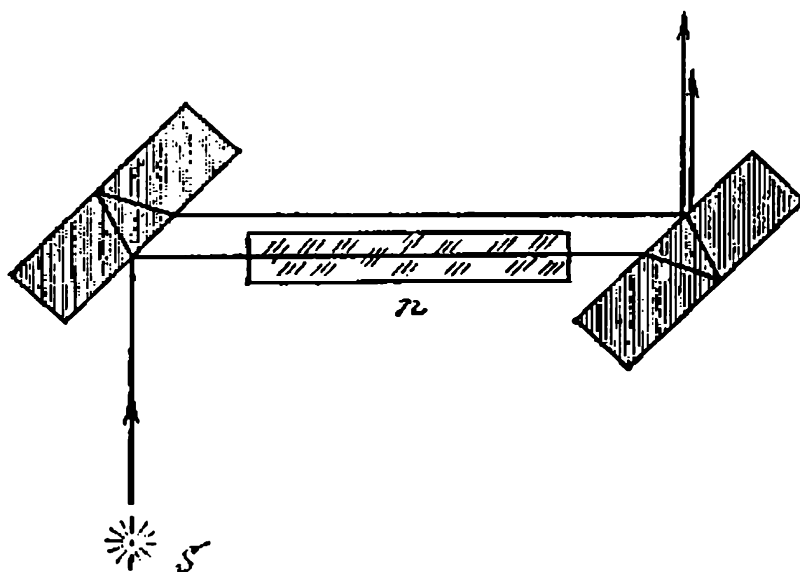


FIG. 150.

forma una lámina suficientemente gruesa y se elige el ángulo de incidencia más ventajoso (para el vidrio ordinario este ángulo es de 50°). Los rayos que pasan de una lámina a otra están separados y en la trayectoria de uno de ellos se puede colocar la sustancia que se ensaya. Con esto varía la trayectoria óptica de uno de los rayos y, por lo tanto, la diferencia de los caminos recorridos por los rayos que

interfieren a la salida. Si las láminas del interferómetro son exactamente iguales y están colocadas con un paralelismo perfecto, los dos rayos que interfieren tienen el mismo recorrido y se refuerzan el uno al otro. Cuando las láminas se inclinan se crea una diferencia de marchas y la claridad del campo visual variará.

Esto ocurre cuando se opera con un haz de rayos idealmente paralelos. Pero si sobre la lámina incide un haz ligeramente divergente, en el campo visual del anteojo aparece un sistema de franjas de igual inclinación. En este caso resulta más cómodo determinar la variación de la diferencia óptica de marcha contando las franjas de interferencia que se ven pasar por el encruzamiento.

Supongamos que en el camino a recorrer por uno de los rayos se ha colocado un cuerpo de longitud l y factor de refracción n. Si el factor de refracción del medio es n_0, la diferencia óptica de marcha variará en $\Delta = l\ (n - n_0)$. En este caso ante el ocular del anteojo deberán pasar Δ/λ franjas. No es difícil valorar la exactitud de este método si se indica que el desplazamiento de 0,1 franja se percibe fácilmente. Con este desplazamiento $\Delta = 0{,}1\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ cm, lo que en una longitud $l = 10$ cm permite registrar una variación del factor de refracción de $0{,}5 \cdot 10^{-6}$.

Para las mediciones exactas de longitudes, así como para determinar la velocidad de la luz (véase también la pág. 441) se utiliza el conocidísimo interferómetro de Michelson (fig. 151). En este

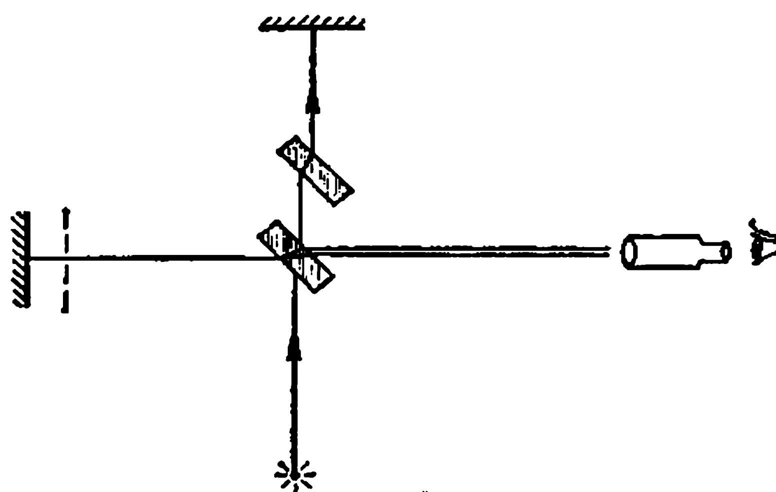


FIG. 151.

aparato un haz de rayos paralelos de luz monocromática incide sobre una lámina de vidrio de caras planas y paralelas recubierta por una parte con una capa semitransparente de plata. Este lámina está situada formando un ángulo de 45° con el rayo que proviene de la fuente de luz y lo divide en dos, uno de los cuales sigue paralelo al rayo incidente (es decir, lo continúa), y el otro sale perpendicular-

mente (hacia la izquierda). Los rayos desdoblados inciden sobre sendos espejos formando ángulos de incidencia nulos y retornan a los mismos puntos de la lámina semitransparente de donde partieron. Cada rayo, después de volver del espejo, se desdobla en la lámina. Una parte de la luz retorna a la fuente, y la otra se desvía hacia la derecha y entra en el anteojo. Como resultado de esto, en el campo visual del anteojo se observan dos rayos coherentes que interfieren. En la figura puede verse que, después del primer desdoblamiento en la capa semitransparente, el rayo que viene del espejo que se encuentra enfrente del anteojo pasa dos veces por la lámina de vidrio recubierta de plata. Por esto, para conseguir que los recorridos ópticos sean iguales, el rayo que viene del otro espejo se hace pasar por una lámina compensadora idéntica a la primera, pero sin capa semitransparente.

Por el anteojo se observarán las líneas de igual inclinación (anillos circulares) correspondientes a la interferencia que tiene lugar en la lámina de aire, cuyo espesor es igual a la diferencia de distancias desde la capa semitransparente a los espejos. El desplazamiento de uno de los espejos en un cuarto de longitud de onda corresponderá al paso de un máximo a un mínimo, es decir, el desplazamiento de la figura en medio anillo. Esto puede notarlo claramente el observador. De este modo, utilizando rayos violetas, la sensibilidad del interferómetro es de más de 1000 Å=0,1 micra.

Una aplicación interesante del interferómetro de Michelson es el microinterferómetro creado por el físico soviético V. P. Linnik. El principio en que se basa su esquema consiste en que uno de los espejos del interferómetro se sustituye por el objeto a analizar. En el plano de la imagen se observan las líneas de igual espesor. Piezas del tamaño de 0,1 micra dan una transición clara de la brillantez máxima a la mínima. El microinterferómetro se hace generalmente en forma de accesorio para un microscopio ordinario y se enrosca al tubo de éste en vez del objetivo. Para la ciencia tienen mucha importancia los microscopios de interferencia, cuya idea está próxima a la del microinterferómetro (en el microscopio, la interferencia no se efectúa en el plano de la imagen, sino ante un objetivo ordinario, es decir, la imagen de la interferencia tiene las mismas dimensiones que el microobjeto). El microscopio de interferencia de dos rayos no ofrece ventaja en los aumentos. Su valor reside en otra propiedad. Entre los objetos de observación microscópica se encuentran con extraordinaria frecuencia los que son casi transparentes o aquellos cuya transparencia varía poco en toda su superficie. Los detalles de estos objetos sólo pudieron hacerse visibles tiñéndolos artificialmente: los diversos elementos estructurales retienen de distinto modo el tinte. Pero este procedimiento es poco aplicable a los microorganismos vivos. Las posibilidades del microscopio de

interferencia se ilustran con la fig. 152, que representa una microfotografía a 300 aumentos de la sangre de una rana.

Entre los inconvenientes de este método figuran las grandes pérdidas de luz en el dispositivo interferencial y la considerable complicación del sistema óptico del microscopio.

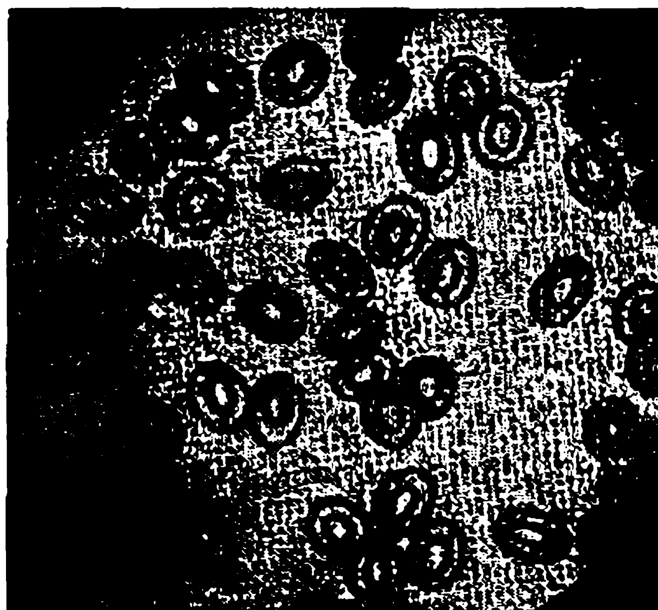


FIG. 152.

Una nueva elevación de la sensibilidad de los métodos interferenciales y, por consiguiente, nuevos éxitos en la microscopia de interferencia se pueden obtener pasando de los interferómetros de dos rayos a los de múltiples rayos. El problema está en que, en los interferómetros de dos rayos, la iluminación de la pantalla varía proporcionalmente al factor $(1+\cos kh)$, donde h es la desviación a lo largo de la pantalla. Debido a la suavidad de la transición de un máximo de iluminación a un mínimo, no se consigue registrar con seguridad un pequeño desplazamiento de las franjas de interferencia. Los interferómetros de múltiples rayos mejoran considerablemente los resultados. Como ejemplo de interferómetro de múltiples rayos estudiaremos el de Fabry y Perrot.

El interferómetro de Fabry y Perrot (fig. 153) consta de dos láminas de vidrio o de cuarzo, bastante gruesas, recubiertas cada una de una capa semitransparente de plata. Las superficies metalizadas de estas láminas están enfrentadas entre sí y son rigurosamente paralelas. El espacio entre las láminas está lleno de aire. Cuando un haz de luz incide sobre el interferómetro, al llegar a cada uno de los

recubrimientos semitransparentes, se desdobla en un haz transmitido y otro reflejado. Como resultado de esto, tanto en la luz transmitida como en la reflejada se obtiene un conjunto de haces luminosos coherentes cuya intensidad decrece en progresión geométrica (véase la pág. 373), mientras que las fases se desplazan según una

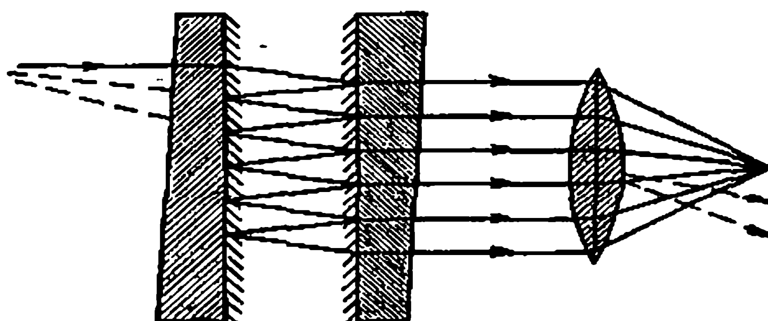


FIG. 153.

progresión aritmética. Para conseguir que sea posible la interferencia de un gran número de rayos hay que hacer que las amplitudes disminuyan poco en las sucesivas reflexiones. Esto se logra en virtud de que el recubrimiento metálico de las láminas tiene un factor de reflexión de 0,9 o aún mayor. En estas condiciones las intensidades de los rayos en la luz transmitida serán bastante pequeñas, pero en cambio variarán poco de un rayo a otro, lo que hace posible que un gran número de rayos (hasta 10 ó 15) tomen parte en la creación de cada máximo de iluminación.

La figura de interferencia se obtiene en la forma de los anillos de igual inclinación ordinarios, pero con una diferencia muy importante: los máximos principales, definidos por la condición $2dn \times \times \cos \alpha = m\lambda$, se contraen ahora fuertemente y su intensidad supera en decenas la del fondo que hay entre ellos. Por esto la figura de interferencia adquiere la forma de franjas brillantes bastante estrechas separadas por anchos espacios oscuros. El desplazamiento de un estrecho máximo de este tipo puede registrarse con mucha más exactitud que la de las franjas en el interferómetro de dos rayos. Un estrechamiento análogo de los máximos se produce cuando aumenta el número de rendijas de una red de refracción.

De esta forma los aparatos de múltiples rayos elevan sensiblemente la sensibilidad de los métodos interferenciales. Estos sistemas resultan ser insustituibles cuando se analiza con luz reflejada la estructura vertical de la superficie de un objeto. El aumento de los detalles en sentido vertical puede alcanzar a 400 000, lo que permite resolver con seguridad pormenores cuyas dimensiones sean del orden

de 5—10 Å, es decir, ¡de varios espacios interatómicos! De ejemplo de fotografía de este tipo puede servir la del crecimiento en espiral de un cristal que se inserta en la pág. 716.

En la actualidad los interferómetros que funcionan con focos de luz natural son sustituidos por los que utilizan laser. La ventaja de estos últimos es evidente: su luz es de una potencia incomparablemente mayor, rigurosamente monocromática, con haces idealmente paralelos y longitud de coherencia ilimitada.

Por medio de lásares se pueden hacer medidas con el telescopio de 200 pulgadas valiéndose de un interferómetro en que uno de los brazos tiene decenas de metros de longitud, y el otro, solamente unos centímetros.

Los interferómetros de laser que se utilizan para comprobar la esfericidad de las lentes pueden fabricarse con una sola superficie de comparación, mientras que si se empleara luz ordinaria, al variar el radio de la lente a comprobar, habría que cambiar también el patrón (ya que sería imposible trabajar con una diferencia de marcha grande). Sin hablar ya de que las figuras de interferencia son ahora incomparablemente más claras y, por lo tanto, se analizan con mayor facilidad y precisión.

La posibilidad de prescindir de la compensación del recorrido óptico de uno de los rayos permite fabricar interferómetros de un tipo completamente nuevo. Resulta posible observar los desplazamientos de las presas, las derivas geológicas y las oscilaciones de la corteza terrestre.

Se sabía desde hace tiempo que, midiendo la velocidad con que se mueven los anillos de interferencia, se puede calcular la velocidad de uno de los espejos, en virtud del efecto Doppler (véase la pág. 135). Valiéndose de la luz de un laser y haciendo que se refleje en objetos muy alejados e interfiera después con la inicial, puede medirse exactamente la velocidad con que se mueve un blanco lejano.

21

DISPERSIÓN

§ 136. Radiación secundaria

Toda molécula sometida a la acción de una onda electromagnética se convierte en emisor secundario de ondas electromagnéticas. Por la acción de la fuerza eléctrica, la nube electrónica se desplaza con respecto a los núcleos atómicos y la molécula adquiere un momento de dipolo que varía con el tiempo teniendo la misma frecuen-

cia que la onda incidente. El comportamiento de esta molécula no difiere en nada del de un dipolo elemental, del cual ya tratamos en el cap. 20. La intensidad de la onda secundaria vendrá expresada por la fórmula dada en la pág. 343 (la intensidad es $\sim \frac{\omega^4}{R^2}\,\mathrm{sen}^2\,\theta$), y la distribución de intensidad de la radiación secundaria en el espacio tendrá el carácter que representa la fig. 133.

En una serie de casos, a los que nos referiremos más adelante, el fenómeno de la radiación secundaria ocasiona diversos fenómenos de dispersión de las ondas electromagnéticas. Se entiende por dispersión, todo fenómeno de propagación de ondas electromagnéticas que no encuadre en los conceptos de refracción, reflexión y propagación rectilínea.

La fórmula de la intensidad dada anteriormente es correcta para todas las ondas electromagnéticas. Sin embargo, la fuerte dependencia de la frecuencia de la radiación indica que los efectos de dispersión de la onda por una molécula se hacen sensibles cuando las ondas no son demasiado largas. La intensidad de la dispersión de las ondas de la luz visible es ya suficiente para producir efectos importantes.

La longitud de una onda luminosa es centenares y millares veces mayor que las dimensiones de las moléculas ordinarias. Por esta razón el campo exterior hace que todos los electrones de la molécula oscilen en una misma fase. Para las ondas luminosas, para las ultravioletas e incluso para los rayos X muy blandos (es decir, de onda larga), la molécula se comporta como un dipolo eléctrico elemental.

El cuadro cambia considerablemente si se trata de rayos X cuya longitud de onda sea del orden de 1Å. En este caso las dimensiones de la molécula son ya mayores que la longitud de la onda y distintas partes de la nube electrónica de la molécula oscilan en fases distintas. Para calcular la intensidad de la onda dispersada hay que tener en cuenta los fenómenos de interferencia que se producen entre las ondas dispersadas por las distintas partes de la molécula.

Este cálculo, en principio, no ofrece dificultad. En primer lugar hay que dividir la nube electrónica de la molécula en pequeños volúmenes Δv_k. Las dimensiones de cada uno de estos volúmenes deben ser mucho menores que la longitud de la onda. En este caso los electrones que haya en dicho volumen dispersarán en una misma fase. Si llamamos ρ a la densidad de la nube electrónica, en el volumen Δv_k habrá $\rho\Delta v_k$ electrones. La amplitud de la onda secundaria creada por el volumen k-ésimo será proporcional a $\rho\Delta v_k$. Las amplitudes de dispersión deben componerse teniendo en cuenta la diferencia de fases entre las ondas elementales, y la suma de las amplitudes debe elevarse al cuadrado. La distribución de la intensidad

de la onda dispersada diferirá considerablemente de la figura de radiación de un dipolo. Esto es comprensible, ya que existirán direcciones en que las ondas elementales, dispersadas por determinados volúmenes, se reforzarán entre sí, es decir, actuarán en fase, y, al contrario, habrá otras direcciones en las cuales las ondas elementales se debiliten unas a otras. Una consecuencia importante de este tipo de cálculos es la siguiente: cuando existe interferencia entre las ondas elementales que parten de los distintos volúmenes de la partícula, las ondas que van hacia otras se debilitan unas a otras y las que van hacia adelante se refuerzan entre sí.

Hasta ahora hemos hablado de la radiación secundaria de la molécula, pero es muy frecuente que el papel de radiador secundario lo desempeñe una partícula mayor, compuesta por un gran número de moléculas. Esta puede ser una partícula de polvo, una partícula coloidal, una gota de niebla, un cristalito pequeñísimo, una partícula de humo, una gran molécula proteínica, etc. El carácter de la dispersión de las ondas por las partículas vendrá determinado por la razón de su dimensión a la longitud de la onda magnética excitatriz. Si la partícula es pequeña en comparación con la longitud de onda, dispersará lo mismo que un dipolo elemental. En el caso contrario, se producen efectos de interferencia y predominará la dispersión hacia adelante.

Una partícula puede poseer diferente capacidad dispersora en sus distintas partes. Esto es lo que ocurre precisamente con una molécula que dispersa rayos X. El cuerpo dispersor más simple será una partícula cuyos volúmenes tengan todos la misma capacidad dispersora. Detendremos nuestra atención sobre un sistema de este tipo, el cual no sólo simplifica el cálculo, sino que, además, es fácil de reproducir en la práctica (un orificio en una pantalla opaca).

§ 137. Difracción de las ondas por orificios

La amplitud de la dispersión por una partícula aislada se determina por el carácter que tiene en ella la distribución de la sustancia dispersora. Podemos encontrar partículas («orificios») en las cuales la densidad de la sustancia dispersora disminuye suavemente a medida que se aleja del centro del átomo. Podemos figurarnos heterogeneidades más bruscas, como inclusiones o poros, en cuyos bordes la densidad cambia de golpe.

Cuando la dispersión se debe a cualquiera de estas heterogeneidades se producen efectos de difracción característicos. La intensidad de la dispersión decae suavemente al principio, a medida que aumenta el ángulo, y después se anula; al seguir aumentando el

ángulo, la intensidad vuelve a crecer, llega hasta cierto valor máximo, disminuye suavemente hasta cero y en adelante decrece de un modo ondulante. La dispersión en estos objetos ocasiona la formación de franjas de difracción y de manchas de diversa forma que dependen del carácter del objeto.

Donde los efectos de difracción se manifiestan con mayor claridad es en la dispersión por orificios practicados en una pantalla opaca. Cada orificio puede considerarse como una región uniformemente llena de dipolos emisores. Las figuras de dispersión por un orificio o por una partícula que tenga la forma de este orificio, deberán dar curvas de variación de la intensidad que coincidan con el ángulo de dispersión.

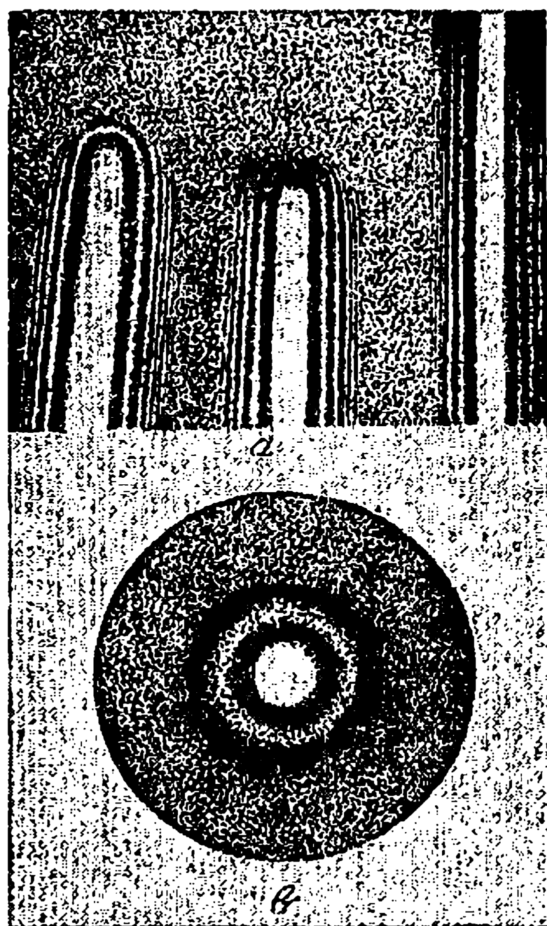


FIG. 154.

Si se trata de rayos luminosos, las figuras de difracción se observan mejor, haciendo que aquéllos sean paralelos, por medio del siguiente esquema. El haz luminoso, procedente de un foco, se hace paralelo e incide sobre una pantalla en la que se puede disponer de diversas inclusiones (si la pantalla es transparente) o de orificios (si es opaca). Una lente, situada detrás de la pantalla, reúne los rayos paralelos en el plano de una placa fotográfica (o de una pantalla para observar el efecto). Si los rayos no encuentran en su trayectoria heterogeneidades, orificios, etc., esta lente recogerá los rayos en un punto. En el caso contrario, aparecerá en la pantalla una figura de dispersión o de difracción.

En la fig. 154 se ven las figuras de difracción obtenidas por este procedimiento, producidas por unas agujas y un alambre delgado (*a*) y por un orificio redondo (*b*).

Para evidenciar la procedencia de estas figuras, haremos el cálculo de la distribución de la intensidad de la radiación dis-

persa *) para el caso más simple de un orificio en forma de rendija.

Supongamos que una onda incide sobre una rendija, practicada en una pantalla opaca, formando un ángulo recto. Dividamos la rendija en volúmenes ΔV, como muestra la fig. 155, y escribamos la

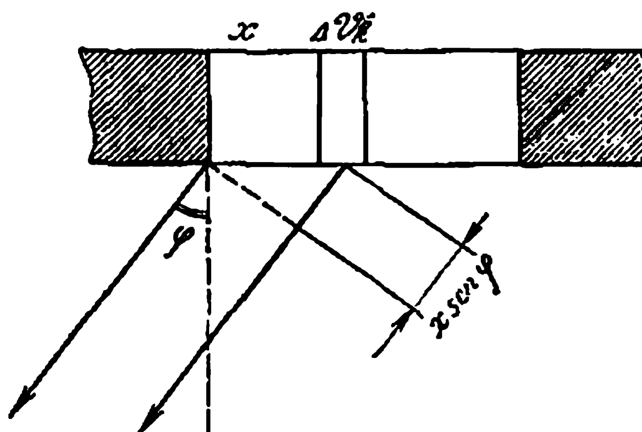


FIG. 155.

expresión de la onda que emite un volumen arbitrario ΔV_k en la dirección que forma un ángulo φ con la onda incidente. Las ondas procedentes de los distintos elementos ΔV_k llegarán al punto de observación en fases distintas. Si la diferencia de marchas se calcula con respecto al último rayo (hacia el lado de la desviación), el camino recorrido por los rayos que emiten los volúmenes siguientes será más largo en la magnitud x sen φ y, por consiguiente, estarán desfasados en $\frac{2\pi}{\lambda} x_k \operatorname{sen} \varphi$.

La amplitud de la onda dispersada por el volumen k-ésimo será proporcional al volumen «dispersor» ΔV, es decir, a la expresión

$$\Delta V_k \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_k \operatorname{sen} \varphi\right).$$

Hay que sumar las expresiones correspondientes a todos los volúmenes. Esta suma puede sustituirse por la integración a lo largo de la coordenada x, tomada transversalmente a la rendija. Sustituyendo ΔV_k por su valor proporcional Δx_k y pasando al límite, se obtiene

*) El contenido físico de los términos «radiación dispersa» y «radiación difractada» es idéntico. Generalmente se utiliza la palabra «difracción» cuando la figura de dispersión presenta varios máximos y mínimos bien definidos. En cambio, cuando el carácter interferencial de la figura es menos claro, se emplea la palabra dispersión.

la amplitud de dispersión bajo el ángulo φ:

$$A = k \int_0^a \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \operatorname{sen}\varphi\right) dx;$$

k es un coeficiente de proporcionalidad, y a, la anchura de la rendija.
Introduciendo la variable

$$z = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \operatorname{sen}\varphi,$$

obtenemos

$$dz = -\frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen}\varphi \, dx$$

y, por consiguiente,

$$A = \frac{k}{\frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen}\varphi} \left[\operatorname{sen}\omega t - \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\varphi\right)\right].$$

Haciendo $\frac{\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\varphi = u$, y después de la transformación trigonométrica correspondiente, resulta

$$A = \frac{ka}{u} \operatorname{sen} u \cos(\omega t - u).$$

Por lo tanto, la oscilación resultante en el punto de observación tiene la amplitud $\frac{ka}{u} \operatorname{sen} u$, es decir, la intensidad que se observa es

$$I = k^2 a^2 \frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}.$$

Esta es la fórmula de la distribución de la intensidad en función del ángulo de dispersión.

En la mayoría de los experimentos de difracción nos interesan ángulos de dispersión φ pequeños; el porqué esto es así quedará claro más adelante. Por lo tanto, sustituyendo sen φ por tg φ y teniendo en cuenta que

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{f},$$

donde x es la distancia del punto de observación, en el plano de la placa fotográfica, al centro de la figura de difracción, y f es la distancia desde la rendija hasta la placa, obtenemos para u la expresión

$$u = \frac{\pi a}{\lambda} \frac{x}{f},$$

La fig. 156 representa la curva $\frac{\text{sen}^2 u}{u^2}$, y como u es proporcional a x, la figura de difracción en la placa fotográfica corresponderá a esta curva.

Los lugares de las franjas oscuras se encuentran fácilmente partiendo de la condición $u=\pm n\pi$, donde n es un número entero. Por consiguiente, el primer cero se halla donde $x=\frac{\lambda f}{a}$; a este mismo número es igual también la distancia entre las anulaciones sucesivas de la intensidad.

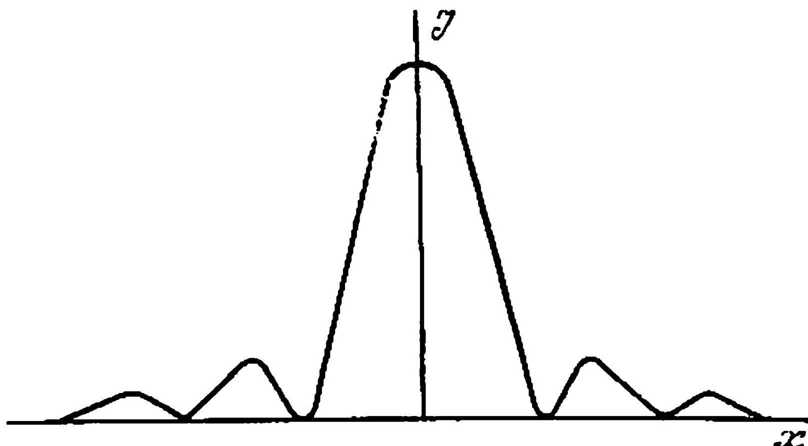


FIG. 156.

Esta fórmula indica cuándo se observarán fenómenos de difracción en diferentes longitudes de onda y en distintas condiciones. La difracción de la luz ($\lambda=0{,}5\cdot 10^{-4}$ cm) se observa bien en las condiciones de laboratorio si se toman orificios del orden de 0,1 cm y distancias del orden de 2 m entre la pantalla y la placa fotográfica. Con estas cifras, $x=1$ mm y el efecto se ve claramente.

Los rayos visibles darán una difracción apreciable si se interpone una pelota de tenis ($a=5$ cm), pero la distancia debe ser mayor. A la distancia $f=100$ m y con la longitud de onda $\lambda=5000$ Å, $x=1$ mm. Por lo tanto, en este caso la distancia entre las anulaciones de la intensidad de la radiación dispersada será del orden de 1 mm.

En las condiciones correspondientes a la ecuación $x=\lambda f/a$ también puede observarse la difracción de las ondas radioeléctricas.

Supongamos que las magnitudes f y λ son fijas. La anchura de la rendija influye considerablemente en la figura de difracción. Si la rendija es grande, $x\to 0$, es decir, la imagen de la rendija enfocada por la lente es infinitamente estrecha. A medida que disminuye la anchura de la rendija, comienza a revelarse la figura de difracción y su primer mínimo empieza a alejarse cada vez más

del centro de la figura. Por fin, la rendija se hará tan estrecha, que la aproximación que admitimos en la fórmula de u (sustitución de sen φ por tg φ) no será correcta. La imagen de la rendija en la pantalla perderá nitidez y, en fin de cuentas, cuando la longitud de la onda y la dimensión de la rendija se igualen, la rendija producirá radiación secundaria como fuente única. La interferencia de las ondas elementales desaparecerá y de la rendija divergerá en todos los sentidos una sola onda elemental.

Para los orificios y partículas (o inclusiones en el medio) que tienen otra forma, las figuras de difracción, como puede verse en la fig. 154, tienen un aspecto totalmente distinto. No obstante, las peculiaridades principales de la figura y las leyes generales se conservan. Así, por ejemplo, cuando la difracción proviene de un orificio circular o de otra heterogeneidad redonda, se observan anillos concéntricos y el diámetro mínimo del anillo oscuro es $1{,}22\lambda f/D$, donde D es el diámetro del orificio.

Como las figuras de difracción tienen los máximos en distintos puntos para las diferentes longitudes de onda, cuando se difracta luz blanca se produce su descomposición en el espectro. En este caso, la difracción por una partícula u orificio circular tiene el aspecto de anillo irisado.

§ 138. Sistema de dispersores colocados desordenadamente

Hemos estudiado el comportamiento de diversos radiadores secundarios de ondas electromagnéticas en función de sus dimensiones con respecto a la longitud de la onda incidente. Las propiedades de un dispersor sólo vienen determinadas por sus dimensiones en los rasgos más generales; el cuadro detallado se determina por la distribución de la sustancia en la partícula dispersora. La distribución de la sustancia en la partícula no desempeña papel únicamente cuando sus dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de onda. En este caso la partícula dispersa como si fuera un todo único, es decir, como un dipolo eléctrico único. En el caso contrario la figura se complica, puesto que viene determinada por la interferencia de las ondas dispersadas en los distintos volúmenes de la partícula. Nosotros hemos considerado solamente un ejemplo de dispersor con dimensiones mayores que la longitud de la onda, a saber, el de una partícula uniformemente dispersora de la cual puede servir de modelo un orificio en una pantalla opaca.

Ahora vamos a ocuparnos de los problemas relativos a la dispersión por un sistema de partículas, como, por ejemplo, del sistema formado por las moléculas de un gas, por un conjunto de partículas

de polvo o de humo, por un sistema de cristalitos de escarcha sobre un vidrio o por el sistema de orificios de una gasa. En todos estos casos y en otros semejantes, la figura se complica porque las ondas que parten de los distintos dispersores pueden, en general, interferir entre sí. Ahora la figura de dispersión dependerá no sólo de las propiedades de una partícula dispersora, sino también del carácter que tenga su colocación mutua. Cobra importancia la proximidad de unos dispersores a otros y el orden o desorden de su colocación mutua. En dependencia de estas circunstancias, la interferencia de las ondas dispersadas por distintas partículas puede expresarse en grado sumo o estar totalmente ausente. También son posibles todos los casos intermedios.

Nos detendremos en los casos extremos y, para empezar, consideraremos la dispersión por un sistema de partículas situadas desordenadamente, basándonos en el ejemplo de la dispersión de los rayos X por una gran concentración desordenada de átomos o moléculas.

En presencia de un gran número de centros dispersores iguales (por ejemplo, átomos, moléculas o de partes mayores iguales), la dispersión resultante se determina, como ya dijimos, por la dispersión de un centro (región) y por el carácter de la disposición mutua de los centros dispersores. Las figuras de dispersión correspondientes a los casos de colocación ordenada y desordenada de los centros dispersores son totalmente distintas.

Si los centros dispersores se hallan en completo desorden, como, por ejemplo, unas moléculas de un gas con respecto a otras, las ondas dispersadas por distintos centros pueden considerarse no coherentes. Esto se explica, porque, cuando los centros dispersores están dispuestos en desorden, se encuentran con igual probabilidad cualesquiera relaciones de fase entre las ondas provenientes de los distintos centros. Puede afirmarse con toda seguridad que al punto de observación llegarán cantidades iguales de ondas (de distintos centros) de amplitudes positivas o negativas. No es difícil comprender lo que ocurre en estas condiciones. Llamemos A_1, A_2, A_3, etc., a las amplitudes de las ondas de distintos centros. La amplitud total en el punto de observación será:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots,$$

y la intensidad, que es proporcional al cuadrado de la amplitud, será una suma de la forma

$$I \sim A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \dots + 2A_1A_2 + 2A_1A_3 + \dots + 2A_2A_3 + \dots$$

Pero entre los dobles productos se encontrarán con igual frecuencia sumandos negativos y positivos. Por esto la suma con gran precisión será igual a la suma de los cuadrados de las amplitudes que se

componen. En otras palabras, la intensidad total será igual a la suma de las intensidades emitidas por los distintos centros. Si los centros son idénticos, la intensidad total, dispersada por los centros en desorden, se escribirá así:

$$I = N A^2,$$

donde N es el número de centros dispersores y A es la amplitud de la dispersión de un centro.

Así, pues, resulta que la dispersión por una multitud de partículas en desorden tiene el mismo carácter que la dispersión por una partícula. Pero N veces más intensa.

Estudiando la dispersión de los rayos X por un gas obtenemos datos acerca de la dispersión por una molécula. El esquema del análisis de la dispersión de los rayos X por los gases se representa en la fig. 157. El rayo X se monocromatiza reflejándose en un cristal y luego entra en la cámara que contiene el gas. La dispersión se registra en una película fotográfica. El grado de ennegrecimiento de la

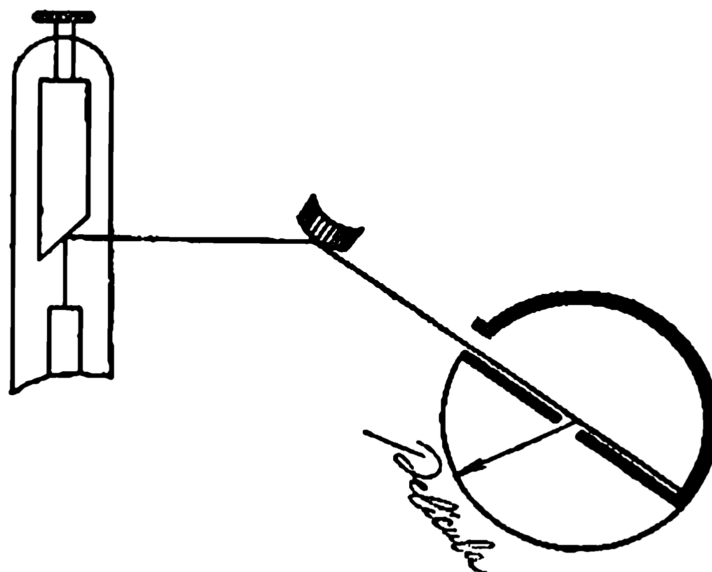


FIG. 157.

película da idea de la intensidad. La intensidad, en función del ángulo de dispersión, se representa por unas curvas suaves que decrecen rápidamente, cuando los gases son monoatómicos, y por unas curvas descendentes con máximos poco expresados, cuando los gases son poliatómicos. Por estas curvas y aplicando las fórmulas teóricas se puede juzgar acerca del carácter de la distribución de la densidad electrónica en la molécula.

Se puede poner un número considerable de ejemplos de sistemas que dispersan las ondas electromagnéticas de un modo semejante a como un gas dispersa los rayos X.

Es bien conocida la dispersión de un rayo de luz en una habitación donde hay polvo. A través de una rendija de las cortinas que cierran la ventana entra en la habitación un rayo de luz claro y rectilíneo que se ve desde todas partes. El sistema de partículas de polvo se comporta, con respecto a la onda luminosa, de un modo semejante en muchos aspectos a como lo hace un sistema de moléculas con respecto a un rayo X. Las partículas de polvo se encuentran a grandes distancias unas de otras y están distribuidas caóticamente. No existe interferencia de ondas dispersadas por distintas partículas, y la figura de dispersión es la misma que la debida a una partícula. Pero su intensidad aumenta proporcionalmente al número de partículas de polvo que se hallan en el campo del rayo luminoso primario. Cada partícula de polvo se comporta como un dipolo eléctrido elemental (la dimensión de una partícula de polvo es menor que la longitud de la onda luminosa). Por esta razón las leyes de la dispersión de la luz por partículas de polvo, es decir, su dependencia de la longitud de onda de la luz y el carácter de la distribución angular, serán las mismas que para el dipolo eléctrico elemental (o sea, serán válidas la fórmula de la intensidad, dada en la pág. 343, y la distribución de la intensidad, representada en la fig. 133).

Las leyes que consideramos tampoco son difíciles de demostrar comparando las figuras de difracción producidas por un orificio y por un sistema de orificios desordenadamente dispuestos. La experiencia demuestra que, por el carácter de la distribución de la intensidad dispersada, estas dos figuras de difracción serán absolutamente idénticas. Es natural que la intensidad de la dispersión por la pantalla con N orificios será N veces mayor que la producida por la pantalla opaca con un solo orificio.

Como la dispersión por muchos centros en desorden coincide por su carácter con la dispersión por un solo centro, está clara la procedencia de los halos irisados que aparecen alrededor de los faroles cuando se miran a través de un cristal cubierto de escarcha. Esta figura no es nada más que la difracción de la luz en las partículas de hielo. Como estas partículas se encuentran en completo desorden, se comportan como partículas «redondas».

§ 139. Comportamiento de un medio homogéneo continuo

Este es el caso extremo opuesto (con respecto al que acabamos de estudiar) del fenómeno de la dispersión. Al hablar de un medio heterogéneo tenemos en cuenta un sistema de dispersores distribuidos en el espacio de forma completamente uniforme y continua.

Un medio homogéneo continuo con respecto a las ondas luminosas es, por ejemplo, un vidrio transparente. La longitud de la onda luminosa es considerablemente mayor que las distancias interatómicas, por lo tanto, podemos dividir el trozo de vidrio en volúmenes elementales de dimensiones considerablemente menores que la longitud de la onda de luz, pero que al mismo tiempo contengan un gran número de moléculas. El medio puede considerarse homogéneo si el número de moléculas es prácticamente igual en todos estos volúmenes.

La dispersión de las ondas electromagnéticas no solo depende de la homogeneidad con respecto al número de radiadores por unidad de volumen, sino también de la homogeneidad de su distribución según las orientaciones. Al fin de cuentas la capacidad dispersora del volumen del cuerpo se define por su momento de dipolo, que se compone de los momentos dipolares de las moléculas que constituyen dicho volumen. Puede decirse por esto que la capacidad dispersora del volumen del cuerpo viene determinada por el valor de la constante dieléctrica, o, teniendo en cuenta la relación $\varepsilon=n^2$, de su factor de refracción. Por consiguiente, un medio homogéneo con respecto a la dispersión de las ondas electromagnéticas deberá ser también homogéneo con relación al índice de refracción para la longitud de onda dada.

Las observaciones del comportamiento de las ondas electromagnéticas en medios homogéneos continuos demuestran que en ellos no existe dispersión: cuando un rayo de luz pasa a través de un cuerpo transparente, la luz no se ve cuando se mira de lado (al contrario de lo que ocurre con un rayo de luz que pasa por una habitación en que hay polvo).

Cada volumen elemental del cuerpo homogéneo es origen de una onda elemental. Pero al mismo tiempo no se produce una onda dispersada. Esto sólo se puede explicar del modo siguiente: las ondas elementales dispersadas por el medio homogéneo en cualquier dirección que forma ángulo con el rayo primario se destruyen totalmente en virtud de la interferencia. Este teorema puede demostrarse con suficiente rigurosidad; pero no nos detendremos a hacerlo, ya que la singularidad de esta explicación es bastante evidente.

Sin embargo el fenómeno de la dispersión en el medio homogéneo se manifiesta considerablemente. El hecho es que las ondas dispersadas se destruyen entre sí en todas las direcciones menos en una, aquella en que se propaga la onda primaria. La dispersión hacia adelante no se superpone simplemente a la onda primaria, sino que varía su velocidad. El fenómeno de la refracción de las ondas electromagnéticas, que ya hemos estudiado, puede interpretarse, pues, como una consecuencia natural de la dispersión.

Una onda electromagnética que se propaga en un medio es la suma de la onda primaria más las ondas dispersadas. La teoría demuestra que la superposición de estas ondas se reduce a retardar la onda primaria.

§ 140. Dispersión en un medio no homogéneo

Una sustancia distribuida uniformemente, en el sentido que acabamos de considerar, no dispersa las ondas electromagnéticas. Aunque todas las partes de esta sustancia crean ondas elementales, a los lados es imposible descubrir radiación secundaria: cualquiera que sea el punto del espacio que se tome como punto de observación, se puede demostrar rigurosamente que, interfiriendo entre sí, las ondas dispersadas por la sustancia homogénea se destruyen unas a otras. Cada onda elemental siempre se iguala con otra que esté en fase contraria a la de ella. Como resultado de esto, la acción de todas las ondas elementales se destruye.

Figurémonos ahora que, en cualquier parte limitada, la sustancia tiene mayor densidad que en el medio circundante, es decir, que tiene un número excesivo de dipolos por unidad de volumen. En este caso se destruirán todas las ondas elementales menos las creadas por este exceso de densidad. El cálculo de la radiación dispersada consistirá, como siempre, en componer las amplitudes de las ondas elementales. Está claro que al hacer la suma hay que tener presente la diferencia de fases con que las ondas elementales llegan al punto de observación.

Si la parte dispersora tuviera menor densidad, en vez de mayor, ¿cambiarían las cosas? Podemos razonar del modo siguiente: si a esta parte dispersora se le añade sustancia de manera que el medio se haga homogéneo, la dispersión desaparece. Está claro que añadiendo y restando a una suma cualquiera una misma cantidad, la suma no varía. Por lo tanto, la dispersión en la parte con menor densidad será igual a la dispersión que produce la cantidad de sustancia que hace falta para que el medio se llene de forma homogénea.

Así, pues, sólo tiene importancia lo siguiente: la parte dispersora debe tener una densidad de distribución de la sustancia diferente de la del medio circundante. En la dispersión influye indistintamente una alteración de la densidad en el sentido de su aumento que en el sentido de su disminución. Así, por ejemplo, la dispersión por un vidrio poroso y la dispersión de un vidrio con inclusiones, de las mismas dimensiones que los poros, distribuidas desordenadamente, son completamente idénticas.

Para las ondas radioeléctricas, debido a su gran longitud, la dispersión se producirá solamente en aquellos casos en que las

heterogeneidades de la densidad se observan en una escala relativamente grande. Por ejemplo, para que se produzca la dispersión de las ondas kilométricas es necesario que en su trayectoria se encuentren desviaciones de la densidad media que tengan por lo menos cien metros. Si las inclusiones o las caídas de la densidad son menores, las ondas no las «notan».

La dispersión de las ondas luminosas se observa únicamente cuando existen alteraciones en la distribución de la sustancia dispersora del orden de décimas de micra como mínimo. Por lo tanto, las ondas luminosas son insensibles a las heterogeneidades en la distribución de los electrones en la molécula ni al paso de una molécula a la adyacente, ya que en estos casos las distancias son mucho menores que décimas de micra. Otra cosa es la que ocurre con los rayos X: como su longitud es del mismo orden que las dimensiones del átomo, para ellos un átomo aislado desempeña el papel de «inclusión en el vacío».

La dispersión de las ondas luminosas en las heterogeneidades es muy frecuente. La existencia de heterogeneidades en la sustancia dispersora puede conocerse por el aspecto del medio. El medio se enturbia. Las condiciones necesarias para que se produzca la dispersión de la luz se dan en los vidrios opalescentes, en el aire polvoriento, etc. En todos estos casos existen en el medio alteraciones desordenadas de la densidad de la sustancia, con la particularidad de que las dimensiones de las zonas de alteración se aproximan a la longitud de la onda luminosa.

Como dijimos antes, si una partícula o heterogeneidad dispersa como un dipolo (para esto deberá ser por lo menos 10—20 veces menor que la longitud de onda), la intensidad de la dispersión, de acuerdo con la fórmula del dipolo (véase la pág. 385), deberá ser proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia, es decir, inversamente proporcional a la cuarta potencia de la longitud de onda. En el caso de la luz, esto conduce a una conclusión interesante: cuando la luz blanca es dispersada por un medio con heterogeneidades, éste debe adquirir un colorido celeste, porque los rayos celestes (los más cortos) se dispersan con mayor intensidad. Al contrario, cuando la luz blanca pasa por un medio dispersor, toma una coloración rojiza, ya que la parte azul del espectro se empobrece debido a que su dispersión es más intensa.

Para las ondas luminosas son heterogéneos no sólo los medios turbios. Un gas o un líquido homogéneos son ópticamente heterogéneos a causa de las fluctuaciones de densidad que existen en ellos. En efecto, hagamos el cálculo siguiente. Puede considerarse que las ondas luminosas dispersadas por las regiones cuya dimensión lineal es del orden de 0,02 μm (20 veces menores que la longitud de onda λ) se hallan en la misma fase. En un volumen de gas de este tipo

$(8\cdot 10^{-18}$ cm$^3)$, en condiciones normales, hay, en promedio, 215 moléculas. La fluctuación relativa del número de partículas, según las leyes de la física estadística, es $1/\sqrt{N}$, o sea, igual aproximadamente al 4%. Esta es una heterogeneidad perfectamente apreciable que hace posible la dispersión de la luz en el aire.

A esta dispersión se debe el color celeste del cielo. Si la atmósfera no dispersara la luz del Sol, el cielo parecería negro. El color del cielo se mantine por la dispersión de una parte relativamente pequeña de la energía: la dispersión por unidad de volumen es del orden de la diezmillonésima parte de la energía de la onda primaria.

La dispersión por las fluctuaciones de densidad se llama molecular, porque depende de la estructura molecular de la sustancia (y no de las impurezas que contiene). El análisis de la dispersión molecular en los líquidos ofrece interés como procedimiento para determinar ciertas peculiaridades de la estructura molecular. Un medio no homogéneo en el cual las regiones que discrepan de la densidad media se hallan a distancias suficientemente grandes unas de otras y distribuidas caóticamente, no difiere, por el carácter de la dispersión que produce, de un sistema de centros dispersores desordenados (§ 138). No obstante, en la mayoría de las veces, en los medios continuos (como los líquidos y los sólidos amorfos con respecto a los rayos X, los vidrios opalescentes o los sistemas coloidales con relación a los rayos luminosos y la atmósfera con respecto de las ondas radioeléctricas) la interferencia de las ondas dispersadas por regiones contiguas de densidad más baja o más alta, influye en la forma de la figura de dispersión. Este tipo de interferencia ocasiona una dispersión que difiere considerablemente de la figura ideal de dispersión por un solo dipolo eléctrico.

Hemos estudiado la dispersión de las ondas electromagnéticas por un sistema de partículas dispuestas caóticamente, la dispersión en un medio continuo homogéneo y, finalmente, la dispersión en un medio heterogéneo como caso intermedio. Nos queda por considerar un caso importante: la dispersión de las ondas electromagnéticas en sistemas de centros dispuestos ordenadamente. Haremos esto basándonos en los ejemplos de la red de difracción para las ondas luminosas, de los emisores dirigidos para las ondas radioeléctricas y de los cristales para los rayos X.

§ 141. Red de difracción

Una red de difracción puede hacerse de una lámina de vidrio recubierta con una capa de aluminio delgada. Con unas máquinas especiales provistas de una cuchilla blanda, hecha de marfil, se trazan rayas situadas a iguales distancias unas de otras. En esta

«red», las heterogeneidades (rayas) están dispuestas regularmente y esto ocasiona una serie de peculiaridades en la dispersión de la luz.

Vamos a hablar todo el tiempo de red de difracción óptica, pero los razonamientos y los datos que se exponen a continuación se refieren a cualquier tipo de heterogeneidades y centros de dispersión regularmente dispuestos y a ondas electromagnéticas cualesquiera, desde las más cortas hasta las kilométricas. Nos limitaremos a estudiar la difracción de rayos paralelos, para lo cual haremos uso del procedimiento mencionado en el § 137.

Si todos los centros dispersores son idénticos (en la red de difracción óptica se cumple esto), el cálculo de las figuras de difracción debe hacerse del modo siguiente.

Consideremos la amplitud de la onda que forma un ángulo φ con la incidente. La amplitud total se compone de las amplitudes de las ondas dispersadas por los distintos centros. Si las ondas procedentes de estos centros llegaran al punto de observación en una misma fase, la amplitud total sería igual al producto del número de centros N por la amplitud de un centro aislado f. Pero la onda de cada uno de los centros está desfasada de la onda del centro contiguo (pudiendo considerarse que este desfasaje tiene la misma magnitud para todas las ondas). Las ondas de centros distintos diferirán y la intensidad resultante no será igual a Nf^2, sino a Lf^2, donde L es una magnitud que será mayor que N en la dirección en que las ondas se refuerzan unas a otras, y menor que N, donde las ondas llegan en su mayoría en fases opuestas y se debilitan entre sí.

Las direcciones en que las ondas de todos los centros se reforzarán unas a otras se hallan inmediatamente partiendo de la fig. 158.

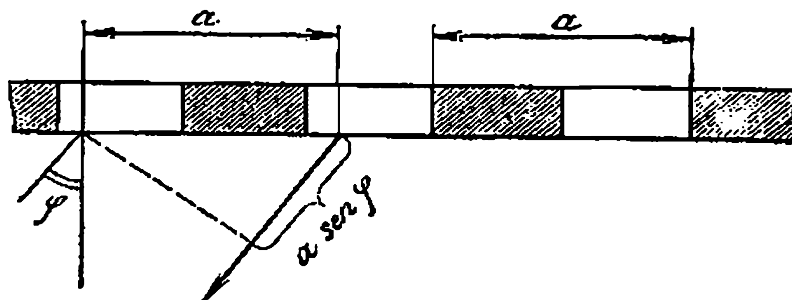


FIG. 158.

La diferencia de marchas de las ondas que salen de dos puntos correspondientes (centros contiguos) será igual a a sen φ. Las ondas se reforzarán mutuamente si esta diferencia de marchas es igual a un número entero de longitudes de onda: a sen $\varphi = n\lambda$ (condición de máximo). Estas direcciones, como vemos, serán varias. Si sobre la red incide una onda no monocromática, aquélla la descompondrá

en un espectro. Pero en este caso el espectro no será único, sino que habrá varios. El número n que figura en la ecuación que hemos escrito se llama, por esta razón, *orden del espectro*.

El número n puede ser igual a cero (rayo no desviado) y negativo. Los espectros primero y menos primero, segundo y menos segundo y así sucesivamente, serán idénticos, cuando, desde el punto de vista geométrico, el experimento sea simple (una onda plana bajo ángulo recto).

El cálculo de la distribución de la intensidad de la onda dispersada es algo extenso. Nos detendremos solamente en el importante problema acerca de la anchura del máximo de difracción. Nos interesa conocer la rapidez con que decae la intensidad del máximo de difracción que se produce cuando los ángulos φ satisfacen la ecuación a sen $\varphi = n\lambda$; ¿se pasa directamente de un máximo al siguiente, o existe entre ellos una caída suficientemente ancha? Consideraremos el caso prácticamente importante de una red constituida por un gran número de centros dispersores (rendijas). Dividamos mentalmente la red en dos partes y comparemos las fases de los pares de rayos procedentes del primer centro y del centro $(N/2+1)$-ésimo, del segundo centro y del centro $(N/2+2)$-ésimo, etc. Cuando el reforzamiento de las ondas es máximo, la diferencia de marcha entre pares de estos rayos es igual a $(N/2)\, n\, \lambda$. Si se varía ligeramente la trayectoria de los rayos inclinándolos de manera que la diferencia de marcha aumente en $\frac{1}{2}$ longitud de onda, el reforzamiento máximo de las ondas que se componen es sustituido por su total anulación. La primera onda extinguirá a la $(N/2+1)$-ésima, la segunda a la $(N/2+2)$-ésima y así sucesivamente. Si nos alejamos más aún de la posición del máximo, la intensidad, como demuestra el cálculo exacto, permanece prácticamente igual a cero hasta que el ángulo de desviación φ no se aproxima a la posición del máximo siguiente.

El ángulo con el cual aparece el máximo de difracción de orden n-ésimo viene dado por la fórmula

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{n\lambda}{a}.$$

Si llamamos $\Delta\varphi$ a la semianchura angular del máximo, para el ángulo $(\varphi + \Delta\varphi)$ puede escribirse la condición

$$\frac{N}{2} a \operatorname{sen}(\varphi + \Delta\varphi) = \frac{N}{2} n\lambda + \frac{\lambda}{2}.$$

De donde

$$\operatorname{sen}(\varphi + \Delta\varphi) = \frac{n\lambda}{a} + \frac{\lambda}{Na},$$

por lo tanto,

$$\operatorname{sen}(\varphi+\Delta\varphi)-\operatorname{sen}\varphi=\frac{\lambda}{Na}.$$

La distancia entre dos máximos vecinos se determina por la expresión

$$\operatorname{sen}\varphi_2-\operatorname{sen}\varphi_1=\frac{\lambda}{a}.$$

Como puede verse, la semianchura de la línea es, aproximadamente, N veces menor que la distancia entre los máximos. Cuando los valores de N son grandes, es decir, cuando las redes constan de un gran número de centros de dispersión, las líneas de difracción son extraordinariamente estrechas y el espectro que se obtiene con la red es muy detallado. Figurémonos, por ejemplo, que sobre la red incide una luz en cuya composición entran dos ondas próximas entre sí, λ y $\lambda+\delta\lambda$. Supongamos para simplificar que se trata de dispersiones con ángulos menores de 20° y sen $\varphi\approx\varphi$. En este caso puede decirse lo siguiente: en el orden n-ésimo estas dos líneas estarán desplazadas en el ángulo $\delta\varphi$, que, como se deduce de la condición sen $\varphi\approx\varphi=\frac{n\lambda}{a}$, será igual a $\delta\varphi=\frac{n}{a}\,\delta\lambda$. La anchura del máximo, para cada onda, se halla partiendo de la ecuación

$$\operatorname{sen}(\varphi+\delta\varphi)-\operatorname{sen}\varphi\approx\delta\varphi=\frac{\lambda}{Na}.$$

Está claro que estas dos líneas se verán separadas (o resueltas, como se dice en óptica), si

$$\frac{n}{a}\,\delta\lambda\geqslant\frac{\lambda}{Na}.$$

La expresión $\lambda/\delta\lambda=nN$ caracteriza el *poder separador o de resolución* de la red.

Ejemplo. En una buena red de difracción, la distancia entre los trazos $a=10^{-3}$ mm, y el número de estos $N=100\,000$. En este caso su poder separador para el espectro de segundo orden será $\lambda/\delta\lambda=nN=200\,000$. Esto significa que, por ejemplo, para $\lambda=6000$ Å, podrán distinguirse dos rayas entre cuyas longitudes de onda exista una diferencia de 0,03 Å.

Detengámonos ahora en la intensidad del rayo difractado. Las ondas que se dirigen a un punto del máximo actúan en una misma fase. Si f es la amplitud de la onda que dispersa un centro, la amplitud total que va en la dirección del máximo será Nf, y la intensidad, N^2f^2. La altura del máximo de difracción es proporcional al cuadrado del número de centros de dispersión. Y como la anchura del máximo es inversamente proporcional a N, su área

(la intensidad integral del máximo) será proporcional a la primera potencia de N. Si comparamos entre sí distintos máximos, veremos que la relación entre sus alturas (o, lo que es lo mismo, entre sus áreas) depende del valor que en estas direcciones tiene la amplitud f de la dispersión por un centro.

De este modo, el período de la red predetermina los puntos donde se encuentran los máximos, y la forma (en el sentido amplio de la palabra) de la rendija o del centro de dispersión determina la intensidad de dichos máximos.

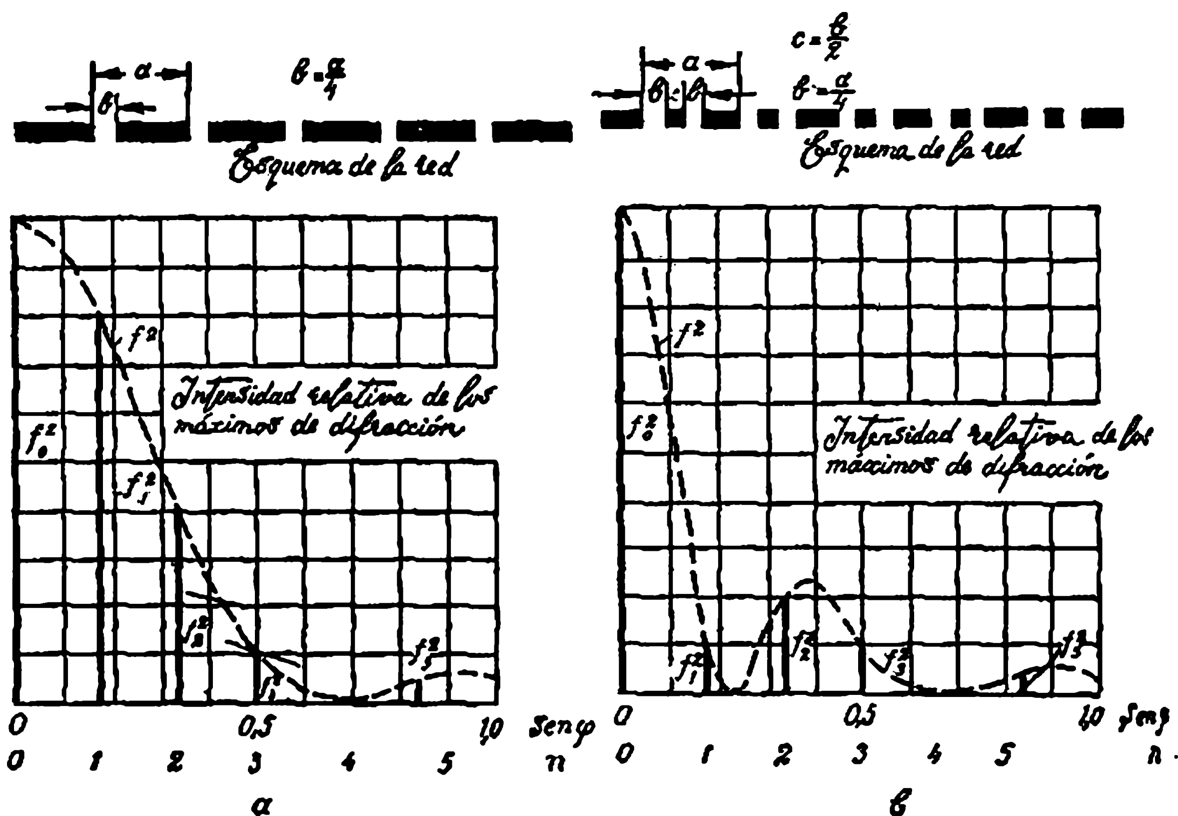


FIG. 159.

Supongamos que el período de la red determina los ángulos φ_1, φ_2, φ_3, etc. Los rayos dispersados salen únicamente formando estos ángulos. Pero, ¿cuál será la intensidad de estos rayos para los órdenes de difracción primero, segundo, etc.? Esto depende de los valores de la amplitud de un centro dispersor correspondiente a estos ángulos. Puede ocurrir que para el ángulo φ_2 la amplitud f esté en el máximo. Entonces el segundo orden de difracción estará representado por una raya intensa. Si bajo el ángulo φ_3 la amplitud f está próxima a cero, la raya de tercer orden estará ausente en el espectro de difracción y así sucesivamente. De ilustración de lo

expuesto puede servir la fig. 159, en la que se representan los espectros de difracción y los factores de dispersión f de un centro (línea punteada), correspondientes a dos estructuras distintas de la red.

En estos principios se basa todo género de análisis de la estructura por medio de los espectros de difracción. La distancia entre las rayas de difracción permite hallar el periodo de la red (si se conoce la longitud de onda), y la intensidad de las rayas de distintos órdenes permiten entender la estructura del centro dispersor.

Ejemplo. Sea una red de difracción de $a=3\cdot 10^{-3}$ mm y $N=1000$, sobre la cual incide un haz paralelo de luz monocromática de $\lambda=5000$ Å. Los máximos de difracción se verán bajo los ángulos $\operatorname{sen}\varphi_n=\frac{n\lambda}{a}=\frac{n}{6}$, la anchura del máximo de difracción será $2\frac{\lambda}{Na}=\frac{1}{3000}$. Los resultados obtenidos son correctos cualquiera que sea la forma del centro de dispersión. Para calcular la intensidad relativa de los máximos de difracción hay que considerar una forma correcta de centros de dispersión.

1. Los centros de dispersión son rayas simples de anchura $b=a/4=0{,}75\times\times 10^{-3}$ mm (fig. 159, *a*). La fórmula de la intensidad cuando la difracción es por una rendija se obtuvo en el § 137. El valor de la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud de la dispersión por una raya: $f^2\sim\frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}$, $u=\frac{\pi b}{\lambda}\operatorname{sen}\varphi$. La intensidad del n-ésimo máximo de difracción viene determinado por la magnitud f_n^2 en la dirección φ_n, que se determina partiendo de la ecuación $\operatorname{sen}\varphi_n=n/6$. Si se toma f_0^2 como igual a 100, para las demás intensidades obtenemos:

$$f_1^2=80;\qquad f_2^2=40;\qquad f_3^2=8{,}9;\qquad f_4^2=0;\qquad f_5^2=3{,}2.$$

2. Los centros de dispersión son rayas dobles de anchura $b=a/4=0{,}75\times\times 10^{-3}$ mm cada una. El periodo a de la red es el mismo que antes (fig. 159, *b*). Está claro que la situación y la anchura de los máximos de difracción no habrá cambiado. Un cálculo análogo al que se hizo en el § 137, demuestra que para dos rendijas $f^2\sim\frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}2\left\{1+\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(b+c)\operatorname{sen}\varphi\right]\right\}$. De aquí pueden hallarse fácilmente las intensidades relativas de los máximos de difracción, suponiendo $f_0^2=100$:

$$f_1^2=12;\qquad f_2^2=20;\qquad f_3^2=7{,}5;\qquad f_4^2=0;\qquad f_5^2=2{,}7.$$

§ 142. Emisores dirigidos de ondas radioeléctricas

Para algunos fines radiotécnicos, y en primer lugar para la radiolocalización, tiene mucha importancia el poder dirigir el haz radioeléctrico en el espacio, concentrando de esta forma la energía del generador en un ángulo sólido tan pequeño como sea posible. Uno de los procedimientos para resolver este problema consiste en utilizar para este fin una red regular de antenas.

En el § 141 vimos que, cuando los centros de dispersión están colocados ordenadamente, la energía emitida se concentra en deter-

minadas direcciones. Si los emisores de ondas radieléctricas se colocan en una fila (fig. 160), a distancias a entre cada dos antenas consecutivas, y se consigue que todas las antenas funcionen sincrónicamente, esta red de emisores no diferirá en nada de una red de difracción dispersora. El hecho de que en el caso de las antenas nos encontramos con ondas primarias, no cambia en absoluto los razonamientos que hicimos en el párrafo anterior, lo único que hace falta es que la radiación emitida por las distintas antenas pueda considerarse coherente, lo que puede lograrse si las antenas se alimentan sincrónicamente por el generador de oscilaciones.

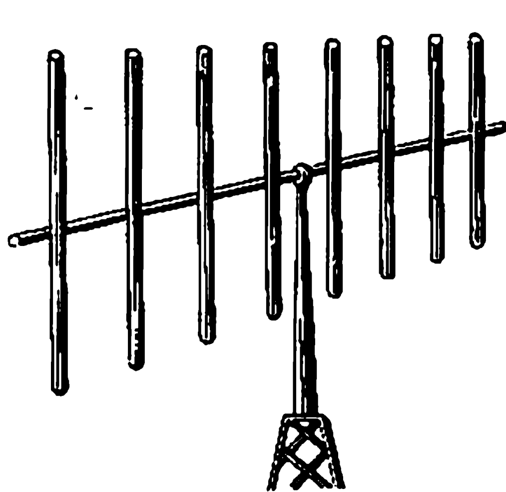


FIG. 160.

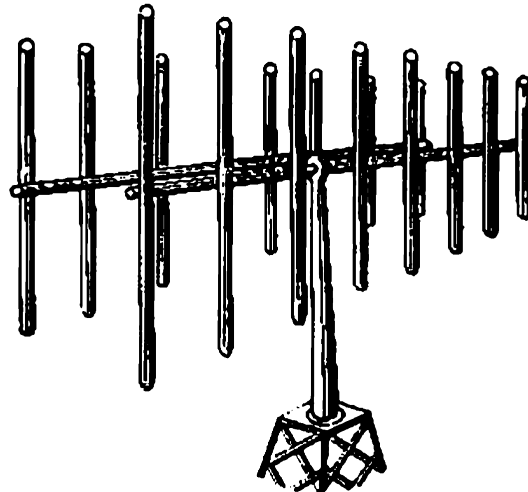


FIG. 161.

Si las antenas se colocan suficientemente próximas unas a otras, de manera que la distancia entre los dipolos vecinos sea menor que la longitud de la onda, el primer orden de difracción, de acuerdo con la ecuación a sen $\varphi = n\lambda$, será ya imposible. Queda, pues, únicamente el orden nulo. Esto quiere decir que solo existirán dos máximos de radiación, uno de los cuales formará un ángulo de 0° con la dirección normal de la red, y el otro, un ángulo de 180°. Lo dicho en el § 141 acerca de la anchura del máximo también sigue aquí en vigor, es decir, cuanto mayor sea el número de emisores, tanto más estrecho será el ángulo sólido en que la intensidad del rayo alcanza un valor considerable.

Pero en la práctica resulta incómodo el que la radiación tenga igual intensidad en dos direcciones opuestas. Para evitar esto se construye una doble red de dipolos (fig. 161). Cada par de antenas se coloca a una distancia igual a 1/4 de longitud de onda. Así se consigue que en cada par de dipolos las corrientes están desfasadas en 90°. En estas condiciones, uno de los dos máximos se anula y toda

la energía se transmitirá dentro de un máximo de difracción. En efecto, en esta estructura cada par de dipolos se encontrará en las siguientes relaciones de fase. Para la onda que va «hacia adelante»: si las ondas se emitieran sincrónicamente, entre ellas existiría una diferencia de marcha de 1/4 de onda; pero las antenas no funcionan sincrónicamente, sino que la onda emitida por el dipolo «delantero» está retrasada en 90°, con lo que se compensa su adelante en diferencia de marcha. Lo que ocurre con la onda emitida «hacia atrás» es distinto. Los desplazamientos por diferencia de marcha y de fase de variación de la corriente en las antenas, se superponen; por consiguiente, la diferencia de fases resultante será de 180° y la emisión que va hacia atrás, desaparece.

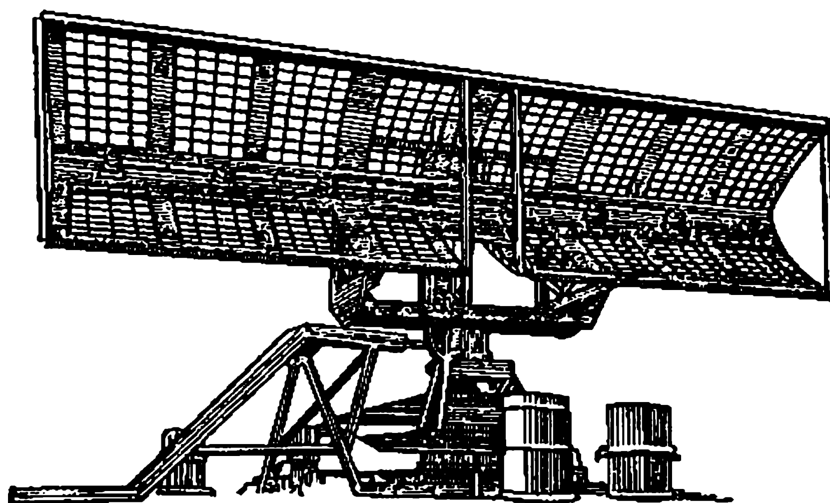


FIG. 162.

Si las antenas están dispuestas en serie lineal, pueden lograrse buenos resultados para la anchura del rayo en el plano perpendicular a las antenas. Pero si queremos que la señal de radio sea estrecha en el espacio, hay que recurrir a sistemas de vibradores más complejos. Esto explica por qué las antenas emisoras de radar (fig. 162) tienen formas tan raras.

§ 142 a. Holografía

Una onda dispersada por cualquier objeto es portadora de una rica información acerca de las propiedades de aquél. Partiendo del principio de Huygens, puede demostrarse con todo rigor que la distribución de las amplitudes y fases de la onda, en el frente de ésta y en cualquier instante del proceso de su propagación, caracteriza de un modo exhaustivo las propiedades dispersoras del objeto.

Cuando el objeto se fotografía, se pierde parte de la información que transporta la onda. El ennegrecimiento de la placa fotográfica es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda (es decir, de su intensidad) que llega a un punto determinado de dicha placa, pero no depende de la fase de la onda. La placa fotográfica da una

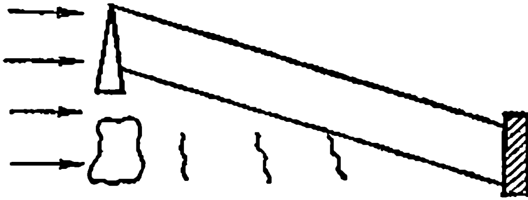


FIG. 162a.

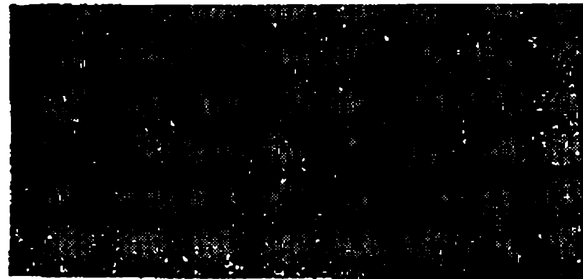


FIG. 162b.

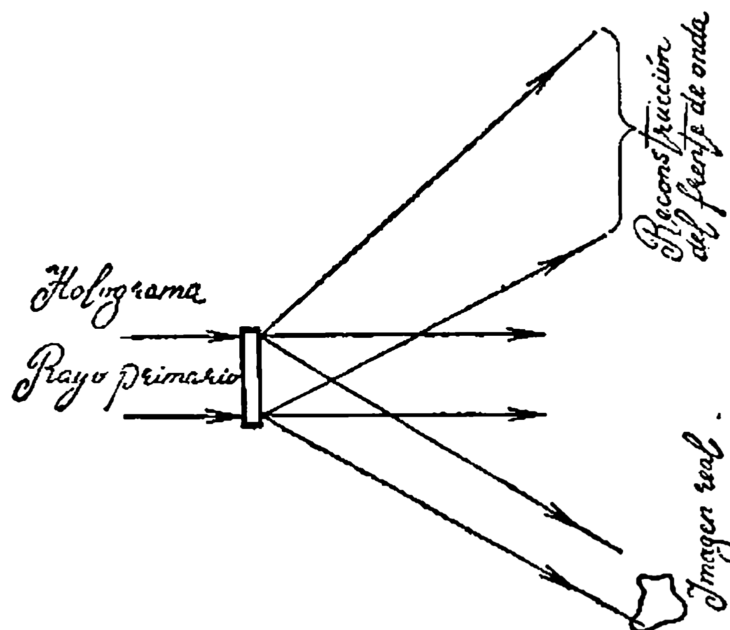


FIG. 162c.

imagen bidimensional de una figura tridimensional. Está claro que una parte considerable de la información acerca del objeto se pierde cuando se fotografía.

En vez del proceso fotográfico, D. Gabor propuso en 1947 el proceso holográfico, cuya realización práctica se hizo posible después de la invención del láser.

La holografía es un proceso de dos etapas. Primero se saca el holograma del objeto, y después, se ilumina este holograma y aparece la imagen tridimensional del objeto, que, en principio, no se distingue de él.

Se llama *holograma* la figura de interferencia, obtenida en una placa fotográfica, como resultado de la interferencia de un rayo primario y un rayo dispersado.

La interferencia de un rayo dispersado con el primario se puede conseguir por procedimientos muy diversos. En el esquema más simple, una parte del frente plano de la onda laseriana la podemos cerrar con un prisma, y la otra parte, con el objeto dispersor (fig. 162a). La coherencia de la radiación del láser permite obtener en la placa fotográfica cierta figura de interferencia que tendrá un aspecto semejante al que se ve en la fig. 162b. Si se quitara el objeto dispersor, la figura de interferencia tendría la forma de rayas paralelas a la arista del prisma, separadas por una distancia que puede expresarse fácilmente (véase la pág. 376) en función del ángulo del prisma. Puede decirse que la dispersión por el objeto «modulaba» esta simple figura de interferencia.

La figura en que las franjas oscuras y brillantes se suceden entre sí nos recuerda la red de difracción. Por esta razón no es difícil estar de acuerdo en que, cuando la luz incide sobre el holograma, aparece el rayo no desviado y, además, los espectros más y menos de primer orden. Puede demostrarse, aunque no nos detengamos en ello, que los órdenes elevados del espectro estarán ausentes y que uno de los espectros representará el frente de onda divergente, reconstruido, de la onda luminosa dispersada por el objeto. La otra onda será convergente y creará la imagen real del objeto, que puede observarse con los mismos medios que el propio objeto (fig. 162c).

En la actualidad se llevan a cabo intensos trabajos de investigación sobre diversas aplicaciones de la holografía. Está claro, por ejemplo, que los hologramas pueden transmitirse con facilidad a distancias cualesquiera y la reconstrucción de la imagen puede hacerse lejos del objeto. En una misma placa, empleando distintas longitudes de onda y diferentes inclinaciones del rayo primario, pueden registrarse imágenes de objetos diversos. La holografía es un procedimiento cuya capacidad para guardar información es muy grande.

La microscopía holográfica está libre de un gran inconveniente que tiene la microscopía ordinaria: la necesidad del enfoque. Una vez obtenido el holograma volumétrico, podemos examinarlo tranquilamente al microscopio y estudiar detalladamente todos los cortes del objeto, aunque la imagen obtenida se refiera a cierto instante determinado. Huelga demostrar la importancia que tiene este procedimiento de investigación cuando se observan objetos vivos.

22

DIFRACCIÓN DE LOS RAYOS X POR UN CRISTAL *)

§ 143. El cristal como red de difracción

Como ya hemos dicho, en general, se da el nombre de red de difracción a un trozo de vidrio en el que, a distancias iguales, se han arañado unas rayas. Para obtener la típica figura de difracción que hemos estudiado antes, ¿qué es lo fundamental?, ¿el vidrio, la forma de las rayas arañadas, el espesor de aquél o la anchura de las «rendijas»? Reflexionando lo expuesto en el § 141, vemos que lo esencial es la periodicidad con que se repiten las heterogeneidades de la sustancia dispersora. En efecto, cualquiera que sea la causa de la dispersión y el carácter que tenga la heterogeneidad de la sustancia, si esta heterogeneidad se repite regularmente al cabo de un período a, los máximos de dispersión se producirán bajo los ángulos φ que satisfacen la ecuación a sen $\varphi = n\lambda$. Esta figura la dan rayas de cualquier forma trazadas en cualquier vidrio y rendijas cualesquiera practicadas en cualquier pantalla. Lo esencial es sólo una cosa: que la distribución de la sustancia se repita con un período a.

Claro que pueden existir ciertas diferencias entre las figuras. Las intensidades de los rayos difractados en distintos órdenes pueden ser diferentes, dependiendo de la forma de las rendijas. La distribución de la sustancia dentro de las heterogeneidades que se repiten influye en la intensidad de la dispersión f^2, que para órdenes distintos puede tener valores diferentes.

Una vez recordadas las conclusiones del § 141, pasemos a los cristales.

La principal peculiaridad del cristal, la que lo destaca entre los demás cuerpos, es la distribución periódica de la sustancia. A lo largo de cualquier dirección dentro del cristal, la densidad media de los electrones, con respecto al tiempo, se repite periódicamente. En el caso más simple, la distribución de la densidad electrónica tendrá la forma que reproduce la fig. 163. Esta es la densidad electrónica (número de electrones por angstrom cúbico) en una recta paralela a la arista de un cubo de sal gema. El máximo de la densidad electrónica corresponde al centro del átomo. El máximo grande es el del átomo de cloro, el pequeño, el del átomo de sodio. Cada

*) Antes de leer los caps. 22 y 23 se recomienda hojear el cap. 32.

dos átomos se repite el cuadro, el período de la densidad electrónica a lo largo de esta recta es igual a 5,6 Å. Esta representación da una idea acerca de la distribución de la densidad electrónica a lo largo de una recta. A lo largo de una línea que esté un poco desplazada paralelamente a la anterior, la densidad será otra.

Pero un cristal es una formación tridimensional, y el elemento que se repite en él es una celda unidad tridimensional. Nosotros no podemos representar gráficamente la densidad electrónica de una celda unidad. Baste saber que las celdas se repiten en el espacio.

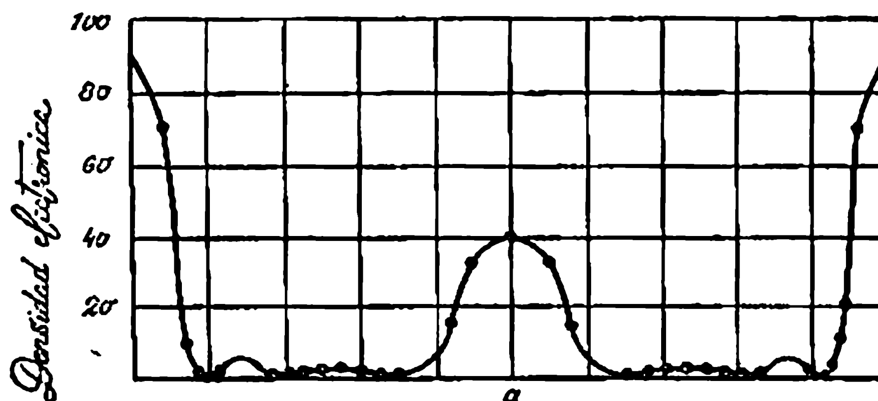


FIG. 163.

La semejanza y la diferencia entre un cristal y una red de difracción son evidentes. Un cristal es una red de difracción tridimensional en la cual un elemento heterogéneo se repite regularmente, no a lo largo de una línea, sino en las tres dimensiones. El papel de «rendija», es decir, de heterogeneidad que se repite, lo desempeña la celda unidad del cristal.

A nosotros nos interesa conocer las leyes de la figura de difracción que crea el cristal.

Los rayos X son dispersados por los electrones. Las heterogeneidades en la densidad electrónica son tales, que una onda del orden de 1—2 Å da una difracción clara. Para hallar las direcciones en que aparecen las rayas difractadas hay que componer las ondas elementales provenientes de todas las celdas. Las amplitudes de estas ondas en una dirección dada serán, claro está, iguales. La dificultad del problema consiste en que hay que tener en cuenta la diferencia de fase entre las ondas dispersadas por las distintas celdas. Estas ondas deben sumarse en cada dirección y destacar aquellas direcciones en las que se fortalecen más unas a otras.

El problema se puede resolver por distintos procedimientos, ya que pueden idearse distintas maneras sucesivas de sumar las celdas. Por ejemplo, se pueden sumar primero las ondas de las celdas que se suceden a lo largo de la arista a, después las ondas de

todas las celdas del plano *ab* y así sucesivamente. Eligiremos, sin embargo, otro camino más fácil, propuesto por los científicos ingleses, fundadores del análisis por difracción de rayos X, W. H. y W. L. Bragg (padre e hijo); esta misma idea fue propuesta independientemente por el cristalógrafo ruso G. V. Wulf. Existe una cantidad innumerable de procedimientos para trazar un plano por un cristal de manera que pase por los nudos de la red. Entre dos planos vecinos queda comprendida una capa con cuya repetición a lo largo de la normal se construye el cristal. Tracemos una normal a esta cara y proyectemos mentalmente la densidad electrónica sobre dicha normal. Está claro que a lo largo de la normal aparecerá la distribución periódica de la densidad electrónica. Al período *d* conviene llamarle distancia entre planos.

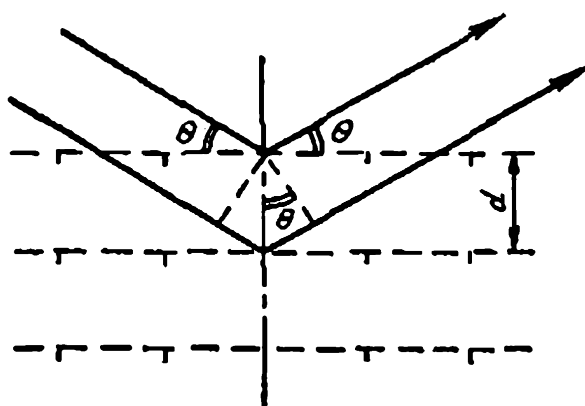


FIG. 164.

Condición de reforzamiento máximo de las ondas dispersadas por las celdas que constituyen una capa: el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de reflexión. Llegamos a esta conclusión basándonos en el principio de Huygens; sólo si se cumple esta condición las ondas dispersadas se propagarán en la misma fase y se sumarán. Las ondas de las capas siguientes se reforzarán unas a otras si se cumplen ciertas condiciones adicionales. En la fig. 164 puede verse que la diferencia de marcha de los rayos «reflejados» en dos elementos correspondientes de capas vecinas es igual a $2d$ sen θ. Por lo tanto, se producirán rayos difractados si se satisface la condición

$$2d \operatorname{sen} \theta = n\lambda.$$

El rayo difractado aparece cuando entre los innumerables sistemas de planos en que puede dividirse el cristal, hay uno que satisface la ecuación $2d$ sen $\theta = n\lambda$. Está claro que puede darse el caso en que varios sistemas de planos satisfacen simultáneamente esta condición. Pero lo más probable es, que, si un rayo monocromático se dirige arbitrariamente al cristal, no se produzca la difracción, y si se quiere observar ésta, habrá que hacer girar el cristal y buscar el ángulo θ conveniente.

Ejemplo. En un cristal de calcita la distancia entre planos es igual a 3,029 Å. Para hacer el análisis por difracción de rayos X suele utilizarse la radiación pro-

cedente de un ánodo de cobre cuya longitud de onda es de 1,54 Å. Esto significa que el máximo de difracción de primer orden corresponderá al ángulo $\theta =$ arc sen $\frac{\lambda}{2d} \approx 14°40'$.

§ 144. *Determinación de los parámetros de la celda unidad de un cristal*

Determinando experimentalmente los ángulos 2θ que forman los rayos difractados por un cristal, pueden hallarse (conociendo λ) las distancias entre planos que existen en dicho cristal y, de este modo, definir los períodos de repetición de la estructura en cualquier dirección.

Si la red es cúbica se caracterizará por un solo parámetro, la arista del cubo. La red rómbica viene dada por tres períodos, a, b, c, perpendiculares entre sí.

Colocando el cristal debidamente con respecto al rayo, se puede conseguir que refleje cualquier sistema de planos, incluso los paralelos a las caras principales (ab, bc, ac) de la red. Una serie de mediciones de este tipo da siempre la posibilidad de «palpar» con seguridad la red, medir la longitud de las aristas y (en el caso de que la simetría sea inferior) los ángulos entre las aristas de la celda unidad.

Estas mediciones tienen gran importancia. Si se mide el volumen V de la celda de un cristal y se conoce la densidad δ de la sustancia, puede hallarse inmediatamente la masa $M = V\delta$ de la sustancia que hay en dicha celda. Y dividiéndola por la masa del átomo de hidrógeno $m_H = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g, hallamos el peso molecular del contenido de la celda. Pero, como es lógico, el número de moléculas que hay en una celda no puede ser fraccionario. Además, en muchos casos, hay motivos de simetría que limitan el número de moléculas posible. Por ejemplo, en una celda rómbica el número de moléculas no puede ser menor de cuatro. De este modo, la medición de las celdas permite hacer apreciaciones importantes acerca del peso molecular de la sustancia.

En los casos más simples, la determinación de una celda unidad resuelve el problema de la definición de la estructura.

En la fig. 165 se representa una celda unidad de hierro indicando las distancias entre sus átomos. Estos datos se obtienen inmediatamente midiendo las distancias entre los planos. El investigador razona del modo siguiente. El cristal de hierro es cúbico; medimos la distancia principal entre planos del sistema de planos paralelos a las caras del cubo. La experiencia da la cifra de 1,4 Å. Calculamos cuántos átomos de hierro entran en un cubo de arista 1,4 Å. La masa del átomo de hierro $m_{Fe} = 92{,}6 \cdot 10^{-24}$ g, y la densidad del hierro $\delta_{Fe} = 7{,}88$ g/cm^3. A un cubo de volumen $(1{,}4)^3 \cdot 10^{-24}$ cm^3 le

corresponde tener una masa de $(1{,}4)^3 \cdot 10^{-24} \cdot 7{,}88 = 21{,}7 \cdot 10^{-24}$ g. Pero esta cifra es igual a la cuarta parte de la masa del átomo de hierro. Por consiguiente, la arista de la celda unidad del hierro es

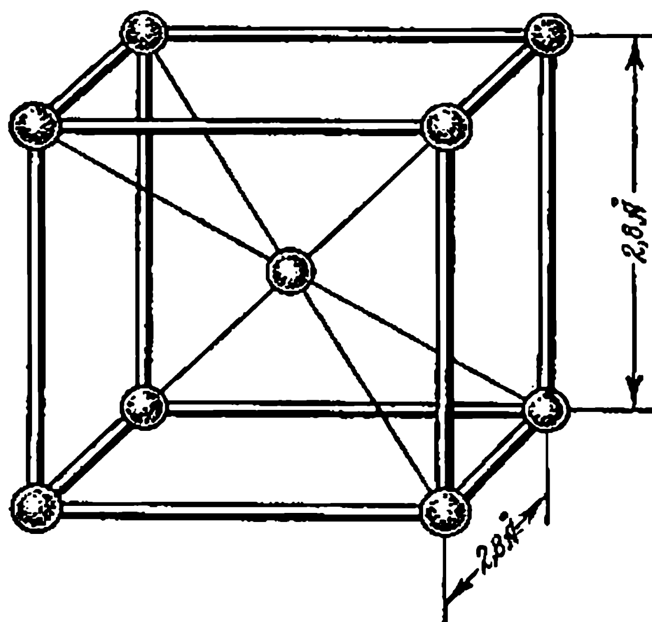


FIG. 165.

mayor que 1,4 Å. Supongamos que es el doble. En este caso la arista del cubo tendrá 2,8 Å y en cada celda habrá dos átomos.

Como el cristal es cúbico y tiene un eje de simetría de cuarto orden (véase la pág. 656), este segundo átomo sólo puede encontrarse en el centro del cubo elemental. Comprobemos si es correcta la suposición de que la celda tiene dos átomos. Si es correcta, la distancia diagonal entre los planos, que muestra la fig. 166, deberá ser igual a $1{,}4\sqrt{2}$ Å. La experiencia confirma esta cifra, con lo que queda demostrado el modelo de la estructura.

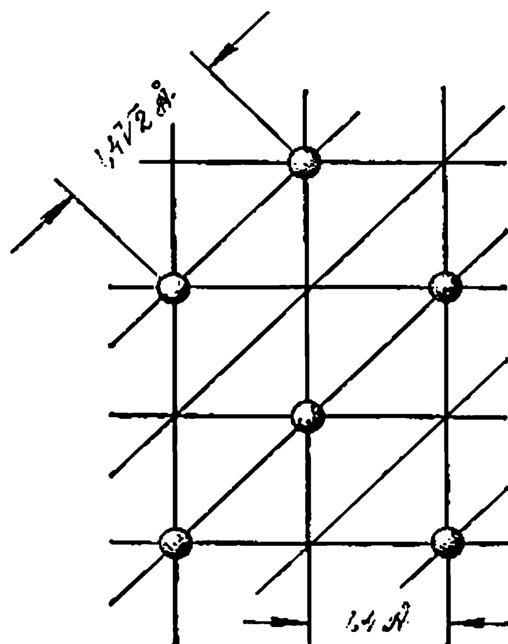


FIG. 166.

Para muchos metales, aleaciones y sales simples con fórmula del tipo AB, estos razonamientos elementales resultan suficientes en muchos casos para determinar la disposición mutua de los átomos. Pero si la celda tiene muchos

átomos y no es cúbica, el problema de la determinación de la estructura puede resolverse únicamente utilizando, no sólo los datos acerca de la forma de la figura de difracción, sino también los relativos a las intensidades de los rayos.

§ 145. Intensidad de los rayos difractados

Análogamente a como esto ocurre en la red lineal, la intensidad del rayo difractado por un cristal es igual a $N^2 F^2$, es decir, es proporcional al cuadrado de la amplitud F^2 de la onda dispersada por una celda unidad del cristal en la dirección dada y al cuadrado del número de celda unidad que hay en el volumen atravesado por la luz.

La magnitud F^2 está relacionada uniformemente con la estructura del cristal, es decir, con el carácter de la distribución de la densidad electrónica en la celda.

Como ya dijimos antes, la magnitud F^2 de un rayo difractado determinado (producida por un sistema de planos «reflectores» determinado) depende de la proyección de la densidad electrónica sobre la dirección de la normal. Dividamos una capa del cristal, por medio de planos paralelos, en capas infinitamente delgadas dz. Si ρ es la densidad electrónica de una celda, $\rho\, dz$ será el número de electrones de la celda que se encuentran en la capa dz. Todos los electrones de una capa delgada dispersan en la misma fase y producen una onda $\rho\, dz \cos(\omega t+\varphi)$. La amplitud de la onda de una celda es

$$F=\int_0^d \rho \cos(\omega t+\varphi)\, dz.$$

La integral se toma a lo largo de un período (distancia entre los planos); los valores de ρ y φ son distintos para cada z.

Aquí no vamos a explicar cómo se resuelve el problema de la determinación de la densidad electrónica de un cristal en todos los puntos de una celda unitaria. La igualdad que hemos escrito sirve de base para resolverlo en todos los casos. Esta ecuación permite calcular la amplitud de cualquier rayo difractado si se conoce la densidad electrónica de los cristales. Pero el más necesario es el problema inverso: el de hallar la distribución de los electrones en el cristal, partiendo de las intensidades de los rayos difractados determinadas experimentalmente. Este problema se resuelve eficazmente para cristales bastante complejos que contienen hasta centenares de átomos en la celda unidad.

En un cristal de antraceno se midió la intensidad de cerca de 600 rayos difractados. Valiéndose de estos datos se hallaron los

valores de la densidad electrónica en todos los puntos de la celda. La fig. 167 representa la sección de la densidad electrónica que pasa por los centros de los átomos de una de las moléculas de antraceno. (Para representar la densidad electrónica se ha empleado el procedimiento a que suelen recurrir los geógrafos para levantar los planos

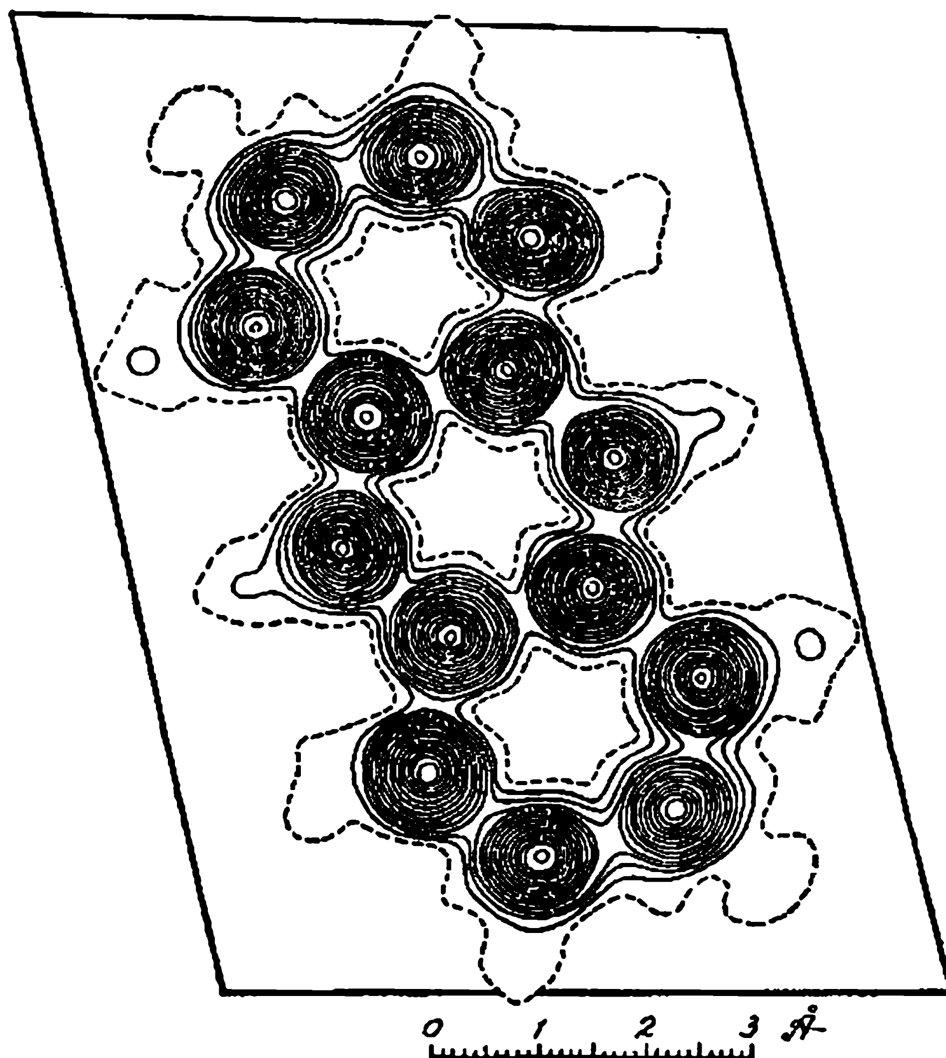


FIG. 167.

de los lugares montañosos. Las líneas de nivel en el plano de la densidad electrónica representan contornos de igual densidad de electrones). Las catorce cumbres que se ven claramente son catorce átomos, que, como demuestra la investigación, se encuentran 1,4 Å de distancia uno de otro. La altura del máximo de la densidad electrónica es proporcional al número de electrones que hay en el átomo. Los átomos de carbono contienen seis electrones cada uno, al átomo de hidrógeno sólo le pertenece un electrón. Diez picos, de los cuales

algunos sólo se insinúan, corresponden a los centros de los diez átomos de hidrógeno que entran en la molécula de antraceno, cuya fórmula química es $C_{14}H_{10}$.

§ 146. Métodos de análisis por difracción de rayos X

Los ángulos 2θ que forman los rayos difractados con el rayo que incide sobre el cristal, así como sus intensidades se pueden medir tanto valiéndose de la cámara de ionización (véase la pág. 589) como por un procedimiento fotográfico. Las películas fotográficas que registran simultáneamente las huellas de muchos rayos difractados se llaman diagramas, espectrogramas o roentgenogramas.

Pero si, como dijimos antes, cuando se fija la posición del cristal con respecto al rayo, lo más probable es que no se cumpla la condición $n\lambda=2d$ sen θ, ¿por qué procedimiento se pueden obtener las huellas de varios rayos sobre una película? Existen tres posibilidades de conseguir esto:

1) haciendo girar el cristal y poniendo distintas familias de planos en posición de reflejar;

2) irradiando el cristal con un espectro continuo de longitudes de onda, que se encuentren en una gama suficientemente ancha, desde λ_1 hasta λ_2, para que casi cada familia de planos encuentre en el espectro una longitud de onda «favorable»;

3) obteniendo el diagrama de polvo cristalino, en el cual la condición de difracción, para cualquier d, será cumplida siempre por ciertos cristales.

El primer procedimiento se llama método del cristal rotatorio, el segundo lleva el nombre de Laue, físico alemán descubridor de la difracción de los rayos X, y el tercero es el método del polvo o de Debye (inventor del procedimiento). El método de Laue es de aplicación muy limitada. En la práctica se utilizan: el método de rotación, para estudiar la estructura de los cristales, es decir, para determinar la disposición mutua de los átomos, y el método de Debye, para los problemas específicos que plantea la investigación de las sustancias en cristales pequeños.

El fin de los diagramas de rotación es recoger en una película los datos acerca de las distancias entre planos que existen y de las intensidades de los rayos correspondientes. Pero hay que conocer además cómo es orientado el sistema de planos con respecto a los ejes del cristal. Para esto no sólo hay que conocer dónde se encuentra la mancha en la película, sino también en qué posición instantánea del cristal se produjo. Para conseguir que el diagrama dé estos datos, la película se mueve durante la exposición. Estos métodos de sacar las fotografías se llaman difractogoniométricos.

Los análisis estructurales de sustancias en polvo por difracción de rayos X se utilizan con mucha más frecuencia que los de monocristales. El origen del diagrama de Debye se muestra en la fig. 168.

Prestemos atención a un sistema determinado de planos entre los cuales la distancia es d y cuya normal es $\mathbf{n}$. Supongamos que

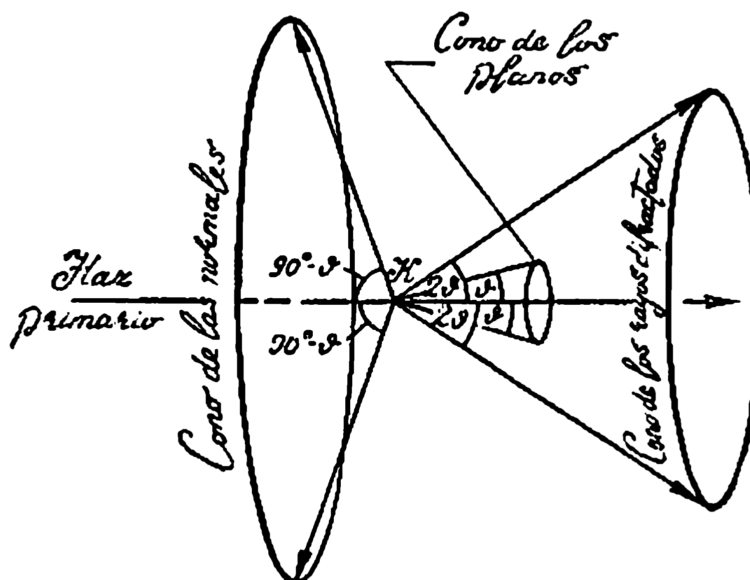


FIG. 168.

en el objeto (muestra) existen cristalitos orientados en todas las direcciones $\mathbf{n}$ posibles. El rayo «reflejado» en el plano no será creado por todos los cristalitos, sino únicamente por aquellos cuyos planos forman con el rayo un ángulo ϑ que satisface la condición $2d$ sen $\vartheta =$ $= n\lambda$. Respectivamente, las normales a estos planos forman con el rayo primario un ángulo de $90° - \vartheta$. En la posición reflectante de los planos d se hallarán todos los cristalitos que tengan sus normales en la superficie del cono cuyo ángulo de abertura es $2\,(90° - \vartheta)$. A su vez, los rayos «reflejados» forman la superficie de un cono de ángulo de abertura 4ϑ. La intersección de estas superficies cónicas con la película o placa fotográfica produce anillos.

Si nos interesan ángulos ϑ no mayores de 20—25°, el diagrama se puede sacar en una placa; la figura tiene la forma de un sistema de anillos concéntricos. Pero si se requiere información acerca de todas las distancias entre planos posibles y queremos analizar la dispersión en todo el intervalo de ángulos posible, se usan cámaras con película cilíndrica. La altura de la película es pequeña, por lo que los anillos se ven parcialmente.

Si para un problema determinado tiene importancia determinar más exactamente la distancia entre los planos, se recurre a la fotografía trasera, es decir, a un experimento en el cual se registran en la

película los conos de difracción más anchos, con ángulo de abertura de cerca de 360°.

En la película se miden los ángulos de dispersión ϑ con cierto error inevitable $\Delta\vartheta$. Veamos como influye la magnitud de este error en la determinación de la distancia entre los planos. Derivando la condición de difracción $2d$ sen $\vartheta = n\lambda$, obtenemos:

$$\left|\frac{\Delta d}{d}\right| = \operatorname{ctg} \vartheta \, \Delta\vartheta.$$

Como puede verse, la exactitud en la medida de la distancia entre los planos aumenta rápidamente cuando el ángulo ϑ se aproxima a 90°. Medir el ángulo de difracción con una exactitud del orden de 0,1° no ofrece dificultad. De la última ecuación se deduce que, por las rayas cuyos ángulos ϑ sean iguales a 65°, 75° y 85°, la distancia entre los planos se medirá respectivamente con una exactitud del 0,13%, 0,08% y 0,05%. Hay cámaras especiales en que el método de la fotografía trasera da resultados muy buenos: permite determinar las distancias entre planos con una precisión de hasta 0,00001 Å. Para obtener la mayor efectividad se elige la longitud de onda de la radiación de manera que el ángulo de dispersión se aproxime a 90°.

Las tres formas de registro de Debye se utilizan mucho en el estudio de los materiales y de la estructura de la sustancia. Cada sustancia posee un sistema de rayas característico que sólo es típico para él. Toda transformación de fase lleva consigo la desaparición de un sistema de rayas y la aparición de otro. La aparición de una fase nueva también se nota en el diagrama de rayos X. El análisis de las fases es una de las aplicaciones más importantes de estos diagramas.

Supongamos ahora que en una sustancia los cristales tienen una orientación predominante. Entonces las normales $\boldsymbol{n}$ a un sistema cualquiera de planos no toman ya todas las direcciones posibles en el espacio y no llenan uniformemente el cono de las normales que representamos en la fig. 168. Pero si este cono no se llena de una forma continua, lo mismo pasará con el cono de los rayos refractados. Por esta razón no veremos en la película anillos continuos, sino anillos intermitentes. Estos anillos son indicio de la orientación preponderante de los cristalitos, es decir, lo que se llama textura. Valiéndose del método de Debye se puede estudiar detalladamente el carácter de la orientación preponderante de los cristalitos, que se produce generalmente como consecuencia de deformaciones plásticas de diversos tipos.

Las dimensiones de los cristalitos también influye en la forma de las figuras. Si los cristales son muy grandes, el anillo del espectrograma no es continuo: se desintegra en puntos, siendo cada uno

de ellos la huella de la «reflexión» en un cristalito independiente. En cambio, cuando los cristalitos son muy pequeños (del orden de $10^{-5} \sim 10^{-6}$ cm), las rayas del diagrama de Debye, como demuestra la teoría, comienzan a perder nitidez. Partiendo de estos datos se han elaborado métodos para valorar la dimensión media de los cristalitos.

En una serie de casos se plantea con fines analíticos otro problema: construir los aparatos de tal modo que pueda estudiarse el espectro de rayos X que emite la sustancia. Como explicaremos más adelante (véase la pág. 549), cada sustancia es capaz de crear un espectro de rayos X característico. Los espectros de átomos de distinta clase se diferencian considerablemente entre sí. Esta circunstancia puede aprovecharse para hacer el análisis cualitativo y cuantitativo. Para resolver este problema se utilizan los espectrógrafos de rayos X, que son dispositivos en los que un cristal grande se coloca en la posición «reflectante» de una de sus caras, con respecto a la cual es bien conocida la distancia entre los planos. Haciendo girar este cristal y midiendo la intensidad de la difracción para cada ángulo, puede hallarse (por los valores del ángulo ϑ) cuáles son las longitudes de onda que están presentes en el espectro de la sustancia analizada y cuál es su intensidad.

23

DOBLE REFRACCIÓN

§ 147. Anisotropía de polarizabilidad

Si una sustancia se halla en un campo eléctrico, las cargas ligadas (las envolturas electrónicas de las moléculas) se desplazan de sus posiciones de equilibrio y forman dipolos eléctricos. Cuando en la pág. 267 consideramos el fenómeno de la polarización de un dieléctrico nos referimos al desplazamiento de las cargas eléctricas a lo largo de las líneas de fuerza. Pero no es difícil comprender que en las moléculas reales las cosas pueden ocurrir de un modo muy distinto. Si un átomo posee una nube electrónica con simetría esférica, ésta se desplazará en realidad en cualquier dirección, en el mismo grado. De este átomo diremos que su polarizabilidad es isotrópica. Está claro que incluso en una molécula diatómica no puede darse esta isotropía: el carácter de las ligaduras de los electrones en dirección longitudinal y transversal a la línea que une estos dos átomos es diferente y, por lo tanto, la polarizabilidad tendrá valores

distintos. En dependencia de la dirección que tenga el vector eléctrico con respecto al eje de la molécula, la magnitud de la polarizabilidad y, por consiguiente, del desplazamiento (momento de dipolo) será diferente.

También tiene importancia el hecho de que la dirección del desplazamiento no coincidirá, en general, con la dirección de la fuerza eléctrica. Esto puede ilustrarse con el modelo mecánico de una bola sujeta por dos muelles perpendiculares de distinta rigidez. Supongamos, por ejemplo, que la fuerza actúa formando un ángulo de 45° con las ligaduras. A lo largo de estas últimas actuarán en este caso fuerzas iguales. Pero la rigidez del muelle horizontal es, por ejemplo, tres veces mayor que la del otro muelle. Entonces el desplazamiento vertical será tres veces mayor que el horizontal y el vector desplazamiento formará un ángulo considerable con el vector fuerza eléctrica. De un modo exactamente igual el momento de dipolo inducido forma ángulo con la dirección de la intensidad $\boldsymbol{E}$.

Casi todas las moléculas poseen polarizabilidad anisótropa, pero ésta no se manifiesta en todos los casos. Si se trata de un líquido, de un cuerpo amorfo o de un gas, la anisotropía de la polarizabilidad inducida no se manifiesta. Efectivamente, para cada molécula con momento de dipolo desviado «a la izquierda» se puede encontrar otra, que forme pareja con ella, con desviación «a la derecha». El momento dipolar total de un par de moléculas de este tipo y, por lo tanto, el momento de dipolo de la unidad de volumen (es decir, el vector polarización $\boldsymbol{P}$) señalará a lo largo del vector $\boldsymbol{E}$.

Sin embargo, tampoco cuando las moléculas están dispuestas ordenadamente en un cristal se manifiesta necesariamente la anisotropía de la polarizabilidad de las moléculas. Los cristales cúbicos poseen isotropía de polarizabilidad. Para ellos la igualdad $\boldsymbol{P}=\alpha\boldsymbol{E}$ continúa en vigor lo mismo que en los cuerpos isotrópicos. Para que esto quede claro, consideremos unas moléculas en las cuales los electrones pueden desplazarse únicamente en una sola dirección. La simetría del cristal cúbico es tal, que en él siempre se pueden encontrar moléculas cuyos ejes de polarización forman 90°. Consideremos tres moléculas de este tipo cuyos ejes de polarización vayan respectivamente a lo largo de los ejes x, y, z de un sistema de coordenadas cartesianas. Si se aplica un campo $\boldsymbol{E}$ de dirección arbitraria, estas moléculas se polarizan y dan dipolos con momentos $\beta E \cos\varphi_1$, $\beta E \cos\varphi_2$ y $\beta E \cos\varphi_3$, puesto que el momento es proporcional a la proyección de $\boldsymbol{E}$ sobre la dirección de polarización. El momento dipolar total de estos tres dipolos lo obtenemos sumándolos vectorialmente. Pero φ_1, φ_2, φ_3 son los ángulos que forma el vector $\boldsymbol{E}$ con los ejes de coordenadas. Por lo tanto, el momento total

de estas moléculas tendrá la longitud

$$E\sqrt{\beta^2(\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_3)}=\beta E$$

y tendrá la dirección de $\boldsymbol{E}$. Extendiendo la suma a todas las moléculas llegaremos a las mismas conclusiones con respecto al vector polarización $\boldsymbol{P}$ y a la polarizabilidad α de la unidad de volumen.

Consideremos ahora cristales con un eje peculiar, es decir, los cristales pertenecientes a los sistemas tetragonal y hexagonal. Para concretar nos referiremos al primero de ellos, es decir, supondremos que cada molécula posee aún tres equivalentes ligadas a ella por un eje de simetría cuaternario. Admitamos, para simplificar los razonamientos, que la molécula sólo puede polarizarse a lo largo de un eje. Prestemos atención a un conjunto de cuatro moléculas cuyos ejes de polarización formen ángulos ε con el eje peculiar (fig. 169). Estudiemos el comportamiento de estas moléculas en campos eléctricos de distintas direcciones. Si el vector $\boldsymbol{E}$ tiene la dirección del eje peculiar, la polarización será proporcional al cos ε. En este caso, en virtud de la simetría de la disposición, el momento dipolar total de estas moléculas será paralelo a $\boldsymbol{E}$ y, por lo tanto, el vector polarización también será paralelo a $\boldsymbol{E}$:

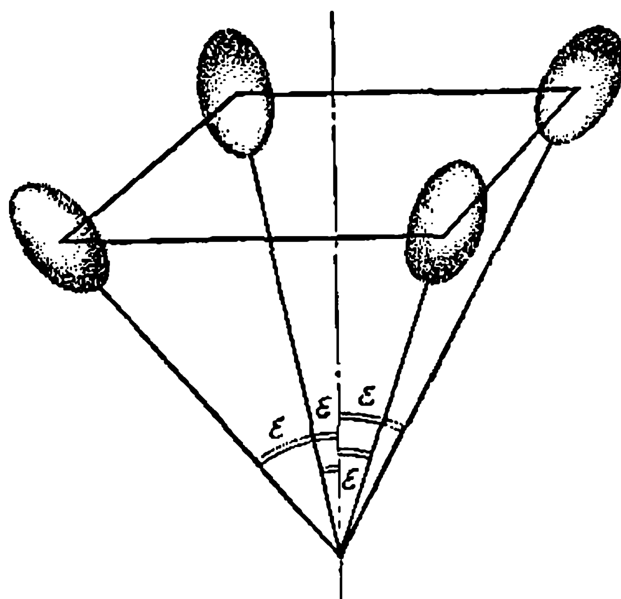


FIG. 169.

$$\boldsymbol{P}=\alpha_{\parallel}\boldsymbol{E},$$

donde $\alpha_{\parallel}$ es la polarizabilidad para esta dirección del campo, creada ya por todas las moléculas.

Las proyecciones, sobre un plano perpendicular al eje principal, de los ejes de polarización forman entre sí ángulos rectos. Por esta razón serán correctas aquí las conclusiones que sacamos al estudiar el cristal cúbico. A saber, la polarizabilidad será la misma para todas las direcciones de $\boldsymbol{E}$ en el plano perpendicular al eje principal. Si $\boldsymbol{E}$ es perpendicular al eje principal, el vector de polarización $\boldsymbol{P}$ también es en este caso paralelo a $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{P}=\alpha_{\perp}\boldsymbol{E}.$$

Mientras que la polarizabilidad de las moléculas a lo largo del eje es proporcional al cos ε, la polarizabilidad de las moléculas en dirección perpendicular a dicho eje es proporcional a sen ε. Esto conduce a que $\alpha_{\parallel}$ sea distinta de $\alpha_{\perp}$.

¿Qué ocurrirá si el campo E es inclinado con respecto al eje principal del cristal? En virtud de la diferencia entre las polarizabilidades $\alpha_{\parallel}$ y $\alpha_{\perp}$, el vector P no puede ya coincidir en dirección

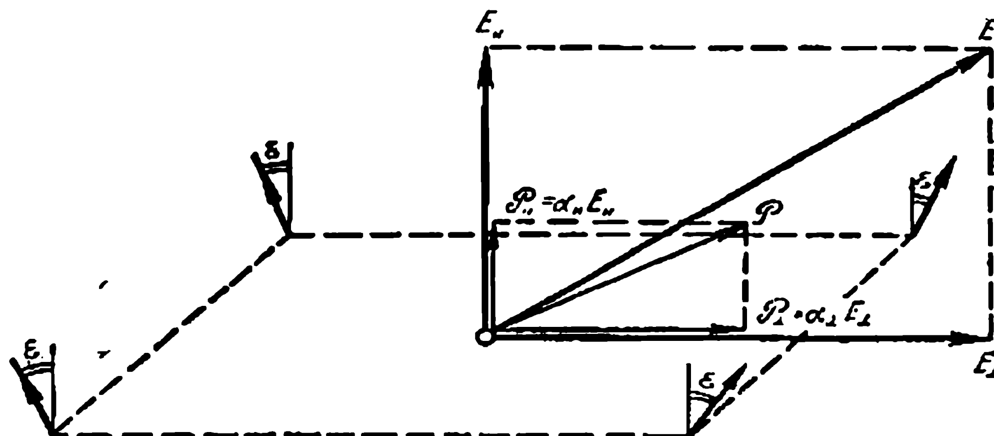


FIG. 170.

con el campo; los valores de α también serán otros. Conociendo $\alpha_{\parallel}$ y $\alpha_{\perp}$ puede calcularse α para una dirección arbitraria. No nos detendremos en explicar como se hace esto en el caso general, pero sí daremos un ejemplo numérico.

Para un cristal de espato de Islandia (calcita) $\alpha_{\perp}=0,139$, $\alpha_{\parallel}=$ $=0,095$. Supongamos que el vector E forma con el plano perpendicular con el eje peculiar un ángulo de 30° y que tiene la dirección que muestra la fig. 170. En este caso, el vector polarización en dicho plano

$$P_{\perp}=\alpha_{\perp}E_{\perp}=0,139\cdot E\cos 30^{\circ}=0,120E.$$

Calculemos el vector polarización perpendicular a él y dirigido según el eje peculiar:

$$P_{\parallel}=\alpha_{\parallel}E_{\parallel}=0,095\cdot E\,\mathrm{sen}\,30^{\circ}=0,0475E.$$

Por consiguiente, el vector total de polarización P forma con el plano un ángulo de arc tg $\frac{0,0475}{0,120}\approx 21^{\circ}40'$. Esto quiere decir que entre P y E se ha formado un ángulo igual a $\sim 8^{\circ}20'$. La magnitud del vector polarización $P=\sqrt{P_{\perp}^2+P_{\parallel}^2}=0,129\ E$, es decir, en este caso la polarizabilidad $\alpha=0,129$.

Si $\boldsymbol{E}$ estuviera dirigido formando un ángulo de 45° con el eje peculiar, la polarizabilidad α disminuiría aún más en comparación con $\alpha_{\perp}$ y se haría igual a $\alpha=0{,}120$, y el ángulo entre $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{P}$ sería

$$45^\circ - \operatorname{arctg}\frac{0{,}095}{0{,}139} \approx 10^\circ 30'.$$

Cuando el vector $\boldsymbol{E}$ tiene la dirección elegida en la fig. 170, los ángulos formados por este vector con los ejes de polarizabilidad de las moléculas serán diferentes: para el par de moléculas situadas a la izquierda serán mayores. Por esto, el par de moléculas de la derecha se polarizan con mayor intensidad.

El hecho de que la polarizabilidad del cristal posee la simetría del eje cuaternario no significa que son simétricas las aportaciones de las distintas moléculas a la magnitud de la polarizabilidad cuando la dirección del campo es arbitraria.

Así, pues, las magnitudes de las polarizabilidades serán diferentes en distintas direcciones. Esto lleva consigo consecuencias importantes: la polarizabilidad está ligada uniformemente con la constante dieléctrica, y ε define al índice de refracción (véase el § 125; $\varepsilon=n^2$), es decir, la velocidad de propagación de la onda en el cristal; por consiguiente, la onda electromagnética se propaga en el cristal con diferente velocidad en distintas direcciones.

Los cristales tetragonales y hexagonales (en óptica se les da el nombre común de uniáxicos o uniaxiles) tienen la particularidad siguiente: todas las direcciones que surgen unas de otras por rotación alrededor del eje principal son ópticamente equivalentes. Los cristales de simetría más inferior carecen de esta peculiaridad.

En los cristales uniaxiles existe una dirección singular y perpendicular a ella, un plano singular. Si el vector $\boldsymbol{E}$ se encuentra en esta dirección o en este plano, $\boldsymbol{E}\parallel\boldsymbol{P}$ (y, por consiguiente, $\boldsymbol{D}\parallel\boldsymbol{E}$). En los demás cristales, como demuestra su análisis, sólo se pueden destacar tres direcciones singulares, perpendiculares entre sí, en las cuales $\boldsymbol{P}\parallel\boldsymbol{E}$.

§ 148. Propagación de la luz en los cristales uniaxiles

DESINTEGRACIÓN DEL CAMPO LUMINOSO EN DOS ONDAS. Nos limitaremos a estudiar los fenómenos que ocurren cuando la luz incide sobre la cara de un cristal tallado de dos maneras: perpendicularmente al eje principal, y paralelamente a este eje.

Cuando la luz se propaga a lo largo del eje principal no descubrimos particularidad alguna que la diferencia de la propagación de la onda en los cuerpos isótropos. El vector eléctrico crea oscilaciones de polarización de los dipolos en dirección perpendicular al eje prin-

cipal. Por lo tanto, la onda se propagará con la velocidad $v_o=c/n_o$, donde $n_o=\sqrt{\varepsilon_\perp}$, y $\varepsilon_\perp$ es la constante dieléctrica en dirección perpendicular al eje. El índice de refracción n_o y la velocidad de la luz v_o se llaman *ordinarios*.

Teniendo en cuenta que $\varepsilon=1+4\pi\alpha$, para el espato de Islandia obtenemos: $n_o=\sqrt{1+4\pi\alpha_\perp}=1{,}658$. Esto quiere decir que $v_o=1{,}81\cdot10^{10}$ cm/s.

El paso de la luz a través del cristal en la dirección del eje principal no cambia su estado de polarización. La luz natural sigue siendo natural. La dirección de las oscilaciones del vector eléctrico en una onda polarizada no varía.

La simplicidad de este caso es característica del cristal uniáxico. En él, cualquier estado de polarización de la onda incidente excita oscilaciones en el plano perpendicular al eje principal. Pero en el cristal uniaxil a todas estas oscilaciones les corresponde una misma polarizabilidad de las moléculas y, por lo tanto, un sólo valor de ε y n.

Detengámonos ahora en el caso de la incidencia normal del rayo sobre una cara paralela al eje principal.

Las ondas de distinta polarización se comportan de diferente manera. Veamos cómo se comporta un rayo polarizado linealmente. Si el vector eléctrico es perpendicular al eje, la luz se propagará con la misma velocidad v_o que en el caso anterior. Pero si el vector eléctrico es paralelo al eje, la polarización de los dipolos se producirá a lo largo del eje, para el que la constante dieléctrica tiene otro valor, $\varepsilon_\parallel$. Por consiguiente, a esta dirección de propagación le corresponde otro valor de la velocidad, $v_e=c/n_e$, y otro valor del índice de refracción $n_e=\sqrt{\varepsilon_\parallel}$. Esta velocidad y este índice de refracción se llaman *extraordinarios*. La causa de estas denominaciones se aclararán más adelante.

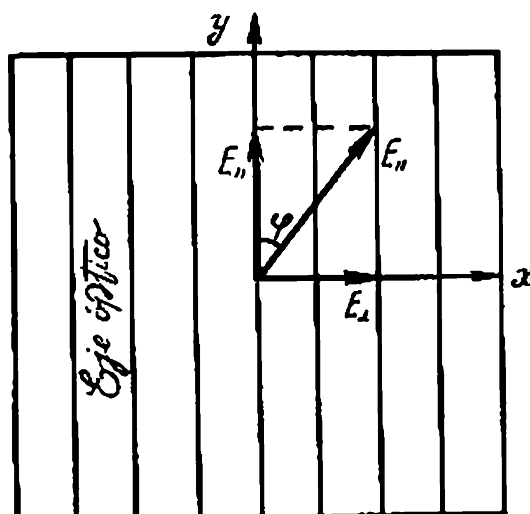


FIG. 171.

Los cristales en que $v_o<v_e$ se dice que son ópticamente positivos; y, al contrario, cuando $v_e>v_o$ se usa la denominación de «cristal negativo».

Para el espato de Islandia $n_e=\sqrt{1+4\pi\alpha_\parallel}=1{,}486$, $v_e=2{,}02\cdot10^{10}$ cm/s. El espato de Islandia es un cristal negativo, puesto qu $v_e>v_o$

POLARIZACIÓN ELÍPTICA. ¿Qué ocurrirá si sobre la cara incide una onda cuyo vector eléctrico $\boldsymbol{E}$ forma un ángulo φ con la dirección del eje principal (fig. 171)? La experiencia demuestra (y esto puede predecirse por las ecuaciones de Maxwell) que la onda electromagnética se desintegra en dos. El vector E debe descomponerse en los E sen φ y $E \cos \varphi$. El primero corresponderá a una onda que avance con la velocidad v_o, y el segundo, a una onda de velocidad v_e. Esto se pone de manifiesto por la diferencia de marcha entre las dos ondas que se producen al desintegrarse la incidente. Si el espesor del cristal es l, se producirá la diferencia de fases $\delta=\frac{2\pi}{\lambda} l \times$ $\times (n_e - n_o)$.

De este modo, a la salida del cristal habrá cambiado considerablemente el estado de polarización de la onda: sobre el cristal incidió luz polarizada linealmente, mientras que la luz transmitida es una combinación de dos ondas cuyas direcciones de oscilación son perpendiculares y entre las cuales existe el desplazamiento δ. ¿Qué estado particular de polarización es éste? Esta luz se dice que está *polarizada elípticamente*, porque el extremo del vector eléctrico describe una espiral elíptica. En efecto, si el vector eléctrico de una de las ondas se escribe como

$$E_x = E \operatorname{sen} \varphi \cos \omega t,$$

para la segunda onda la oscilación electromagnética en el plano perpendicular al rayo tendrá la forma

$$E_y = E \cos \varphi \cos (\omega t + \delta).$$

El problema de la composición de oscilaciones de este tipo fue resuelto por nosotros (véase la pág. 114). El punto que participa en dos de estas oscilaciones describe una elipse. Lo mismo puede decirse del extremo del vector eléctrico, pero como la onda avanza, el extremo del vector $\boldsymbol{E}$ describe la elipse en la proyección sobre el plano perpendicular al rayo. En el espacio, el extremo del vector $\boldsymbol{E}$ describe una espiral elíptica que se enrolla sobre la dirección del rayo.

Para obtener por este procedimiento luz polarizada circularmente se utilizan «láminas de cuarto de onda». Se llama así la lámina que produce una diferencia de marcha de $\lambda/4$ en las ondas cuyas velocidades son v_e y v_o. El espesor de esta lámina debe satisfacer la igualdad

$$\frac{2\pi}{\lambda} l (n_o - n_e) = \frac{\pi}{2} + m\pi.$$

Si sobre una lámina de este tipo incide un rayo polarizado linealmente y su vector $\boldsymbol{E}$ forma un ángulo de 45° con la dirección del

eje principal del cristal, la descomposición de dicho vector da:

$$E_x = \frac{E}{\sqrt{2}} \cos \omega t, \qquad E_y = \frac{E}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \omega t,$$

es decir,

$$E_x^2 + E_y^2 = \frac{1}{2} E^2.$$

Pero ésta es la ecuación de la circunferencia. Por consiguiente, las condiciones experimentales que hemos descrito transforman la luz polarizada linealmente en luz polarizada circularmente.

DOBLE REFRACCIÓN. El fenómeno, conocido desde hace mucho tiempo, del desdoblamiento de los objetos que se miran a través de un cristal transparente demuestra que la desintegración en dos puede producirse no sólo con respecto a las velocidades de propagación, sino también con relación a las direcciones de los rayos en el espacio. La doble refracción o birrefringencia se observa cuando la luz incide normalmente sobre la cara de un cristal (pulimentado o de formación natural) formando ángulo con el eje óptico. El fenómeno se puede estudiar también valiéndose de una lámina tallada paralelamente al eje, pero haciendo que la luz incida formando ángulo con la normal. Nos detendremos precisamente en este segundo caso. Introduciremos además otra limitación: dirigiremos el rayo de tal modo, que el plano de incidencia de la luz sea perpendicular al eje óptico.

Supongamos que un rayo polarizado incide sobre la lámina formando el ángulo i. Vamos a girar el rayo alrededor de su eje, variando de este modo la posición del vector eléctrico con respecto al plano de incidencia.

Cuando el vector eléctrico coincide con el plano de incidencia (fig. 172, *a*) no notamos ningún fenómeno particular. Se produce la refracción según la ley para los cuerpos isótropos, $\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r_o} = n_o$.

El índice de refracción resulta ser n_o; así debía ser, ya que el vector eléctrico es perpendicular al eje principal del cristal. Haciendo girar el rayo 90° alrededor de su eje (fig. 172, *b*) observaremos también la refracción ordinaria. Pero ahora $\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r_e} = n_e$, es decir, el ángulo de refracción es otro, hay que tomar el índice para el rayo extraordinario. Y esto es natural, puesto que el vector E coincide en este caso con la dirección del eje principal.

Lo más notable consiste en que en las posiciones intermedias no se observa un rayo con ángulo de refracción intermedio, sino dos rayos, el ordinario y el extraordinario, con sus respectivos índices de refracción n_o y n_e. El vector intensidad se descompone como antes en dos vectores que se encuentran, uno, a lo largo del eje principal,

y el otro, perpendicular a él. Cada componente crea su campo, su onda. Al girar el rayo de luz alrededor de su eje, la intensidad de estos dos rayos varía durante todo el tiempo; cuando un rayo se debilita, se refuerza el otro.

Como los rayos se refractan dos veces, una a la entrada y otra a la salida de la lámina, el rayo ordinario sale paralelo al extraordinario.

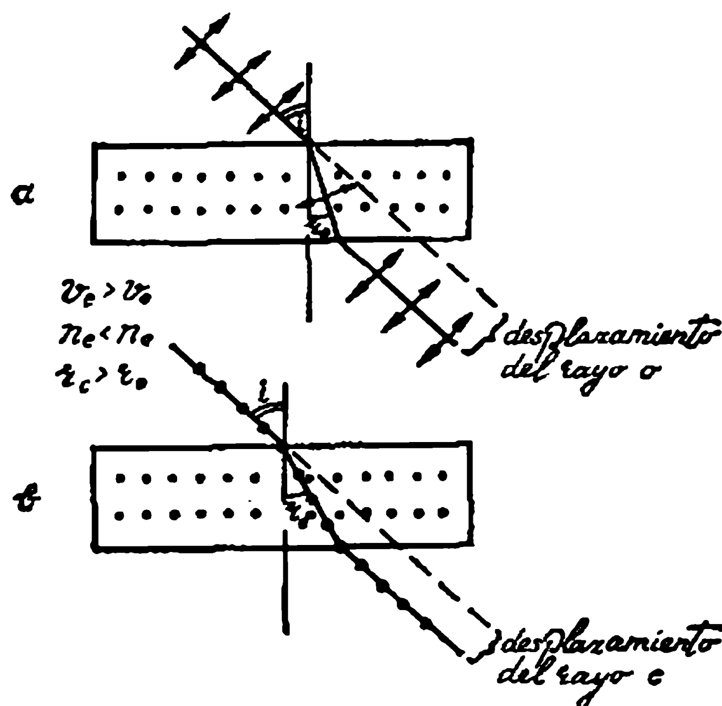


FIG. 172.

Cuanto más gruesa es la placa más se separan los rayos. Si el haz de luz incidente es estrecho, se puede medir la diferencia de índices de refracción determinando el desplazamiento de los haces.

Ahora podemos explicar el origen de las denominaciones «ordinario» y «extraordinario» de los rayos. Hagamos girar una lámina de cristal, cuyo eje óptico sea paralelo a las caras, alrededor de la normal a la cara reflectante. Si se tratara de un cuerpo isótropo, esta rotación no podría introducir cambio alguno en los fenómenos de reflexión y refracción. Girando, como hemos indicado, la lámina de cristal, veremos que con uno de los rayos no ocurre nada: su posición en el espacio y su intensidad permanecen invariables. Así se comporta el rayo ordinario. Por el contrario, la componente de E perpendicular al plano de incidencia, al girar el cristal, forma un ángulo variable con el eje principal de este último. Durante esta rotación variará, no sólo la intensidad del rayo extraordinario, sino también su posición en el espacio. Se pone de manifiesto que el

rayo extraordinario no cumple las leyes de los medios isotrópicos. En el caso general, el rayo refractado puede no encontrarse en el plano de incidencia.

No nos detendremos en dar la explicación, bastante complicada, de estos fenómenos, diremos únicamente que se subordinan perfectamente a la teoría del campo electromagnético de Maxwell.

§ 149. Polarizadores. Análisis del estado de polarización de la luz

En la pág. 352 dijimos que como polarizadores pueden usarse las superficies planas de un dieléctrico colocadas de manera que formen un ángulo φ_B con el rayo incidente. El rayo reflejado en estas condiciones estará totalmente polarizado; el rayo refractado se polariza al máximo. No obstante, el empleo de una lámina reflectora en calidad de polarizador resulta incómodo, debido a que el rayo

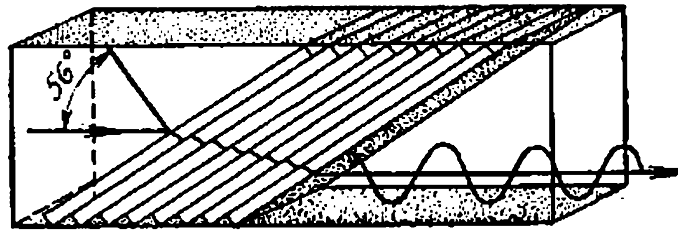


FIG. 173.

polarizado forma ángulo con el incidente. Se puede proceder de otro modo y utilizar una pila de láminas de vidrio. A costa de la refracción múltiple, se puede conseguir en este caso que la polarización sea bastante completa. Pero un dispositivo de este tipo absorbe una parte considerable de la luz (fig. 173).

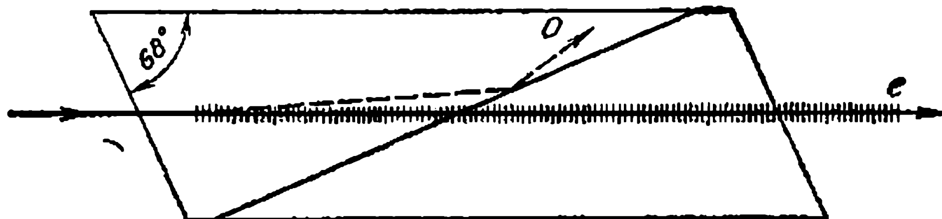


FIG. 174.

El polarizador más perfecto es un cristal en el cual, en virtud de la birrefringencia, puede separarse el rayo ordinario (o el extraordinario) polarizado linealmente. Estos polarizadores se conocen con el nombre generalizado de nicoles.

El polarizador propuesto por el científico inglés Willian Nicol consta de dos prismas rectos de espato de Islandia (fig. 174). Estos prismas se pegan con bálsamo del Canadá, sustancia cuyo índice de refracción $n=1,550$ se encuentra entre el n_o y el n_e del espato de Islandia. Cuando un rayo de luz no polarizado se encuentra con el prisma se descompone en dos. El rayo ordinario se refleja en el límite entre los dos prismas, donde se dan las condiciones para su reflexión total, y sale por un lado. El rayo extraordinario pasa a través de ambos prismas. De este modo el nicol actúa como una rendija que sólo dejara pasar las oscilaciones del vector eléctrico dirigidas de un modo determinado.

Tiene gran importancia práctica la aplicación en los polarizadores del efecto de pleocroísmo o tricoísmo (multicolor). Se da este nombre al fenómeno de la absorción desigual de los rayos ordinario y extraordinario, así como a la dependencia del coeficiente de absorción del rayo extraordinario con respecto a la dirección del eje óptico. Un cristal pleocroico da diferente coloración, absorbe la luz desigualmente si se hace girar con respecto al rayo.

Un ejemplo clásico de cristal pleocroico es la turmalina. El coeficiente de absorción para el rayo ordinario, casi en todo el espectro visible, es tan grande, que una lámina de turmalina de 1 mm de espesor, tallada paralelamente al eje óptico, transmite casi únicamente el rayo extraordinario y, por consiguiente, puede servir de polarizador. No obstante, el colorido amarillo-verdoso de la luz transmitida dificulta la aplicación práctica de turmalina como polarizador.

Se emplean mucho unas películas pleocroicas artificiales conocidas con el nombre de *polaroides*. En su fabricación se utiliza una sustancia fuertemente pleocroica, el sulfato de iodoquímica cristalizado (herapatita). El polaroide consiste en una película de plástico transparente que contiene cristalitos aciculares submicroscópicos de herapatita orientados en una dirección. Para orientar los cristalitos se somete la masa viscosa que los contiene a un movimiento alternativo de frotación entre dos vidrios. Está claro que la herapatita no es la única sustancia apta para fabricar polaroides.

Para las propiedades pleocroicas tienen mucha importancia los átomos de yodo que entran en la composición de la herapatita. También pueden hacerse polaroides iónicos puros impregnando en yodo películas estiradas de polialcohol vinílico.

El análisis del estado de polarización de la luz se efectúa valiéndose de dos nicoles u otros dispositivos polarizadores y de «láminas de cuarto de onda». En calidad de estas últimas se puede usar una hojita de mica de 0,038 mm de espesor. Consideremos el paso de la luz a través de dos nicoles. Para distinguilros entre sí,

al primer nicol que atraviesa el rayo se le llama polarizador, y al segundo, analizador (fig. 175). Si sobre el polarizador incide luz natural de intensidad I_0, de este nicol saldrá luz polarizada linealmente cuya intensidad será $\frac{1}{2} I_0$. La rotación del polarizador alrededor de su eje, como es natural, no variará en absoluto la intensidad del rayo transmitido. El nicol ha dejado pasar un rayo polarizado linealmente. Para comprobar esto se utiliza el analizador. Si ambos

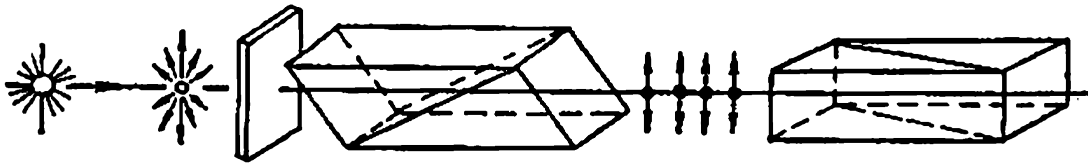


FIG. 175.

nicoles están situados de manera que sus «rendijas» sean paralelas entre sí, la luz, sin cambiar de intensidad (aquí no tenemos en cuenta la absorción de la luz por la sustancia del dispositivo polarizador), pasará a través del analizador. Cuando los nicoles están cruzados (así se llama la posición mutua en que las «rendijas» de los dispositivos forman un ángulo de 90°), la luz no pasa (fig. 175). Si el ángulo que forman las «rendijas» es α, la intensidad de la luz será $I = 1/2\ I_0 \cos^2 \alpha$. En efecto, el vector eléctrico de la onda que llega al analizador puede descomponerse en dos: uno longitudinal a la «rendija» y otro transversal a ella. Pasa la componente de la amplitud $E \cos \alpha$ (fig. 176), por lo tanto, la intensidad será proporcional a $\cos^2 \alpha$.

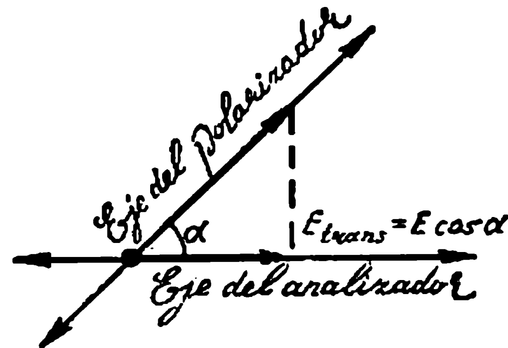


FIG. 176.

Si la luz estaba polarizada parcial o totalmente, el primer nicol lo pone de manifiesto.

Valiéndose de dos nicoles es imposible distinguir la luz polarizada circularmente de la luz natural, y la polarizada elípticamente de la natural parcialmente polarizada. Para conseguir distinguirlas puede utilizarse una lámina de 1/4 de onda. Si esta lámina se coloca delante del polarizador, esto no influye en absoluto cuando se trata de luz natural polarizada, pero transforma la luz polarizada circularmente en luz polarizada linealmente. De un modo análogo, la lámina de 1/4 de onda cambia las propiedades de la luz polarizada elípticamente.

§ 150. *Una lámina de cristal entre dos nicoles «cruzados»*

Es muy corriente analizar las sustancias anisótropas transparentes observando el comportamiento de la luz polarizada linealmente que incide entre ellas. Para no complicar el problema, supondremos que se trata de una lámina de cristal tallada paralelamente al eje óptico. Esta lámina se coloca entre dos nicoles.

Sobre la lámina incide el rayo polarizado linealmente que sale del polarizador. Quitemos la lámina y coloquemos el analizador en posición cruzada. La luz no pasará. Volvamos ahora a poner la lámina en su sitio. El campo se pone más claro, es decir, un rayo de luz pasa a través del sistema. La causa de que esto ocurra sólo puede ser una: la lámina de cristal ha cambiado el estado de polarización del rayo procedente del polarizador. ¿Cómo lo ha cambiado? Esto lo aclararemos valiéndonos del analizador: si haciendo girar el analizador hallamos una nueva posición de obscuridad, esto querrá decir que la lámina de cristal cambió la dirección de las oscilaciones del rayo sin alterar su polarización lineal. Si la rotación del analizador no influye en la intensidad de la luz, la lámina habrá transformado la luz polarizada linealmente en luz polarizada circularmente. Por fin, si haciendo girar el analizador o la lámina no se consigue extinguir la luz, pero la intensidad de ésta varía durante la rotación, tendremos que la lámina ha creado luz polarizada elípticamente.

Las variaciones ocurridas con la luz polarizada linealmente dependen de dos causas: de la posición mutua del eje óptico de la lámina y de la dirección en que oscila el rayo que sale del polarizador, y de la diferencia de fases $\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)$ que crea dicha lámina entre las ondas, ordinaria y extraordinaria, en que se desintegra la onda incidente.

Si la sustancia que se coloca entre los nicoles cruzados es isótropa no se observará ninguna variación en la claridad del campo. Este fenómeno puede aplicarse eficazmente para estudiar la anisotropía de las sustancias.

Generalmente la observación se lleva a cabo manteniendo cruzados los nicoles y haciendo girar la lámina. Durante esta rotación la claridad no será invariable. En efecto, en cada instante la amplitud A de la luz que sale del polarizador se descompondrá de un modo distinto en las componentes $A\cos\varphi$ y $A\operatorname{sen}\varphi$ (siendo φ el ángulo entre la «rendija» del polarizador y el eje óptico de la lámina). El extremo del vector eléctrico de la onda que sale de la lámina describirá una elipse:

$$\frac{E_x^2}{A^2\cos^2\varphi}+\frac{E_y^2}{A^2\operatorname{sen}^2\varphi}-\frac{2E_xE_y}{A^2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi}\cos\delta=\operatorname{sen}^2\delta,$$

donde δ es invariable y φ varía continuamente. Las transformaciones de la elipse en el caso de una lámina de $\frac{1}{4}$ de onda (en la fórmula anterior hay que hacer $\delta=90^\circ$), a medida que varía φ, se muestran en la fig. 177. Con distintos valores de φ se producirán diferentes estados de polarización.

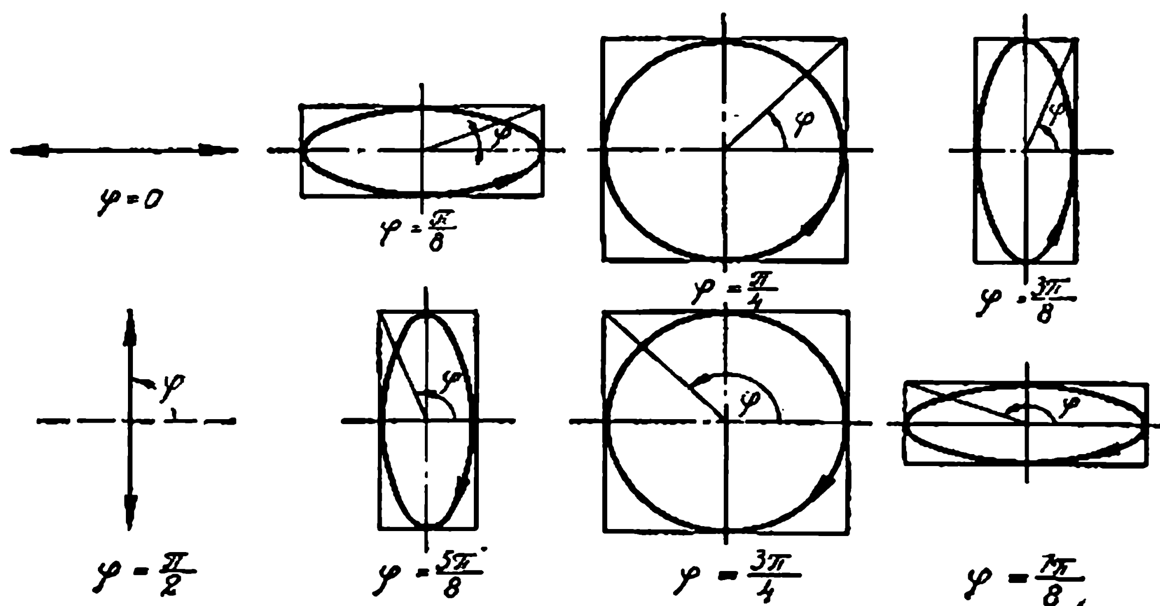


FIG. 177.

Como la diferencia de marchas δ depende de la longitud de la onda, si para la iluminación se emplea luz blanca, la figura se obtiene coloreada. Si la lámina tiene un espesor uniforme, se coloreará por igual, siendo su color distinto para cada una de las posiciones mutuas de la lámina y los nicoles. Efectivamente, para ciertas longitudes de onda del espectro de luz blanca, la lámina tendrá el espesor de $\frac{1}{4}\lambda$, para otras, $\frac{1}{2}\lambda$, y para unas terceras su espesor será un múltiplo de λ. De acuerdo con esto, para las distintas longitudes de onda se producen diferentes estados de polarización que, en mayor o menor grado, deja pasar el analizador en diversas disposiciones mutuas de la lámina y los nicoles. El fenómeno de la polarización cromática es muy bello. No es probable que por otro procedimiento cualquiera se pueda crear la riqueza de tonos y matices que aparece en el campo visual cuando varían los espesores de la lámina (por ejemplo, cuando crece el cristal) o cuando cambia su posición con respecto a los nicoles.

Si la lámina posee espesor variable se observarán franjas de interferencia irisadas si se miran a la luz blanca.

Además de estas figuras de franjas de igual espesor pueden observarse las franjas características de igual inclinación, si la lámina de cristal se mira a los rayos convergentes (análisis conoscópico). Estas observaciones pueden realizarse sobre granitos de cristal en el campo visual de un microscopio. Su importancia práctica consiste en establecer la simetría del cristalito. En particular, no ofrece dificultad resolver el problema de la pertenencia de un objeto a uno de los tres grupos siguientes: 1) sustancia amorfa o cristalina con simetría cúbica, 2) cristales uniáxicos y 3) cristales de simetría más inferior. En el primer caso las franjas de interferencia no existen. Los cristalitos uniaxiles producen la figura que se ve en la fig. 178, siempre que el eje óptico coincida con el rayo de luz incidente. La cruz oscura y poco nítida aparece en aquellos puntos a que sólo llega el rayo ordinario o sólo llega el rayo extraordinario. Como no existe la transformación en oscilación polarizada elípticamente, los nicoles cruzados no dejan pasar la luz.

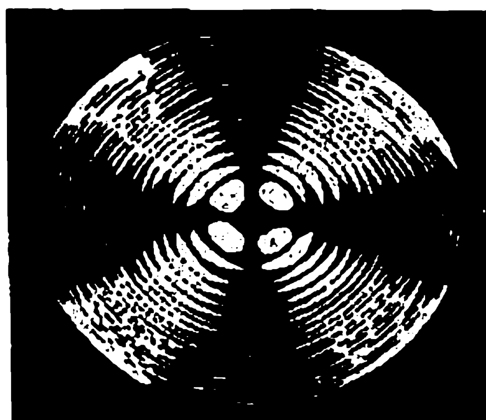


FIG. 178.

La teoría de este fenómeno ocupa mucho espacio y no nos detendremos en ella.

§ 151. Birrefringencia artificial

Como dijimos a principios del capítulo, casi todas las moléculas tienen anisotropía de polarización. Un cuerpo ópticamente isótropo puede estar constituido por moléculas anisótropas, si estas últimas están situadas desordenadamente. Y al contrario, si por cualquier procedimiento se las da a las moléculas cierta orientación preponderante, el vector de polarización, es decir, el momento dipolar total de la molécula, no tendrá ya los mismos valores en distintas direcciones, el cuerpo adquirirá anisotropía en los valores de la constante dieléctrica y, por lo tanto, anisotropía óptica.

Esta anisotropía, que se manifiesta en la aparición de la doble refracción, puede provocarse casi siempre por medio de una deformación no uniforme, si el cuerpo es sólido o, en algunos líquidos, sometiéndolos a la acción de un campo eléctrico (efecto Kerr) o creando un flujo de líquidos de aquellas sustancias cuyas moléculas tienen forma alargada. La birrefringencia se observa en los objetos biológicos, en los polímeros de alto peso molecular, es decir, en las sustancias compuestas por moléculas largas que no pueden encon-

trarse totalmente en desorden. En general, la doble refracción existe casi siempre en mayor o menor grado, ya que es extremadamente difícil crear en un cuerpo la isotropía perfecta.

Si un cuerpo se somete a compresión o tracción unilateral, aparecerá en él una anisotropía de tipo axil. Por sus propiedades ópticas, este cuerpo será semejante a un cristal uniáxico. Para observar la anisotropía óptica que se produce, lo más cómodo es colocar el cuerpo entre dos nicoles cruzados. Una ligera presión con los dedos basta para que una lámina transparente de plástico o de vidrio se haga anisotrópica; el campo visual se pondrá inmediatamente más claro. La deformación no uniforme crea distintos valores de la diferencia $n_o - n_e$ en diferentes puntos del objeto. Por esto, en el cuerpo sometido a la deformación se forman franjas de igual diferencia de fases δ. La forma de estas curvas depende de las tensiones producidas en el cuerpo. Analizando la marcha de las curvas se consigue obtener una representación clara de la distribución de las tensiones.

Este método, que proporciona datos muy valiosos, sólo es aplicable a los cuerpos transparentes, ¿cómo se puede, entonces, utilizar en la práctica? Sólo hay un camino posible: la creación de modelos de plásticos transparentes. Haciendo el modelo de un puente, de un edificio o del elemento de una máquina y sometiendo este método a cargas en la correspondiente proporción, puede verse la figura de las tensiones que se producen. La valoración cuantitativa de las tensiones por el procedimiento óptico recibe el nombre de método fotoelástico. A su explicación se dedican manuales especiales.

Cuando para la observación se utiliza luz blanca, aparecen unas figuras coloreadas singulares. Si la deformación es elástica, al eliminar la carga desaparece la figura. Y al contrario, si las tensiones no se anulan al suprimir la carga, la figura permanece.

Detengámonos ahora en la anisotropía óptica de los líquidos sometidos a la acción de un campo eléctrico.

El campo eléctrico sólo ejerce su acción orientadora cuando las moléculas del líquido poseen un momento de dipolo rígido constante. En este caso las moléculas tienden a situarse de tal modo que la dirección del momento dipolar rígido coincida con la dirección del campo. En estas condiciones el líquido adquiere propiedades de cristal uniaxil con el eje óptico a lo largo de $\boldsymbol{E}$. La manera más cómoda de observar este efecto consiste en colocar el líquido, sometido a la acción del campo, entre dos nicoles cruzados (fig. 179).

La experiencia demuestra que la diferencia $n_o - n_e$ que se produce en los líquidos es proporcional al cuadrado de la intensidad E del campo eléctrico. La diferencia de fases $\delta = BlE^2$, donde l es la longitud recorrida por el rayo de luz en el líquido, y B es la constante de Kerr característica de la sustancia.

Por tener un gran valor de B se destaca el nitrobenceno, que posee un momento dipolar rígido grande, $2\cdot 10^{-5}$ u. C.G.S. La constante de Kerr del benceno es igual a $0{,}5\cdot 10^{-7}$ u. C.G.S., y la del sulfuro de carbono, $3{,}5\cdot 10^{-7}$ u. C.G.S.

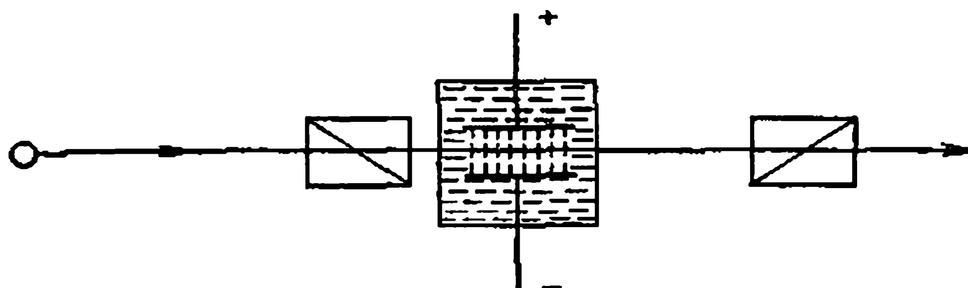


FIG. 179.

Ejemplo. Un condensador de 10 cm de longitud, lleno de nitrobenceno, se comportará como una lámina de $\frac{1}{4}$ de onda, si la tensión del campo en él es de $E=\sqrt{\frac{\pi\cdot 2}{Bl}}=26\,600$ V/cm. Para esto, si la distancia entre las placas es de 1 mm, habrá que aplicarle al condensador una diferencia de potencial de 2660 V.

El efecto Kerr da la posibilidad de transformar las oscilaciones del campo eléctrico en variaciones de la intensidad de la luz. La inercia de este efecto es pequeña: el tiempo de relajación, necesario para que las moléculas ocupen en el campo eléctrico la posición correspondiente, es una magnitud del orden de una milmillonésima de segundo. Por esto las oscilaciones eléctricas moduladas con el sonido pueden ser transformadas en variaciones de la intensidad luminosa. Esto da la posibilidad de registrar el sonido en una película fotográfica.

§ 152. Actividad óptica

Se llama actividad óptica la capacidad que tienen ciertas sustancias para hacer girar la dirección de las oscilaciones de un rayo linealmente polarizado. Este fenómeno consiste en lo siguiente. Se instalan dos nicoles cruzados y en la trayectoria del rayo se interpone la sustancia. Se produce un esclarecimiento del campo que puede anularse haciendo girar cierto ángulo α el analizador. Por lo tanto, la luz polarizada linealmente que pasó por la sustancia ópticamente activa sigue estando polarizada linealmente, pero la dirección de las oscilaciones del rayo varió en un ángulo α. La experiencia demuestra que el giro de la dirección de las oscilaciones es rigurosa-

mente proporcional al espesor de la capa de sustancia:

$$\alpha = \rho d.$$

La constante ρ que caracteriza a la sustancia se llama rotación específica y se expresa generalmente en grados por milímetro. El fenómeno posee dispersión: ρ depende de la longitud de onda. Por lo general ρ decrece al aumentar la longitud de onda.

La rotación del plano de oscilación es bastante considerable y en muchas sustancias alcanza, para una serie de ondas, decenas de grados por 1 mm. Para las soluciones acuosas de sustancias orgánicas, la rotación del plano de polarización depende de la concentración: $\alpha = \rho\, cd$, donde c es la concentración.

¿Qué sustancias son ópticamente activas? Una sustancia activa ópticamente debe estar constituida por unidades estructurales que carezcan de plano de simetría y de centro de simetría. En el caso de las sustancias moleculares, estas unidades serán, en general, las moléculas. En el caso de cristales, en que las moléculas no pueden separarse, esta unidad será la celda unitaria.

Las moléculas (o, las celdas) que satisfacen las condiciones indicadas pueden presentarse en forma de dos isómeros ópticos que se designan con las letras d y l (de dexter y laevus). Los isómeros ópticos se encuentran entre sí en una relación como la que existe entre el objeto y su imagen en un espejo. La sustancia compuesta de moléculas (celdas) d, gira la luz hacia la derecha, y la constituida por moléculas l, hacia la izquierda. Se entiende por rotación derecha aquella en que, al aumentar el espesor de la capa de la sustancia, para restablecer la obscuridad hay que hacer girar el analizador hacia la derecha, cuando se mira en dirección contraria a la del rayo de luz. Si la dirección del rayo se invierte, el signo del efecto no varía.

La actividad óptica se observa tanto en sustancias en estado líquido como en estado sólido. Lo importante es que exista en dicha sustancia un exceso de moléculas d o de moléculas l. Estas moléculas pueden estar orientadas desordenadamente u ordenadamente. En el primer caso el cuerpo será isótropo y la rotación será la misma cualquiera que sea la dirección que lleve el rayo de luz. En los cristales ópticamente activos la magnitud de la rotación α depende de la dirección que tenga el rayo con respecto a los ejes del cristal.

Si los cristales moleculares que hacen girar la luz se funden, sus unidades estructurales se conservan. En estos casos tanto la sustancia sólida como la líquida poseen actividad óptica. De ejemplo puede servir el azúcar, que además posee actividad en las disoluciones. Esta capacidad del azúcar se aprovecha en la práctica (sacarimetría) para determinar el porcentaje de azúcar por la

magnitud de la rotación que experimenta la dirección de las oscilaciones de un rayo luminoso.

En los cristales como el cuarzo (fig. 180) la cuestión se plantea de otro modo. La disposición de los átomos en la celda del cuarzo satisface las condiciones necesarias, es decir, no posee centro de simetría ni plano de simetría. En el cristal de cuarzo no se puede separar una molécula; por esta razón, cuando se funde el cuarzo, la configuración de los átomos varía y en este estado no existen las unidades estructurales precisas, por lo que el cuarzo fundido carece de actividad óptica.

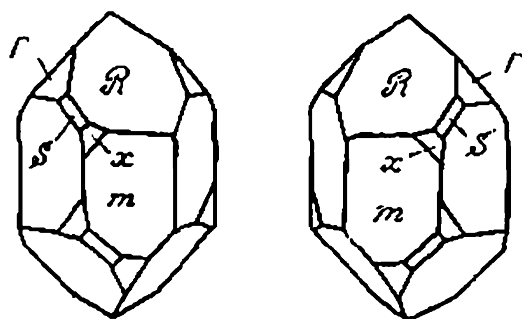


FIG. 180.

Una misma sustancia desde el punto de vista químico, puede encontarse tanto en forma ópticamente activa como no activa. Esto no sólo se refiere al cuarzo. La estructura de la modificación inactiva se parece muy poco a la de los cristales que poseen actividad óptica. Esto se comprende perfectamente en el caso de los cristales iónicos y homeopolares.

Pero en el caso de un cristal molecular, ¿cómo puede formarse un cristal inactivo con moléculas activas? Esto ocurre porque se forman cristales racémicos. Se dice que una mezcla es racémica cuando en ella hay la misma cantidad de moléculas *d* que de moléculas *l*. Esta mezcla no hace girar a la luz, ya que en ella se equilibran dos efectos opuestos. Un cristal racémico está constituido por pares de moléculas *d* y *l*. Cada uno de estos pares da un grupo de átomos de simetría central.

En cuanto a los cristales ópticamente activos, los hay de la forma *d* y de la forma *l*. Estos cristales poseen estructuras idénticas en el mismo sentido que la tiene el guante de la mano izquierda con respecto al de la derecha. Así, las caras de los cristales señaladas en la fig. 180 con una misma letra, son idénticas en este sentido precisamente. Si se trata de cristales moleculares, esto quiere decir, que en un caso la estructura está compuesta por moléculas *d*, y en el otro, por moléculas *l*. El cuarzo dextrógiro y levógiro, el azúcar dextrógiro y levógiro, el ácido tartárico dextrógiro y levógiro son sustancias cuyas propiedades y peculiaridades estructurales son idénticas a excepción de la dirección en que hacen girar la luz.

Los isómeros ópticos inorgánicos (como el cuarzo levógiro y dextrógiro) se encuentran en la naturaleza en iguales cantidades. Pero en las moléculas orgánicas que desempeñan un papel biológico, no ocurre lo mismo. El químico y bacteriólogo francés

L. Pasteur demostró que existe toda una serie de microorganismos capaz de nutrirse solamente de un isómero óptico determinado.

§ 153. Principios de la teoría de la actividad óptica

¿Cómo se explica el fenómeno de la actividad óptica? Antes de responder a esta pregunta demostraremos que la luz polarizada linealmente equivale a dos rayos polarizados circularmente, uno hacia la izquierda y otro hacia la derecha.

Escribamos las ecuaciones de la oscilación del vector eléctrico suponiendo que entre las ondas izquierda y derecha existe un desplazamiento de fase δ. En la polarización circular a la derecha

$$E_x^d = E_0 \cos \omega t, \qquad E_y^d = E_0 \operatorname{sen} \omega t;$$

y para la luz polarizada a la izquierda

$$E_x^i = E_0 \cos(\omega t + \delta), \qquad E_y^i = -E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \delta).$$

El campo resultante tiene las componentes $E_x = E_x^d + E_x^i$ y $E_y = E_y^d + E_y^i$.

Para ver el estado de polarización de la oscilación que se produce, hallemos la relación E_y/E_x para el campo resultante. Valiéndonos de simples transformaciones trigonométricas, obtenemos que

$$\frac{E_y}{E_x} = -\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}.$$

Esta relación no depende del tiempo, lo que significa que existe una oscilación polarizada linealmente que se cumple formando un ángulo $\delta/2$ con eje x. Esto es lo que queríamos demostrar.

Desde este punto de vista está claro en qué consiste el fenómeno de la rotación de la dirección de las oscilaciones. El giro del plano de oscilación en un ángulo $\delta/2$ significa que la onda levógira está retrasada con respecto a la dextrógira (o al contrario, en dependencia de la dirección que tenga la rotación) en un ángulo δ. Este razonamiento justifica el estudio del problema de la actividad óptica en el capítulo dedicado a la doble refracción. Aquí, lo mismo que antes, la onda es desdoblada por la sustancia en dos componentes, una de las cuales se mueve más de prisa que la otra y la adelanta continuamente en fase. Desde este punto de vista, la rotación específica es proporcional a la diferencia entre los índices de refracción de los rayos izquierdo y derecho.

Con estos razonamientos no hemos adelantado nada en la explicación del fenómeno. Lo único que hemos hecho es darle otra in-

terpretación (completamente equivalente). Sin embargo, este nuevo planteamiento del problema nos permite explicar más fácilmente la actividad óptica. Las ondas, polarizadas circularmente hacia la izquierda y hacia la derecha, se mueven por la sustancia a distinta velocidad. Tienen distintos índices de refracción y, por lo tanto, diferentes constantes dieléctricas y polarizabilidades. Los desplazamientos de la nube electrónica sometida a la acción de estas dos ondas deberán ser distintos; una onda encuentra mayores dificultades que la otra para desplazar los electrones de sus posiciones de equilibrio. Si hallamos la causa de esta diferencia, la explicación de la actividad óptica estará dada.

Por la química sabemos que: si en una molécula existe un átomo de carbono asimétrico, la sustancia puede presentar actividad óptica. Los químicos entienden por átomo de carbono asimétrico, el átomo C ligado con cuatro átomos o radicales diferentes.

Las ligaduras de un átomo de carbono tetravalente van, aproximadamente por los ángulos tetraédricos, una hacia otra. En la fig. 181 se representa cierta molécula que contiene un átomo de carbono asimétrico. Los radicales o átomos ligados con C son distintos; su naturaleza no tiene importancia. Vemos ante todo que

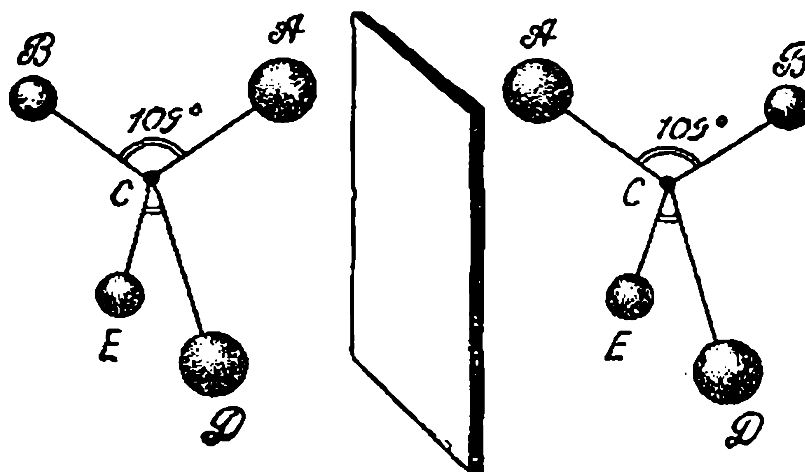


FIG. 181.

pueden existir dos moléculas de esta sustancia, semejantes entre sí, como un objeto y su imagen en el espejo, es decir, ópticamente isómeras. Hacerlas coincidir es imposible; para convencerse no hay más que hacer sus modelos de alambre.

Figurémonos una onda polarizada circularmente que avance a lo largo del eje de simetría de los enlaces. En la fig. 182 la onda avanza perpendicularmente al plano, hacia nosotros. Los átomos A, B están más altos que los E, D. Consideremos las direcciones de los

desplazamientos electrónicos para una onda polarizada de izquierda a derecha. Cuando la onda está polarizada hacia la derecha, admitimos que existe el siguiente cuadro: si el vector E está dirigido a lo largo de ED, en el «piso» superior el vector E está dirigido a lo largo de BA. Si esto es así, en la onda polarizada hacia la izquierda tendremos otro cuadro: cuando el vector E está dirigido a lo largo de ED, en el «piso» superior el vector E está dirigido a lo largo de AB.

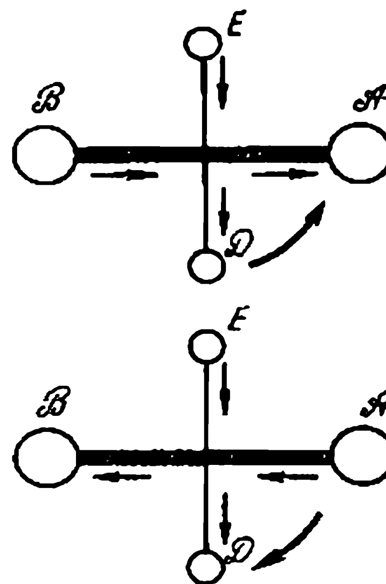


FIG. 182.

Observando las figuras vemos que el comportamiento de los electrones que se desplazan es diferente. En un caso los electrones de los átomos A y D se mueven simultáneamente alejándose del centro. En el otro caso, cuando los electrones de A se mueven hacia el centro, los electrones de D se mueven alejándose del centro. Estas diferencias las encontramos siempre en los sistemas de átomos que no poseen centro de simetría y plano de simetría. Por el contrario, en presencia de estos elementos de simetría serán idénticas las acciones de las ondas izquierda y derecha.

La diferencia de condiciones de desplazamiento de los electrones en las agrupaciones asimétricas conduce a la distinta polarizabilidad y, por lo tanto, a que los índices de refracción de las ondas izquierda y derecha sean distintos. Está claro que el comportamiento de una molécula levógira será inverso al de una dextrógira.

En la teoría rigurosa se demuestra que el efecto se conserva cualesquiera que sean las posiciones de las moléculas con respecto al rayo.

24

TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

§ 154. *Fundamentos de la teoría*

La teoría de la relatividad, creada a principios de nuestro siglo por el gran físico moderno Albert Einstein, se basa en dos postulados: 1) el principio de la relatividad, y 2) el principio de la constancia de la velocidad de la luz. Ahora estudiaremos someramente el

contenido de estos principios y hablaremos de su confirmación experimental y de ciertas consecuencias de la teoría.

La teoría de la relatividad surgió cuando se estudiaba el problema de la existencia de un portador mecánico del campo electromagnético (el éter). La teoría de la relatividad resolvió este problema y, en este sentido, puede considerarse como la conclusión de la teoría del campo electromagnético. Pero al resolver los problemas planteados por la electrodinámica, la teoría de la relatividad rebasó considerablemente el marco de estos problemas. Su desarrollo condujo al establecimiento de las leyes de los movimientos mecánicos cuya velocidad se aproxima a la de la luz, a la ley de la equivalencia de la masa y la energía, a las nuevas concepciones acerca de la naturaleza de la gravitación. Nuestras consideraciones van a ser necesariamente muy concisas y, por esto, nos veremos obligados a prescindir de la perspectiva histórica.

Empezaremos por el contenido de los postulados fundamentales.

El principio de la relatividad afirma que todas las leyes de la naturaleza (y no sólo las de la mecánica) son iguales en todos los sistemas inerciales de coordenadas. Este principio afirma que no existe ni un solo experimento físico que pueda demostrar que uno de los sistemas inerciales tiene propiedades especiales. Todos los sistemas inerciales son equivalentes.

El segundo postulado dice que la velocidad de la luz en el vacío es constante para todos los sistemas inerciales de referencia. De este postulado se deduce que la velocidad de la luz debe ser igual «a la ida» y «a la vuelta», que dicha velocidad no depende del movimiento del foco luminoso ni del de los instrumentos de medida.

¿Qué relación tienen estos principios con nuestras ideas acerca del campo electromagnético y de su portador? No es difícil comprobar que los principios que hemos enunciado excluyen la analogía entre las ondas electromagnéticas y, por ejemplo, las sonoras.

Figurémonos un laboratorio, aislado del mundo exterior, que se mueva rectilínea y uniformemente con respecto a las estrellas. En este laboratorio se mide la velocidad del sonido en la dirección del movimiento. Teóricamente pueden ocurrir dos casos: primero, que las paredes del laboratorio sean impenetrables al aire y este último sea arrastrado por aquél, y segundo, que las paredes sean penetrables al aire, que éste se encuentre en reposo con respecto a las estrellas, y que el laboratorio se mueva a través del aire sin arrastrarlo. Supongamos que en ambos casos se mide la velocidad del sonido. La medida la efectúan dos observadores: uno que se mueve y otro que está en reposo con relación a las estrellas. En cada caso la velocidad del sonido será distinta para estos dos observadores. Si la velocidad del sonido en el aire es c y la velocidad del laboratorio con respecto al observador en reposo es v, en el caso en que el

aire es arrastrado, el observador móvil hallará que la velocidad es igual a c, mientras que el observador en reposo considerará que es $c+v$; en el caso en que el aire está en reposo, el observador móvil determinará que la velocidad del sonido es igual a $c-v$, y el que está en reposo, que es $-c$.

Los postulados de la teoría de la relatividad rechazan ambas variantes para las ondas electromagnéticas. En los experimentos con una onda luminosa, la velocidad de la luz será igual a c tanto para el observador en reposo como para el que se mueve. Por consiguiente, el éter tanto en reposo como arrastrado por el sistema, contradice a la teoría de la relatividad. De este modo, la teoría de la relatividad niega la posibilidad de imaginar el campo como un medio en el cual tienen lugar desplazamientos mecánicos. Llegamos a la conclusión de que los campos eléctrico y magnético deben ser una realidad espontánea.

§ 155. Confirmaciones experimentales del principio de la constancia de la velocidad de la luz

A primera vista el principio de la constancia de la velocidad de la luz contradice al «sentido común». Por esto, antes de comenzar a deducir las consecuencias de la teoría de la relatividad, conviene dar a conocer las demostraciones experimentales directas de su exactitud. Estas demostraciones se deben a observaciones astronómicas.

Los astrónomos han demostrado la existencia de las llamadas estrellas dobles, en las cuales dos cuerpos celestes de masas aproximadamente iguales giran alrededor de su común centro de gravedad. Se dispone de medios para medir la distancia entre las estrellas, su masa y velocidad, y de seguir sus movimientos relativos. Si la velocidad de la luz dependiera de la velocidad de la propia estrella, cuando ésta se moviera en dirección al observador, que se encuentra en la Tierra, la velocidad de la luz se sumaría a la velocidad del cuerpo celeste, y cuando se moviera en dirección opuesta, estas velocidades se restarían. En este caso al observador terrestre le parecería que el movimiento por una mitad de la órbita es más rápido que por la otra. Este efecto se observaría incluso en el caso en que la velocidad del cuerpo celeste v fuera centenares de millares de veces menor que la velocidad de la luz c.

En efecto, a una distancia l enorme, la diferencia de los tiempos $\frac{l}{c-v}$ y $\frac{l}{c+v}$ puede ser, hasta para los valores más pequeños de v, tan considerable, que no sólo se alteraría la periodicidad, sino que incluso el rayo lanzado durante el movimiento «de ida» podría

alcanzar el rayo lanzado durante el movimiento «de vuelta». En estas condiciones la rotación de las estrellas dobles no se varía o tomaría un carácter raro. La periodicidad de la rotación de estas estrellas sólo puede comprenderse basándose en el principio de la constancia de la velocidad de la luz.

Es cierto que aquí nos hemos referido al movimiento del foco luminoso y, por lo tanto, podría dudarse aún de la exactitud del principio de la constancia de la velocidad de la luz en el caso en que se mueve el observador. Estas dudas son desvanecidas por otra observación astronómica, la de la periodicidad del movimiento de los satélites de Júpiter. Las mediciones de los movimientos de los satélites de Júpiter se pueden efectuar en dos casos: cuando la luz que va de Júpiter a la tierra coincide en dirección con el movimiento del sistema solar, y en el caso contrario. La identidad de las observaciones y la clara visión de la periodicidad relacionada con el movimiento anual de Júpiter demuestran también en este caso la exactitud del principio de la constancia de la velocidad de la luz.

El papel más importante en el desarrollo de la teoría de la relatividad lo desempeñó el experimento que por vez primera realizó A. Michelson en 1881 valiéndose del interferómetro descrito en la pág. 380. El experimento consistió en lo siguiente. Las posiciones de los dos espejos, es decir, las longitudes de los brazos l_1 y l_2 se tomaban de tal modo que los rayos coherentes en que se desdoblaba la señal luminosa tardaran el mismo tiempo en recorrer los caminos a lo largo de los dos brazos del interferómetro. Esta elección se hacía con el interferómetro colocado de forma que uno de sus brazos estaba orientado a lo largo de la trayectoria de la esfera terrestre por su órbita. Después se le daba al aparato un giro de 90° y se observaba el desplazamiento de las franjas de interferencia.

El resultado del experimento de Michelson, repetido multitud de veces por él y por otros investigadores, es el siguiente: no hay desplazamiento de las franjas, el tiempo que tarda la luz en recorrer los brazos, que es igual en una posición, continúa siendo igual después de girar el aparato. Esta circunstancia se ha comprobado con gran exactitud.

¿Qué se deduce de esta experiencia?

Como la Tierra se mueve con la velocidad de $v \approx 30$ km/s con respecto a las estrellas fijas, los caminos recorridos por los dos rayos, desde el punto de vista de un observador inercial estelar, no pueden ser iguales.

Analicemos el recorrido de ambos rayos (fig. 183). Está claro que debemos prestar atención únicamente a las partes del recorrido en que los rayos marchan separados. El rayo longitudinal debe recorrer en el camino «de ida» la distancia l_1 y alcanzar al espejo,

que se aleja con la velocidad v. Por lo tanto, el camino recorrido por el rayo deberá ser $c\tau_1 = l_1 + v\tau_1$. El tiempo empleado por el frente de onda en este recorrido será

$$\tau_1 = \frac{l_1}{c(1 - v/c)}.$$

En el camino «de vuelta», el rayo recorrerá la distancia l_1 menos el camino recorrido a su encuentro por el aparato. Por lo tanto, el

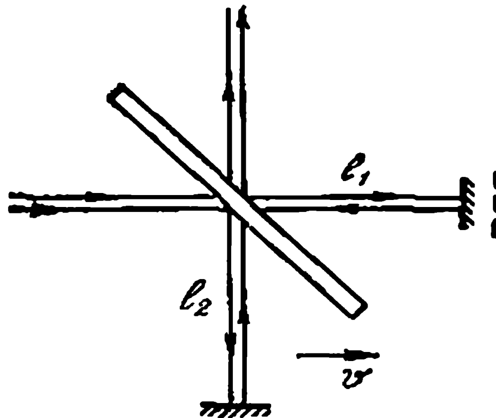


FIG. 183.

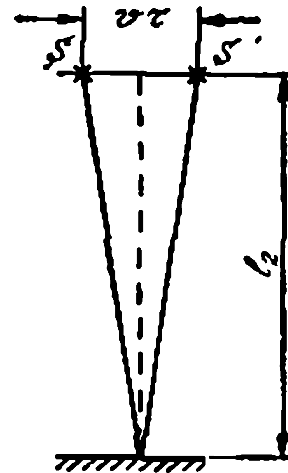


FIG. 184.

camino recorrido por el rayo será $c\tau_2 = l_1 - v\tau_2$ y

$$\tau_2 = \frac{l_1}{c(1 + v/c)}.$$

El tiempo medido en el experimento $\tau_1 + \tau_2$ es igual a

$$\frac{2l_1}{c(1 - v^2/c^2)}.$$

Veamos ahora lo que ocurre con el rayo transversal (fig. 184). Durante el tiempo total τ transcurrido desde el instante de la salida del rayo hasta el instante de su retorno al centro del aparato S, el espejo se habrá trasladado como indica la figura. Por consiguiente, el camino recorrido por la onda será

$$c\tau = 2\sqrt{l_2^2 + \left(\frac{v\tau}{2}\right)^2},$$

de donde el tiempo τ será igual a

$$\frac{2l_2}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Durante la primera medición se tomaban los brazos l_1 y l_2 de modo que los rayos tardaran el mismo tiempo en recorrer los caminos separados. Por lo tanto,

$$\frac{2l_1}{c(1-v^2/c^2)}=\frac{2l_2}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \text{ ó } \frac{l_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=l_2.$$

En el segundo experimento, o sea, después de hacer girar 90° el aparato, no se produce desplazamiento de las franjas de interferencia, y el tiempo empleado en el recorrido sigue siendo el mismo, aunque los brazos l_1 y l_2 se permutaron entre sí. En esto consiste lo sorprendente del resultado de la experiencia.

Así, pues, si el primer brazo está orientado longitudinalmente,

$$l_1=l_2\sqrt{1-v^2/c^2};$$

si el segundo brazo está orientado longitudinalmente,

$$l_2=l_1\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Si la velocidad v fuera nula, $l_1=l_2$, pero como $v\neq 0$, llegamos a un resultado maravilloso: la longitud de un mismo segmento varía en dependencia de cómo está colocado, longitudinalmente a la dirección del movimiento o transversalmente a ella. El resultado obtenido es correcto para cualquier cuerpo y para cualquier distancia entre dos puntos. De este modo, la primera consecuencia de la teoría de la relatividad es: que un cuerpo que se mueve con respecto a un observador inercial, se acorta en la dirección del movimiento. Sus dimensiones transversales permanecen invariables. Si un observador que se halle en reposo con respecto al objeto establece que la longitud de éste es l_0, el observador con respecto al cual se mueve dicho objeto con la velocidad v encontrará que su longitud $l=l_0\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Ejemplo. Si un objeto se mueve con la velocidad de 1000 km/s con respecto a cierto observador «en reposo», éste descubrirá una disminución de la longitud de dicho objeto, en la dirección del movimiento, de 1,000005 veces. Pero si la velocidad del objeto fuera de 200 000 km/s, $l_0/l=1{,}34$.

En distintos sistemas de referencia, la longitud de un mismo segmento, que se mueve de un modo determinado, será distinta. Hay que comprender claramente el carácter relativo de este acortamiento. Tomemos dos varillas de igual longitud l_0. Hagamos que se muevan con una velocidad relativa v. Supongamos que hay dos observadores: uno, que se mueva con la primera varilla, y otro, que se mueva con la segunda. En este caso el primer observador hallará que la longitud de su varilla es l_0, mientras que la de la otra es

$l_0\sqrt{1-v^2/c^2}$. Para este observador la segunda varilla es más corta que la primera. El segundo observador, por el contrario, hallará que la longitud de la segunda varilla es l_0 y la de la primera $l_0\sqrt{1-v^2/c^2}$; para él es más corta la primera varilla que la segunda.

La longitud de la varilla y, en general, la distancia entre dos puntos es un concepto relativo. Entre todas las longitudes de una varilla medidas en distintos sistemas inerciales, destaca la longitud en reposo l_0. Esta longitud máxima de la varilla tiene sentido absoluto.

§ 156. El tiempo en la teoría de la relatividad

En las expresiones que ligan la longitud de una varilla en reposo y en movimiento aparece la magnitud $\sqrt{1-\beta^2}$ ($\beta=v/c$). Esta raíz cuadrada aparece también en otras fórmulas análogas que relacionan los valores de diferentes magnitudes físicas para observadores en reposo y en movimiento. Razonamientos semejantes a los que utilizamos en el párrafo precedente conducen a deducciones interesantes con respecto al tiempo y a la aceleración, a la masa y a la fuerza, al impulso y a la energía, a la intensidad del campo, a la densidad de la carga y la corriente, etc. Las fórmulas de la teoría de la relatividad permiten pasar de los valores establecidos por un observador en reposo a las que encontraría un observador en movimiento. La relación $\beta=v/c$ es en todos los casos un criterio importante de la necesidad de introducir la corrección relativista.

No es difícil comprender que β^2 sólo toma valores comparables con la unidad cuando las velocidades son enormes. Incluso cuando $v=100\,000$ km/s, $\sqrt{1-\beta^2}$ sólo se diferencia de la unidad en varios tantos por ciento. Está claro por esto que las conclusiones de la teoría de la relatividad no ofrecen interés cuando se trata de movimientos lentos, y en estos casos no hay que tener en cuenta la variación de las propiedades físicas debida al movimiento. Esta teoría adquiere una importancia especial para el micromundo, donde las partículas tienen con mucha frecuencia velocidades próximas a la de la luz.

Nos detendremos primeramente en las conclusiones de la teoría de la relatividad referentes al tiempo.

El intervalo de tiempo τ durante el cual se produce un suceso también resulta ser diferente desde el punto de vista de dos sistemas inerciales. Por esta razón, dos sucesos simultáneos desde un punto de vista, ocurrirán uno antes y otro después desde el punto de vista de otro sistema de referencia.

Cualitativamente esta afirmación se deduce del principio de la constancia de la velocidad de la luz. En efecto, consideremos un

sistema que se mueva rectilínea y uniformemente con respecto a otro sistema inercial. En uno de ellos se ha instalado un emisor cuya luz se propaga en todos los sentidos. En el sistema en que se halla el foco tomamos dos puntos, equidistantes de este último, a lo largo de la recta que va en la dirección del movimiento relativo. Está claro que en este sistema llegará la luz simultáneamente a ambos receptores. Así se plantea el problema desde el punto de vista del observador que se mueve con el foco de luz. Sin embargo, para el observador que se encuentra en el segundo sistema el problema se plantea de otro modo. Para este observador uno de los receptores se mueve al encuentro de la señal, mientras que el otro se aleja de ella. Y como la velocidad c tiene también para este observador el mismo valor (y es igual en ambos sentidos), para él llega antes la luz al receptor que se halla detrás del foco.

¿No nos conducirá esta conclusión a un absurdo? Como quiera que el concepto de simultaneidad es relativo, puede ocurrir que, desde el punto de vista de un sistema de referencia, primero dispare la escopeta y después caiga de la rama el pájaro herido, y desde el punto de vista de otro sistema de referencia, caiga el pájaro antes de que dispare la escopeta. Pero un análisis minucioso demuestra que la relatividad en la sucesión de los sucesos está limitada por la velocidad de propagación de la interacción (que es menor que c). Por esto «antes» o «después» sólo pueden permutar entre sí en aquellos casos en que no se hallan en nexo casual (es decir, cuando no son el resultado de una interacción).

Son muy interesantes las deducciones de la teoría relativas al tiempo propio del objeto, es decir, del tiempo contado por el reloj que se mueve junto con el cuerpo dado. Si según el reloj de un observador de cierto sistema inercial transcurrió un tiempo τ, las agujas del reloj que se mueve con el objeto marcarán el tiempo,

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1-\beta^2}.$$

Esto quiere decir que un reloj que se mueva arbitrariamente marchará más despacio que otro que esté en reposo *).

El sentido relativo de esta afirmación debe comprenderse claramente. Si dos observadores se encuentran en diferentes sistemas inerciales, cada uno afirmará que se retrasa el reloj del otro observador. Al parecer se plantea una contradicción. Dejemos a los observadores y comprobemos sus relojes. Para hacer esta comprobación es necesario que, por lo menos, uno de los observadores recorra una trayectoria anular. Cuando retorne al punto de partida, los relojes

*) Esta fórmula se ha confirmado en los experimentos con mesones μ (véase la pág. 633).

se podrán comprobar. Pero ahora los razonamientos de los observadores habrán perdido su relatividad. El observador que permaneció en el sistema inercial tendrá derecho a aplicar la fórmula que hemos dado anteriormente. Pero el observador que realizó el recorrido circular lo hizo con movimiento acelerado y, por consiguiente, no puede aplicar la fórmula $\tau_0=\tau\sqrt{1-\beta^2}$. Por lo tanto, después del regreso del observador «circular» y de comprobar los relojes, resulta que su reloj está atrasado y que él no puede «refutar» este resultado basándose en el principio de la relatividad, que sólo es válido para los observadores inerciales.

§ 157. *La masa*

Llamando m_0 a la masa de un cuerpo medida en el sistema de coordenadas ligado a ella, para el observador con respecto al cual este cuerpo se mueva, la masa será

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

La magnitud m_0 recibe el nombre de *masa en reposo*. El aumento de la masa con la velocidad es una consecuencia natural de los principios fundamentales de la teoría. La velocidad de la luz c es la velocidad máxima para cualesquiera movimientos o transmisiones de interacción. Cuando $v=c$, la masa de cualquier cuerpo se hace infinita. Es natural que la aceleración del cuerpo se hace tanto más difícil cuanto más nos aproximamos al límite de la velocidad posible.

El aumento de la masa con la velocidad fue establecido por vez primera, a principios de nuestro siglo, para los electrones de los rayos β. Como es posible determinar separadamente la velocidad de los electrones v y la relación e/m (véase la pág. 491), considerando invariable la carga del electrón, tenemos la posibilidad de comprobar la fórmula de la masa.

En la actualidad, las correcciones que proporciona el factor $\sqrt{1-\beta^2}$ desempeñan un papel decisivo en el diseñado de los aceleradores de partículas cargadas. Las velocidades de las partículas que se alcanzan en los aceleradores modernos son tan grandes, que, por ejemplo, en uno de ellos llega a 0,9986, y, por lo tanto, la masa se hace 60 veces mayor que la masa en reposo. En todos los experimentos que se realizan en las condiciones de la Tierra con cuerpos macroscópicos, no es necesario tener en cuenta la corrección $\sqrt{1-\beta^2}$ al valor de la masa. Pero al mismo tiempo sería conveniente convencerse de que es correcta no sólo para las partículas elementales.

Esta posibilidad la dan las observaciones astronómicas exactas. Resulta que la variación de la masa del planeta Mercurio al moverse por su órbita explica las desviaciones de ésta con respecto a la elipse.

La expresión de la masa del cuerpo en movimiento varía la fórmula del impulso, la cual toma la forma

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Advertimos que la ley de Newton sigue en vigor si se escribe como $F = \frac{dp}{dt}$. Sin embargo, la fórmula $F=ma$ ya no será correcta en todos los casos.

§ 158. *La energía*

En el § 10 encontramos la expresión de la energía de un cuerpo en movimiento, hallando la función en aumentar la cual se gasta el trabajo de aceleración del cuerpo. Repitamos ahora estos cálculos teniendo en cuenta las correcciones que da la teoría de la relatividad.

El trabajo necesario para trasladar un cuerpo una distancia dl es igual a

$$F\,dl = \frac{dp}{dt}\,dl = dp\,\frac{dl}{dt} = v\,dp,$$

donde $\boldsymbol{v}$ es el vector velocidad. Si este trabajo se emplea en aumentar la energía $\mathscr{E}$ del cuerpo,

$$d\mathscr{E} = \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}\,d\,(m\boldsymbol{v}) = m\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{v} + v^2\,dm.$$

Y como

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ tenemos que } dm = \frac{m\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{v}}{c^2(1-\beta^2)},$$

es decir,

$$d\mathscr{E} = \left(1 + \frac{v^2}{c^2(1-\beta^2)}\right) m\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{v}, \text{ o sea, } d\mathscr{E} = \frac{m\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{v}}{(1-\beta^2)}.$$

Comparando esta expresión con la fórmula del incremento de la masa, hallamos: $d\mathscr{E}=c^2\,dm$, es decir,

$$\mathscr{E} = mc^2.$$

Prescindimos de la constante aditiva que aparece al integrar, porque cuando $m=0$, $\mathscr{E}$ también debe ser nula.

De este modo, el trabajo que se le comunica al cuerpo se emplea en aumentar la función $\mathcal{E}=mc^2$, que, por consiguiente, adquiere el sentido de energía del cuerpo.

El resultado fundamental de este cálculo consiste en lo siguiente: el aumento de la masa del cuerpo va acompañado del aumento de su energía (y, por lo tanto, de un gasto de energía externa); por el contrario, la disminución de la masa del cuerpo o del sistema va acompañada de una disminución de la energía (y, por consiguiente, de su transmisión al medio circundante). Entre el incremento de la masa y el incremento de la energía existe una relación directa y universal, puesto que c^2 es un número constante.

Pero, ¿qué sentido debe dársele a la energía $\mathcal{E}$? ¿Es, acaso, la energía del movimiento?, No, evidentemente. Si el cuerpo está en reposo, $\mathcal{E}$ no se anula, sino que toma el valor m_0c^2. Por lo tanto, $U=m_0c^2$ es la energía del cuerpo en reposo, es decir, la energía intrínseca del cuerpo, y la diferencia $mc^2-m_0c^2$ es la energía del movimiento.

La primera parte de la oración precedente debe considerarse como una afirmación que hay que comprobar en la práctica. En cuanto a la expresión de la energía del movimiento, $mc^2-m_0c^2$, reconocemos en ella la expresión de la energía cinética, si se utiliza la igualdad aproximada

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\approx 1+\frac{1}{2}\beta^2.$$

Con este grado de exactitud

$$mc^2-m_0c^2=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\approx m_0c^2\frac{1}{2}\beta^2=\frac{m_0v^2}{2}.$$

Ejemplo. La energía interna de un cuerpo de masa $m_0=1$ kg será $U=m_0c^2=$ $=9\cdot 10^{16}$ J $=2{,}16\cdot 10^{13}$ kcal. Esta cantidad de energía es igual a la que se desprendería en forma de calor si se quemaran 3 millones de toneladas de carbón. Incluso en las reacciones termonucleares sólo se liberan hasta ahora algunos tantos por ciento de estas enormes reservas de energía interna.

§ 159. *Defecto de masa*

Como acabamos de decir, la expresión que relaciona la masa en reposo con la energía intrínseca del cuerpo, $U=m_0c^2$, debía ser sometida a comprobación experimental.

La energía interna del cuerpo se compone de la energía en reposo de las partículas que lo forman, de su energía cinética y de su energía potencial de interacción. La variación de cualquiera de estas

energías componentes debe influir en el valor de U y, por consiguiente, en el de la masa en reposo. De este modo, la masa en reposo aumenta si se eleva la temperatura del cuerpo, es decir, si se hace más rápido el movimiento interno del sistema. También aumenta si se aproximan las partes del sistema que se repelen o se separan las que se atraen.

De lo dicho se deduce claramente que la masa en reposo de un sistema de partículas que interaccionan no posee la propiedad de ser aditiva, es decir, no se somete a la ley de conservación. Si un cuerpo de masa en reposo M_0 consta de N partículas de masa m_0, $M_0 \neq N m_0$. La diferencia

$$M_0 - N m_0 = \Delta M$$

se llama *defecto de masa* del cuerpo (o sistema de partículas). La magnitud

$$c^2 \Delta M$$

se llama *energía de enlace* o *de ligadura*.

Si el sistema se disgrega en partes, la energía de enlace se desprende y puede medirse. También puede medirse directamente la masa en reposo. Así, pues, la ley $U = m_0 c^2$ puede comprobarse experimentalmente.

Los ejemplos numéricos demuestran que ninguna variación de la energía interna, ligada con la variación de la velocidad del movimiento y con las fuerzas de interacción entre las moléculas y los átomos, puede dar por resultado una variación de la masa que pueda medirse. La comprobación experimental de la teoría que hemos expuesto resulta ser posible en la física nuclear (véase la pág. 599).

Ejemplos. 1. La masa de 1 kg de molibdeno, al ser calentada en 1000°,K aumenta en $\Delta M = 0{,}000000003$ g.

2. Si una varilla de acero de 128 cm de longitud y 1 cm² de sección transversal (cuya masa será de 1 kg) se estira con una fuerza de 8 t, la energía potencial que se acumula en ella al ocurrir esto hace que aumente su masa en $2 \cdot 10^{-12}$ g.

§ 160. *Principio de equivalencia y nociones de la teoría general de la relatividad*

Consideremos un sistema de coordenadas no inercial que se mueva con la aceleración $\boldsymbol{a}_0$. Supongamos que hay que describir los fenómenos físicos en este sistema. Las leyes de la mecánica tendrán en él una forma distinta, ya que la regla $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ sólo es correcta cuando se trata de un sistema inercial. Los cuerpos en reposo tendrán, con respecto a este sistema, la aceleración $-\boldsymbol{a}_0$.

Si conservamos la terminología que es correcta para el sistema inercial y suponemos que la aceleración es creada por fuerzas, el campo de las «fuerzas» $-m\boldsymbol{a}_0$ que actúan sobre todos los cuerpos en el sistema acelerado puede llamarse campo de aceleración y establecer una analogía entre este campo y el de gravitación.

De igual modo se pueden introducir campos de «fuerzas» adicionales cuando se estudian los fenómenos en un sistema de coordenadas giratorio y, como es lógico, en el caso general. Los campos de fuerzas ficticios que introducimos para describir el movimiento desde el punto de vista del sistema no inercial de coordenadas se pueden llamar campos de fuerzas de inercia. La fuerza $-m\boldsymbol{a}_0$ es una de estas fuerzas de inercia.

El movimiento de un punto con la aceleración $\boldsymbol{a}$, respecto a un sistema no inercial de este tipo, cumplirá la ecuación

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \text{fuerza de inercia.}$$

Las expresiones de las fuerzas de inercia pueden encontrarse en los cursos de física teórica.

Lo importante es prestar atención a la parte esencial del problema. En los sistemas no inerciales aparecen campos de fuerzas ficticios. A cada campo de aceleración de este tipo se le puede asimilar una distribución ficticia de masas que atraen, de manera que cualquier campo creado por un movimiento acelerado puede interpretarse, en general, como un campo gravitatorio. En este sentido se habla a veces del principio de equivalencia de la gravitación y la aceleración.

Veamos algunos ejemplos elementales. Nos encontramos en un ascensor que desciende con una aceleración a y dejamos caer una bolita que teníamos en la mano. ¿Qué carácter tendrá la caída de la bolita? En cuanto soltamos la bolita, ésta, desde el punto de vista de un observador inercial, comenzará a caer libremente con la aceleración g. Como el ascensor desciende con la aceleración a, la aceleración de la bola con respecto al suelo del ascensor será $(g-a)$. El observador que se halla en el ascensor puede describir el movimiento del cuerpo que cae por medio de la aceleración $g=g'-a$. En otras palabras, el observador que se encuentra en el ascensor, en vez de referirse al movimiento acelerado de éste, puede «variar» la aceleración del campo gravitatorio de su sistema.

Comparemos ahora dos ascensores. Uno de ellos pende inmóvil sobre la Tierra, el otro se mueve en el vacío interplanetario con una aceleración a con respecto a las estrellas. Todos los cuerpos que se encuentran en el ascensor que está inmóvil sobre la Tierra son capaces de caer libremente con la aceleración g. Pero esta misma capacidad la poseen también los cuerpos que se hallan en el ascensor

interplanetario. Estos «caerán» con la aceleración — a en el «suelo» del ascensor. En este caso desempeñará el papel de suelo la pared opuesta al sentido de la aceleración.

Resulta, pues, que la acción del campo de la gravedad es indistinguible de la manifestación del movimiento acelerado.

El comportamiento de los cuerpos en un sistema de coordenadas que se mueve aceleradamente es equivalente al comportamiento de los cuerpos en presencia de un campo de gravedad equivalente. Pero esta equivalencia puede ser completa si nos limitamos a hacer las observaciones en partes no grandes del espacio. En efecto, figurémonos un «ascensor» cuyo suelo tenga por dimensiones lineales mil kilómetros. Si este ascensor pende inmóvil sobre la esfera terrestre, los fenómenos ocurrirán en él de un modo distinto a como ocurrirían en el caso en que el ascensor se moviera con la aceleración g con respecto a las estrellas fijas. Esto se ve claramente en la fig. 185: en un caso los objetos caerán oblicuamente en el suelo del ascensor, mientras que en el otro lo harán verticalmente.

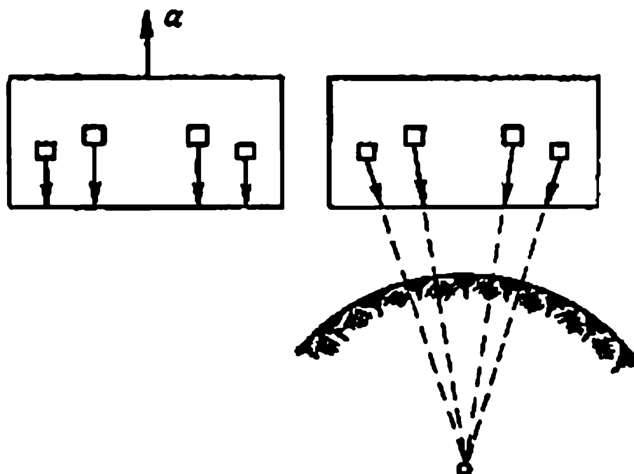


FIG. 185.

De este modo, el principio de la equivalencia es correcto para aquellos volúmenes de espacio en los cuales el campo puede considerarse uniforme.

Los razonamientos cualitativos que acabamos de analizar sirven de base a la teoría general de la relatividad. Esta teoría, desarrollada también por A. Einstein, se plantea el problema de hallar un procedimiento de enunciar las leyes de la naturaleza que no dependa del sistema de coordenadas que se elija. Hasta ahora hemos supuesto que esta tarea sólo era realizable si los sistemas de coordenadas eran inerciales. El principio de la equivalencia demuestra que el carácter absoluto de la aceleración puede ser aniquilado por un campo gravitatorio. Un sistema de coordenadas con movimiento acelerado puede considerarse como inercial si se introduce un campo gravitatorio equivalente.

Es cierto, sin embargo, que esta equivalencia está limitada, como ya hemos dicho, en el tiempo y en el espacio. No obstante, Einstein demostró que esta limitación puede suprimirse si, en concordancia con el campo gravitatorio introducido, se varía la forma del sistema.

25

NATURALEZA CUÁNTICA DEL CAMPO

§ 161. Fotón

Ya hemos indicado varias veces que la emisión y absorción de la energía eléctrica se produce en porciones, es decir, en cuantos. La magnitud del cuanto depende únicamente de la frecuencia de la radiación y es igual a $h\nu$, donde h es una constante universal igual a 6,62 10^{-27} erg. s. En la actualidad se ha establecido ya el carácter cuántico de la absorción y la radiación para toda la enorme gama de ondas del espectro electromagnético, desde los rayos γ duros hasta las ondas radioeléctricas largas.

Los fenómenos de emisión y absorción caracterizan en primer lugar al propio microsistema que interacciona con el campo electromagnético de la onda. El carácter cuántico de estos fenómenos (que estudiaremos detalladamente en la parte III) demuestra, ante todo, que en los microsistemas existen distintos niveles de energía, y que es imposible que los microsistemas posean una cantidad de energía arbitraria. Estos hechos no hubieran conducido de por sí a la idea de que la naturaleza cuántica no sólo es peculiar de la sustancia, sino también del campo electromagnético, si la onda electromagnética no se hubiese comportado en una serie de casos como partícula al entrar en interacción con la sustancia. Las propiedades corpusculares de la radiación electromagnética, que se manifiestan con tanta mayor claridad cuanto menor es la longitud de la onda, se exteriorizan en aquellos casos en que se producen pérdidas y transformaciones de la energía electromagnética. Por el contrario, estas propiedades no se ponen de manifiesto en la propagación, dispersión y difracción de las ondas electromagnéticas si estas no van acompañadas de pérdidas de energía.

El corpúsculo de campo electromagnético recibe el nombre de fotón. El fotón se caracteriza en primer lugar por la magnitud de su energía:

$$\mathscr{E} = h\nu.$$

Aplicando la ley de la equivalencia de la masa y la energía, podemos atribuirle al fotón la masa

$$m = \frac{\mathscr{E}}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}.$$

Y como el campo electromagnético se propaga con la velocidad c, tenemos que admitir, tomando en consideración la fórmula

$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, que la masa en reposo del fotón es nula. Considerando que el concepto de impulso es aplicable al fotón, podemos suponer que

$$p=m\cdot c=\frac{h\nu}{c}.$$

Debemos recordar que los experimentos de Lébedev (pág. 337) demostraron directamente que la relación $p=W/c$, entre la densidad del impulso y la densidad de la energía de la onda electromagnética, era correcta para la luz. La fórmula del impulso del fotón concuerda perfectamente con esta deducción.

Valores de $\mathscr{E}$, m y p los fotones de diversos tipos de radiación electromagnética

	λ	$\mathscr{E}$	m, en g	p, en g·cm/s
Ondas radioeléctricas	2000 m	10^{-21} erg $=$ $=0,62\cdot10^{-9}$ eV	$1,1\cdot10^{-42}$	$3,3\cdot10^{-32}$
Luz visible . . .	6000 Å	$3,3\cdot10^{-12}$ erg $=$ $=2$ eV	$3,6\cdot10^{-33}$	$1,1\cdot10^{-22}$
Rayos X	1 Å	$19,8\cdot10^{-9}$ erg $=$ $=12\,400$ eV	$2,2\cdot10^{-29}$	$6,6\cdot10^{-19}$

Como veremos en los párrafos siguientes, la existencia de los fotones se demuestra convincentemente por medio de muchos experimentos. Pero, un enorme material experimental no nos permite renunciar a la idea acerca de la continuidad del campo electromagnético. Las contradicciones más claras se ponen de manifiesto cuando se estudian los fenómenos de interferencia, que con tanta elegancia se explican por el carácter ondulatorio del campo y que son incomprensibles desde el punto de vista corpuscular.

Efectivamente, figurémonos un sencillo experimento de interferencia: dos orificios próximos por los cuales se hace pasar luz. No es difícil hacer la siguiente experiencia. Primero fotografiamos la luz transmitida estando los dos orificios abiertos. Obtenemos una figura, que consideramos a su debido tiempo, formada por franjas brillantes y oscuras que se suceden entre sí. Luego tapamos, uno antes y otro después, los orificios, sacando la fotografía en una misma placa. El resultado, como es natural (desde el punto de vista de la teoría ondulatoria), será otro, no habrá interferencia.

Razonemos ahora qué significa esta experiencia en términos de las ideas corpusculares. Podemos figurarnos (aunque resulta di-

fícil) que los fotones botan en los bordes de los orificios o chocan entre sí y van a caer irregularmente a distintos puntos de la placa. Pero las figuras son diferentes en dependencia de si la luz pasa simultáneamente por ambos orificios o si lo hace consecutivamente. Los fotones que pasan por un orificio parece que «saben» que el otro está abierto o cerrado.

Con estos y otros muchos razonamientos y experiencias puede demostrarse que es imposible reducir los fenómenos electromagnéticos al sólo cuadro de un campo o de un sistema de fotones. Cada una de estas consideraciones resulta ser extraordinariamente fructífera en una rama de fenómenos y falla en la otra.

En los últimos decenios el desarrollo de la física transcurre bajo el signo de una búsqueda enérgica de la forma de unificar estos dos conceptos opuestos acerca de la materia electromagnética. El campo es una realidad que se caracteriza por los valores, continuos en el espacio y en el tiempo, de las intensidades de los campos; el corpúsculo es una realidad que ocupa una región limitada del espacio en un instante dado. La materia electromagnética reúne en sí estas dos propiedades contradictorias. En el capítulo 27 veremos que la combinación de estas propiedades contradictorias no sólo es característica de la materia electromagnética, sino también de la sustancia. Pero en el conocimiento de la sustancia la física ha avanzado mucho más que en el estudio del campo electromagnético. La naturaleza dualística de las partículas de la sustancia se define por la ecuación de Schrödinger (pág. 516); la relación mutua entre los corpúsculos y las ondas se ha esclarecido en grado suficiente para estas partículas.

Desgraciadamente, las cosas marchan bastante peor en la tarea de crear la teoría del campo electromagnético (materia), es decir, la llamada electrodinámica cuántica (para más detalles véase la pág. 632). Una teoría acabada de este tipo aún no existe. Debido a las contradicciones de principio que ocurren en la electrodinámica cuántica, sus éxitos aislados, que se expresan en el establecimiento de nuevas leyes que ligan el campo con la partícula, no pueden ser generalizados y la relación mutua entre los fotones y el campo electromagnético no puede considerarse aclarada. La regla de «traducción» del lenguaje corpuscular al ondulatorio y viceversa consiste en lo siguiente: una onda electromagnética de longitud λ e intensidad I puede manifestarse como un flujo de fotones de frecuencia $\nu=c/\lambda$ e intensidad $I=N\cdot h\nu$, donde N es el número de fotones por unidad de superficie en la unidad de tiempo. La dirección del movimiento del frente de la onda es la dirección del movimiento del fotón.

Dejaremos a un lado el problema, bastante complicado, del estado de polarización de la luz. Para explicar este fenómeno en

términos corpusculares hay que admitir que el fotón posee cierta dirección privilegiada (espín, véase la pág. 539 acerca del espín del electrón).

§ 162. Efecto fotoeléctrico

El arrancamiento de electrones por la acción de las ondas electromagnéticas es una de las confirmaciones más importantes de la inevitabilidad de las ideas corpusculares. Desde este punto de vista precisamente es el del que vamos a estudiar aquí dicho fenómeno, que después, en el § 274, volveremos a considerar al tratar de la acción de la luz sobre los metales y los semiconductores.

Como el trabajo necesario para que un electrón salga del metal (véase la pág. 775) no puede ser menor de 2,2 eV, el efecto fotoeléctrico, sólo será posible cuando $h\nu > 3{,}5\cdot 10^{-12}$ erg, es decir, cuando las frecuencias sean del orden de $0{,}5\cdot 10^{15}$ Hz ($\lambda = 6000$ Å).

Einstein propuso considerar el efecto fotoeléctrico como un fenómeno de choque de un fotón con un electrón. En este caso el fotón cede toda su energía y deja de existir. Si A es el trabajo de desprendimiento del electrón (es decir, el trabajo necesario para vencer las fuerzas que ligan al electrón con la sustancia), la ley de la conservación de la energía tendrá la forma

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2},$$

donde $mv^2/2$ es la energía cinética del electrón arrancado de la sustancia (fotoelectrón).

Para cerciorarse de que la hipótesis fotónica es cierta, lo primero que hay que comprobar es la dependencia lineal de la energía cinética del fotoelectrón con respecto a la frecuencia de la radiación incidente.

La energía de los fotoelectrones se determina por el método del potencial retardador. Si la superficie de la sustancia a que se arrancan los electrones es la armadura de un condensador, por el circuito en que esté intercalado este condensador pasará corriente. Esta corriente puede interrumpirse si se le comunica al condensador una tensión retardadora. La corriente cesará cuando

$$eU_r = \frac{mv^2}{2}.$$

Hay que tener en cuenta que la velocidad de los electrones será tanto menor cuanto mayor sea la profundidad de que se arranquen. Por esto la corriente se interrumpirá en cuanto se retarden los electrones más próximos a la superficie. Determinando experimentalmente eU_r, para distintas frecuencias ν de la radiación electromag-

nética, pueden construirse las curvas de U_r en función de ν. Las rectas ideales obtenidas en experimentos de este tipo se muestran en la fig. 186. La tangente del ángulo de inclinación de la recta $eU_r = h\nu - A$, igual a h/e, puede calcularse partiendo de otros datos, lo que da la posibilidad de comprobar la teoría de otro modo independiente.

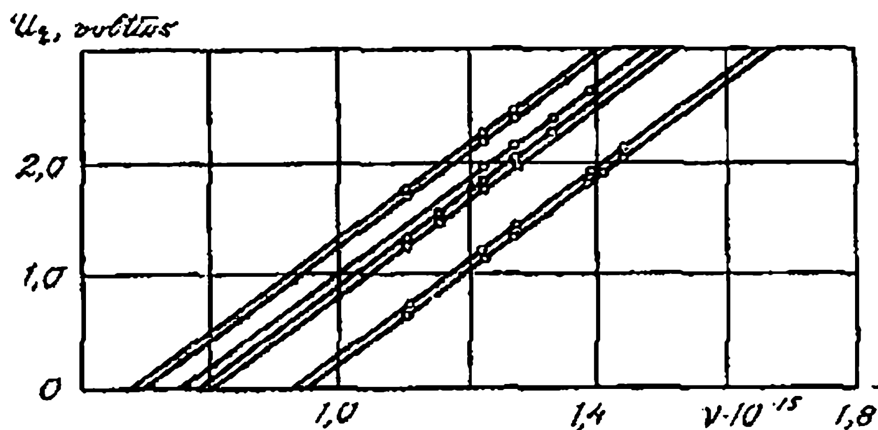


FIG. 186.

Este experimento, a pesar de todo, no se puede considerar como una demostración directa de la hipótesis fotónica. Puede objetarse que el fotoelectrón acumula paulatinamente la energía que le transmite la onda electromagnética. Esta objeción quedó anulada por el experimento clásico de los físicos soviéticos A. F. Ioffe y N. I. Dobronrávov. Antes de esto Ioffe había recurrido ya a la investigación del efecto fotoeléctrico sobre una partícula de polvo suspendida entre las armaduras de un condensador. Debido al inevitable rozamiento con el aire, la partícula de polvo es portadora de una carga y, por lo tanto, su peso puede ser equilibrado por un campo eléctrico. En equilibrio $qE = mg$, donde m es la masa de la partícula y q su carga. Al producirse el efecto fotoeléctrico, la partícula de polvo pierde un electrón y, por consiguiente, en dependencia del signo que tenga q, su carga pasará a ser $q+e$ o $q-e$. Cuando esto ocurre, la partícula deja de estar en equilibrio y comienza a moverse hacia una de las placas del condensador. Para volverla a equilibrar hay que variar el campo. Las condiciones de equilibrio serán ahora

$$(q \pm e)\, E_1 = mg.$$

Por este procedimiento determinó Ioffe la carga del electrón.

Dicho esto, volvamos al experimento de Ioffe y Dobronrávov. En esta experiencia también se observa el comportamiento de una partícula de polvo entre las armaduras de un condensador, pero con

otro fin. Las veces de una de las armaduras del condensador las desempeñaba el ánodo de un tubo de rayos X. El tubo se sometía a una tensión de 12 000 V y los rayos X eran generados por un flujo de electrones extraordinariamente débil, constituido por cerca de 1000 electrones por segundo.

Como sabemos, los rayos X se producen cuando un electrón choca con el ánodo. Pero, ¿qué emite el ánodo?, ¿un campo electromagnético continuo o 1000 fotones por segundo? La respuesta debía darla la partícula de polvo situada entre las armaduras del condensador. Los rayos X arrancan un electrón de la partícula. Pero, ¿cómo lo hacen?

El experimento de Ioffe y Dobronrávov demostró que, en promedio, la extracción de un electrón de la partícula ocurre una vez cada 30 minutos. Si los rayos X se propagaran en forma de campo continuo, la partícula recibiría cada instante una cantidad pequeñísima de energía, insuficiente, claro está, para arrancar un electrón. Esta energía se distribuiría equitativamente entre todos los electrones de la partícula. La observación hecha por Ioffe y Dobronrávov le impone a la hipótesis ondulatoria una conclusión inverosímil: una vez cada 30 minutos todos los electrones deben ceder su energía a uno determinado, y éste se desprende de la partícula de polvo.

La hipótesis fotónica, por el contrario, no sólo explica el fenómeno desde el punto de vista cualitativo, sino que conduce a la cifra experimental. En el experimento que describimos, la partícula era una bolita de bismuto de $3\cdot 10^{-5}$ cm de radio. Esta bolita se encontraba a 0,02 cm de distancia del ánodo, del cual partían los rayos X en todas las direcciones. La probabilidad de que un fotón choque con la partícula es igual a $\frac{\pi(3\cdot 10^{-5})^2}{4\pi(0{,}02)^2}=\frac{1}{1\,800\,000}$. Como en 1 s salen despedidos 1000 fotones, sobre la partícula incidirá 1 fotón cada 1800 s (30 minutos), lo que coincide con los resultados de la experiencia.

§ 163. Fluctuaciones del flujo luminoso

Una importante demostración fundamental de la teoría fotónica son los experimentos del científico soviético S. I. Vavílov dedicados al estudio de las fluctuaciones de los flujos luminosos débiles.

Resulta que el umbral de la sensibilidad del ojo a la luz se halla extraordinariamente bajo. El ojo es capaz de ver aproximadamente 100 fotones que incidan en un segundo sobre la córnea. Si el flujo luminoso oscila cerca de esta cantidad, la luz no será percibida por

el ojo cuando el número de fotones descienda más abajo que el umbral de la visibilidad.

En los experimentos de Vavílov, uno de los investigadores observaba un haz luminoso que cada segundo era emitido durante 0,1 s. Cuando la magnitud del flujo luminoso superaba el umbral de visibilidad, el ojo distinguía cada destello. Al disminuir la intensidad de la luz, ciertos destellos no producían sensación en el observador. Cuanto menor era la intensidad de la luz, más eran los destellos no observados. De este modo se descubrieron directamente las fluctuaciones del número de fotones en el flujo luminoso. No será fácil proponer una demostración más directa de la naturaleza corpuscular de la luz.

Otros experimentos de Vavílov demuestran brillantemente la imposibilidad de explicar, por medio de la hipótesis fotónica, fenómenos ondulatorios tan típicos como las interferencias. Vavílov dividía un haz luminoso en dos rayos coherentes (con un biprisma de Fresnel). Estos rayos producían una figura de interferencia. Pero al mismo tiempo las fluctuaciones de ambos rayos resultaron ser completamente independientes. Esta circunstancia señalaba una vez más que es totalmente imposible explicar la interferencia por medio de ciertas distribuciones estadísticas de los fotones.

Las propiedades ondulatorias son propias, no del flujo de fotones, sino de cada fotón. Por esta razón no puede considerarse en modo alguno que el fotón sea una partícula «ordinaria».

Aquí conviene hacer un paréntesis. Al crear los modelos del mundo invisible adjudicamos a las partículas elementales propiedades tomadas del mundo de las cosas que nos rodean o, como dicen los físicos, del macromundo. Así, por ejemplo, hablamos de los átomos como de bolitas. Ni que decir tiene que la bolita-átomo sólo refleja parcialmente las propiedades de la bolita-sustancia. Está claro para todos que algunas propiedades peculiares de la bolita-sustancia, como el color, la rugosidad, el olor, son imposibles de trasladar a la bolita-átomo. Y a medida que se va penetrando en el micromundo, resulta cada vez más difícil extender las propiedades de las cosas a las propiedades de las partículas elementales.

Las partes del átomo y del núcleo atómico y las partículas de luz recuerdan todavía menos que el átomo a la bolita-objeto. En el ejemplo del fotón nos hemos encontrado con que es posible la combinación en una micropartícula de propiedades contradictorias de los objetos de nuestro macromundo. Está claro que, en el macromundo, una partícula es una partícula, y una onda es una onda. La partícula ocupa una región limitada del espacio y se mueve siguiendo una trayectoria determinada; la onda se distribuye en el espacio de un modo continuo y su energía se transmite en mayor o menor proporción a todos los puntos de éste. Conciliar estas dos

imágenes, tratándose de objetos, es imposible. Pero nosotros no tenemos derecho a imponer a las partículas del micromundo el comportamiento de los objetos.

La comprensión del micromundo no consiste en crear modelos parecidos a los cuadros que el ojo humano acostumbra ver. El proceso ilimitado del conocimiento consiste en estudiar las leyes de los fenómenos, en hallar los nexos casuales que existen objetivamente entre los fenómenos. Por esta vía se va desarrollando el proceso de composición del complejísimo cuadro del micromundo, cuya esencia no puede interpretarse por medio de ingeniosos modelos tomados del mundo de los objetos.

§ 164. Ley de Kirchhoff

La experiencia constata, que dos cuerpos, cuyas temperaturas son distintas, llegan a equilibrarlas aunque se encuentren en el vacío. El intercambio de energía se produce por medio de las ondas electromagnéticas que emiten los átomos de dichos cuerpos.

Como ya dijimos, a cada átomo se le puede atribuir determinado sistema de niveles de energía. Cuando el átomo absorbe energía, pasa a un nivel más alto, cuando la emite, pasa a uno más bajo. En cada acto de radiación, el átomo le cede al espacio una energía electromagnética $h\nu_{mn}=\mathcal{E}_m-\mathcal{E}_n$, donde $\mathcal{E}_m$ es el nivel de energía anterior a la emisión, y $\mathcal{E}_n$, el posterior. La onda radiada posee la frecuencia ν_{mn}. Esta onda llega al segundo cuerpo y es absorbida por él. Al ocurrir esto, el átomo que absorbe la energía se eleva del nivel $\mathcal{E}_n$ al nivel $\mathcal{E}_m$.

Esto mismo puede expresarse en la terminología de la hipótesis fotónica diciendo: en cada acto de radiación se cede un fotón $h\nu$ de energía electromagnética, y en el fenómeno de la absorción, el fotón es capturado por el átomo y su energía se gasta en hacer pasar dicho átomo de un nivel bajo a otro más alto.

Todos los átomos de los cuerpos toman parte en el intercambio de energía, bien absorbiendo fotones o bien emitiéndolos. En dependencia de circunstancias casuales pueden producirse las más diversas transiciones energéticas, y, en principio, en el intercambio de energía intervienen ondas electromagnéticas de cualquier longitud.

Podemos figurarnos que en el intercambio calorífico toman parte cuerpos que forman un sistema cerrado (el sistema de cuerpos que se observa está rodeado de una envoltura que no permite que la radiación escape al exterior). En este caso, al cabo de cierto tiempo estos cuerpos entrarán en estado de equilibrio, es decir, todos tendrán la misma temperatura. Esto no significa que la radia-

ción electromagnética se interrumpe. Los átomos continuarán pasando ya a un nivel energético más alto, ya a uno más bajo. Pero una vez alcanzado el estado de equlibrio, a cada cuerpo llegará en cada instante la misma cantidad de energía que él emite en forma de radiaciones de cualquier longitud de onda. La radiación que llega al cuerpo, en el caso general, sólo es absorbida parcialmente por él y obliga a sus átomos a pasar de un nivel de energía más bajo a otro más alto. El resto de la radiación incidente se dispersa, se refleja en el cuerpo.

Los átomos no permanecen durante mucho tiempo en los niveles de energía altos; y al retornar al estado inicial ceden la energía absorbida en forma de radiación. Si la energía que incide sobre la unidad de superficie en 1 s es ρ, la absorbida será $A\rho$. El coeficiente adimensional A, que indica la fracción de energía absorbida, se llama *capacidad de absorción* o *poder absorbente* del cuerpo. Es evidente que si

$$A\rho = \mathscr{E},$$

donde $\mathscr{E}$ es la energía radiada por 1 cm^2 de superficie en 1 s, el cuerpo se encontrará en equilibrio con el medio, es decir, su temperatura no variará.

Pero, ¿en qué consiste la condición de equilibrio térmico de muchos cuerpos que, como es natural, pueden tener distinta capacidad de absorción y diferente radiación? Partiendo de razonamientos termodinámicos, G. R. Kirchhoff demostró que el equilibrio sólo puede existir si la intensidad de las ondas electromagnéticas que inciden sobre un cuerpo es igual para todas las partes de todos los cuerpos que se hallan en equilibrio entre sí. De este modo

$$\frac{\mathscr{E}_1}{A_1} = \frac{\mathscr{E}_2}{A_2} = \frac{\mathscr{E}_3}{A_3} = \ldots = \rho.$$

Esta correlación debe ser correcta para cualquier longitud de onda y para cualquier temperatura. Esta es la *ley de Kirchhoff*, la cual dice que la relación entre el poder emisivo de un cuerpo y el de absorción es una magnitud constante para cada longitud de onda y cualquier temperatura.

Esto quiere decir, que un cuerpo que absorba intensamente ciertos rayos, los emitirá también intensamente, y viceversa. ¿Por qué razón el agua contenida en una botella con las paredes plateadas se calienta poco por la acción de los rayos solares, mientras que la contenida en un frasco de vidrio negro se calienta mucho? En el primer caso la absorción de energía solar es pequeña, mientras que en el segundo es grande. Echemos ahora agua caliente en ambos recipientes y coloquémoslos en un local frío. El agua del

frasco de vidrio negro se enfriará mucho antes: el cuerpo que absorbe más también emite más.

Pueden hacerse experimentos llamativos con cerámica coloreada. Si un cuerpo tiene, por ejemplo, color verde, *no* absorbe la luz verde. Caldeando un casco verde, puede verse como comienza a iluminarse con un color adicional al verde.

No debe extrañarnos el hecho de que apliquemos una ley establecida para el equilibrio a fenómenos que indudablemente no son de este tipo (ya que el cuerpo se halla a una temperatura más alta que el medio). Aquí ocurre lo mismo que en otros problemas de termodinámica (véase la pág. 172): las leyes termodinámicas son aplicables si cada estado instantáneo puede considerarse como de equilibrio. En los fenómenos de radiación térmica siempre se cumple esta condición.

§ 165. Cuerpo negro

La ley de Kirchhoff conduce a una consecuencia interesante. Los cuerpos que intercambian calor por medio de la radiación reciben (para unos valores de ν y T dados) ondas de la misma intensidad de los cuerpos vecinos, independientemente del material que los constituya y de las propiedades que tengan. Para cada longitud de onda (o, lo que es lo mismo, para cada frecuencia) y para cada temperatura, la experiencia nos lleva a la magnitud universal ρ. Por lo tanto, existe una función universal $\rho(\nu, T)$ — función de la frecuencia de la radiación y de la temperatura — que caracteriza el proceso del intercambio calorífico por radiación.

A la función $\rho(\nu, T)$ puede asignársele un contenido evidente. Consideremos un cuerpo que absorba el 100% de la energía que incide sobre él en todas las longitudes de onda. Para este *cuerpo negro* $A=1$ y

$$\mathscr{E}=\rho(\nu, T).$$

La función $\rho(\nu, T)$ es el *poder emisivo* o *emisividad* del cuerpo negro. Pero, ¿cómo se puede conseguir un cuerpo que absorba la luz de todas las longitudes de onda? Está claro que las sustancias negras, como el hollín, nos permiten aproximarnos al cuerpo de este tipo. Pero siempre nos separarán de la condición $A=1$ varios tantos por ciento. Existe una solución más ingeniosa. Figurémonos una caja con un pequeño orificio. Disminuyendo las dimensiones de este orificio, puede conseguirse que sea negro. Esta peculiaridad de los orificios la conocemos bien por nuestras observaciones diarias. Una madriguera profunda, la ventana abierta de una habitación sin luz, un pozo, etc., son ejemplos de «cuerpos» negros. La razón de esto

está bien clara: el rayo que entra en una cavidad a través de un orificio sólo puede volver a salir después de reflejarse muchas veces (fig. 187). Pero en cada reflexión se pierde una parte de la energía. Por esto, si el orificio es pequeño, y la cavidad grande, el rayo no vuelve a salir, es decir, es absorbido por completo.

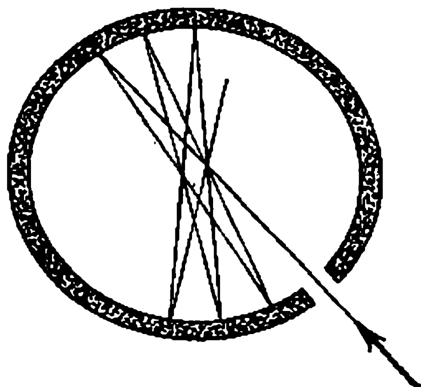


FIG. 187.

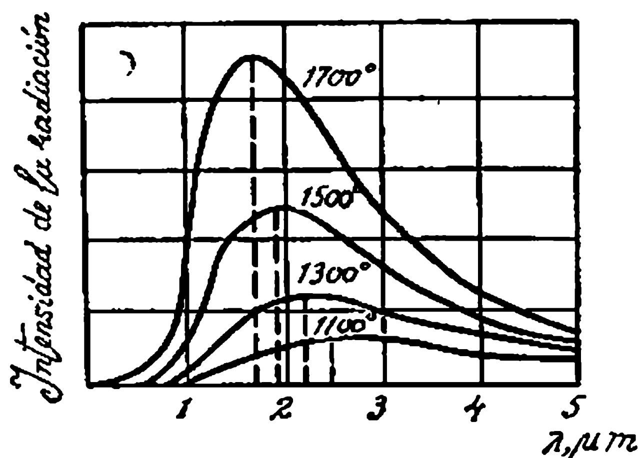


FIG. 188.

Para medir el poder emisivo $\rho(\nu, T)$ de un cuerpo negro, se hace un tubo largo, de material poco fusible, que se coloca en un horno y se caldea. A través del orificio del tubo se estudia, valiéndose de un espectrógrafo, el carácter de la radiación. La fig. 188 reproduce el resultado de estos experimentos. Las curvas representan la intensidad de la radiación, en función de la longitud de onda, para varias temperaturas. Vemos que la radiación se concentra en un intervalo espectral relativamente estrecho, que se halla entre los límites de 1 a 5 μm. Sólo a temperaturas más altas ocupa la curva la región del espectro visible y empieza a avanzar hacia la parte de las ondas cortas. Las ondas de varias micras de longitud se llaman infrarrojas. Como ellas son las que a temperaturas ordinarias se encargan de transportar la energía, las llamaremos térmicas.

La curva de la radiación térmica posee un máximo, que se manifiesta con tanta mayor claridad, cuanto más elevada es la temperatura. Al aumentar la temperatura, la longitud de onda λ_m correspondiente al máximo del espectro se desplaza hacia la parte de las ondas más cortas. Este desplazamiento cumple la llamada ley de Wien, que es fácil de establecer en la práctica:

$$\lambda_m = \frac{2886}{T} .$$

En esta fórmula la longitud de la onda debe expresarse en micras, y T, en grados de la escala absoluta. El desplazamiento de la ra-

diación hacia el lado de las ondas cortas lo observamos cuando al calentar un metal vemos como la calda al rojo se torna en amarilla a medida que aumenta la temperatura.

La segunda circunstancia que llama nuestra atención al examinar las curvas de radiación es el rápido incremento que experimentan todas las ordenadas de la curva al aumentar T. Si $\mathcal{E}_\lambda$ es la intensidad de una onda dada, la intensidad total del espectro vendrá representada por la integral

$$R = \int_0^\infty \mathcal{E}_\lambda d\lambda.$$

Esta integral no es ni más ni menos que el área comprendida bajo la curva de radiación. ¿Con qué rapidez crece R al aumentar T? El análisis de las curvas demuestra que el crecimiento de R es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura:

$$R = \sigma T^4 \text{ erg}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s}),$$

donde $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-5}$ u. CGS. Esta es la ley de Stefan — Boltzmann.

Ambas leyes tienen importancia cuando se determina la temperatura de cuerpos incandescentes que se hallan lejos de nosotros. Por este procedimiento precisamente se determina la temperatura del Sol, de las estrellas, de la nube incandescente provocada por una explosión atómica, etc.

Las leyes de la radiación térmica sirven de base para medir la temperatura de un metal fundido. El principio de los pirómetros ópticos consiste en elegir tal incandescencia de una lámpara eléctrica, que la luminosidad de su filamento sea igual que la del metal fundido. En este caso aplicamos la ley: si la radiación es idéntica, las temperaturas también serán iguales. La temperatura del filamento incandescente se halla en dependencia directa de la corriente eléctrica que pasa por él. Partiendo de esto, no es difícil graduar el pirómetro óptico.

Los cuerpos reales no son negros, por lo que para cada uno de ellos hay que introducir en la fórmula de Stefan — Boltzmann un factor menor que la unidad (poder absorbente del cuerpo dado). Estos factores se determinan empíricamente y son muy valiosos para la termotecnia práctica, donde los problemas de intercambio calorífico por radiación tienen extraordinaria importancia. No obstante, las leyes que acabamos de estudiar tienen trascendencia, ya que las regularidades de la radiación (variación con la temperatura o con la longitud de onda) se conservan, en rasgos generales, para los cuerpos no negros. La transcencencia teórica del problema del cuerpo negro se explica en el párrafo siguiente.

§ 166. *Teoría de la radiación térmica*

Consideremos una cavidad dentro de la cual tienen lugar procesos de absorción y emisión de ondas electromagnéticas. Esta cavidad puede ser esférica, prismática rectangular o de cualquier otra forma. Las paredes de la cavidad emiten y absorben iguales cantidades de energía y todo el sistema se halla en equilibrio. Dentro de la cavidad existe un campo electromagnético que, a su vez, está en equilibrio con las paredes: en todos los puntos del espacio la densidad de la energía del campo, $w=\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)$, no varía con el tiempo.

Este campo electromagnético puede considerarse desde dos puntos de vista. Por una parte, en la cavidad existen ondas electromagnéticas estacionarias, del mismo modo que en una habitación cerrada en que hay una fuente de sonido existen ondas sonoras estacionarias. Por otra parte, teniendo en cuenta la naturaleza cuántica del campo, puede decirse que el espacio considerado está lleno de fotones, lo mismo que un recipiente con gas está lleno de moléculas.

Partiendo de los conceptos ondulatorios podemos determinar fácilmente el número de frecuencias de las oscilaciones electromagnéticas que tienen lugar en la cavidad. Los razonamientos que hicimos a su debido tiempo para las ondas sonoras (véase la pág. 144) pueden aplicarse ahora completamente. El número de frecuencias propias de las oscilaciones electromagnéticas, menores que ν, es igual a

$$\frac{4}{3}\pi\frac{\nu^3}{c^3}V,$$

donde c es ahora la velocidad de las ondas electromagnéticas, y V es la capacidad de la cavidad. Esta fórmula da el número de oscilaciones cuando las ondas están polarizadas linealmente. Pero cuando la radiación es térmica nos encontramos con oscilaciones no polarizadas que siempre pueden descomponerse en dos ejes.

En este caso el número de oscilaciones será el doble, e igual a $\frac{8}{3}\pi\frac{\nu^3}{c^3}V$. Derivando, obtenemos que, en el intervalo de frecuencias desde ν hasta $\nu+d\nu$, el número de oscilaciones será igual a

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}V\,d\nu.$$

Ahora podemos aprovechar el punto de vista que nos ofrece la «otra cara de la medalla». La cavidad está llena de oscilaciones de frecuencia ν, es decir, de fotones con energía $\varepsilon=h\nu$. El número $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}V\,d\nu$ se puede considerar como el número de fotones que hay

en el volumen de la cavidad, y $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$, como la densidad del gas fotónico. Así nos hemos aproximado a la respuesta a una pregunta muy importante: ¿qué densidad tiene la energía electromagnética en la cavidad? Si los fotones de todas las energías surgieran con la misma frecuencia, no habría más que multiplicar ε por $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$ y obtendríamos la densidad de la energía para las frecuencias del intervalo $d\nu$. Pero las partículas del gas no están distribuidas uniformemente por energías. Por lo tanto la fórmula buscada tiene la forma

$$w_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\varepsilon W'(\varepsilon)\,d\nu,$$

donde $W(\varepsilon)$ es la probabilidad de que se genere un fotón cuya energía sea ε.

De este modo, la densidad de la energía electromagnética de las ondas (fotones) cuya frecuencia es ν viene expresada por la fórmula

$$w_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\varepsilon W(\varepsilon).$$

El flujo de energía a través de la unidad de superficie, es decir, el vector de Poynting, K, será, de acuerdo con la pág. 342, c veces mayor que w_ν. Y el flujo de energía ρ, irradiado por la unidad de superficie de un cuerpo que se halle en equilibrio con el campo, debe ser cuatro veces menor que el vector de Poynting: $\rho = \frac{1}{4}K$. Entre w y ρ existe la relación $\rho = \frac{1}{4}wc$. ¿De dónde procede el coeficiente 1/4? Aunque no queremos detenernos en esta cuestión, que en general tiene poca importancia, haremos el siguiente razonamiento simplificado.

Cada superficie unidad emite un flujo de energía ρ, que va en todos los sentidos dentro de los límites de un hemisferio, es decir, de un ángulo sólido 2π. Por lo tanto, la radiación media en el interior de un ángulo sólido unitario será igual a $\rho/2\pi$. Por razones geométricas está claro que la radiación a lo largo de la superficie será nula, y a lo largo de la normal será máxima. Si la disminución de la intensidad de la radiación se produjera de un modo uniforme, para obtener el valor medio $\rho/2\pi$ sería necesario que la radiación a lo largo de la normal fuera igual a ρ/π.

Veamos ahora lo que ocurre en la esfera llena de radiación. En el centro de la esfera hay un área por la que pasa un flujo de K. Pero, por otra parte, sobre esta área incide una radiación, de todas las partes de la esfera, igual a $(\rho/\pi)4\pi$. Por consiguiente, $\rho = \frac{1}{4}K$.

Así, pues, de la fórmula de la densidad volumétrica de la radiación electromagnética pasamos a la expresión del poder emisivo del cuerpo negro multiplicando w_ν por $c/4$.

$$\rho_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\,\varepsilon W(\varepsilon).$$

El problema siguiente de investigación de esta fórmula va ligado a la evaluación de la probabilidad de la distribución de la energía $W(\varepsilon)$. Históricamente, la primera fórmula de ρ_ν fue propuesta en 1911 por J. W. Rayleigh y J. H. Jeans, independientemente el uno del otro. Esta fórmula tiene la forma

$$\rho_\nu = \frac{2\pi kT}{c^2}\,\nu^2.$$

Esta expresión fue obtenida suponiendo que la distribución de la energía por grados de libertad es uniforme, es decir que W es independiente de ε. Esto es correcto para longitudes de onda grandes y temperaturas altas.

Otra posibilidad, con respecto a $W(\varepsilon)$, es aplicar la ley de Boltzmann, que tan buenos resultados da para los gases moleculares; en este caso $W(\varepsilon) = e^{-\varepsilon/kT}$. No obstante, tanto la ecuación del poder emisivo, que lleva el nombre de Wien,

$$\rho_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\,h\nu e^{-h\nu/kT},$$

como la de Rayleigh — Jeans no coinciden con la experiencia, como puede verse en la fig. 189.

¿Cuál es el eslabón erróneo en estos razonamientos? Este eslabón debe buscarse en la propagación injustificada de los razonamientos estadísticos, que sirven de base a la ley de Boltzmann, al conjunto de los fotones. Porque, como ya subrayamos, los fotones sólo dan una idea unilateral del campo electromagnético. La realidad del campo no puede explicarse exhaustivamente representándolo como un conjunto de partículas. Por esto, es natural que los fotones tengan «su estadística». Esta estadística lleva el nombre de Bose — Einstein.

Para obtener la nueva función de distribución de las partículas por energías, que sustituya a la ley de Boltzmann, basta tener en cuenta que el carácter ondulatorio del campo priva de contenido a la hipótesis acerca de la diferencia entre partículas idénticas. En esto se basa la estadística de Bose — Einstein (véase la pág. 763), que conduce, como ahora demostraremos, a la siguiente ley de distribución de los fotones por energías:

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1};$$

por consiguiente, la fórmula de la emisividad del cuerpo negro toma la forma

$$\rho_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Esta fórmula fue obtenida la primera vez por Max Planck y lleva su nombre. La fig. 189 ilustra la brillante coincidencia de esta fór-

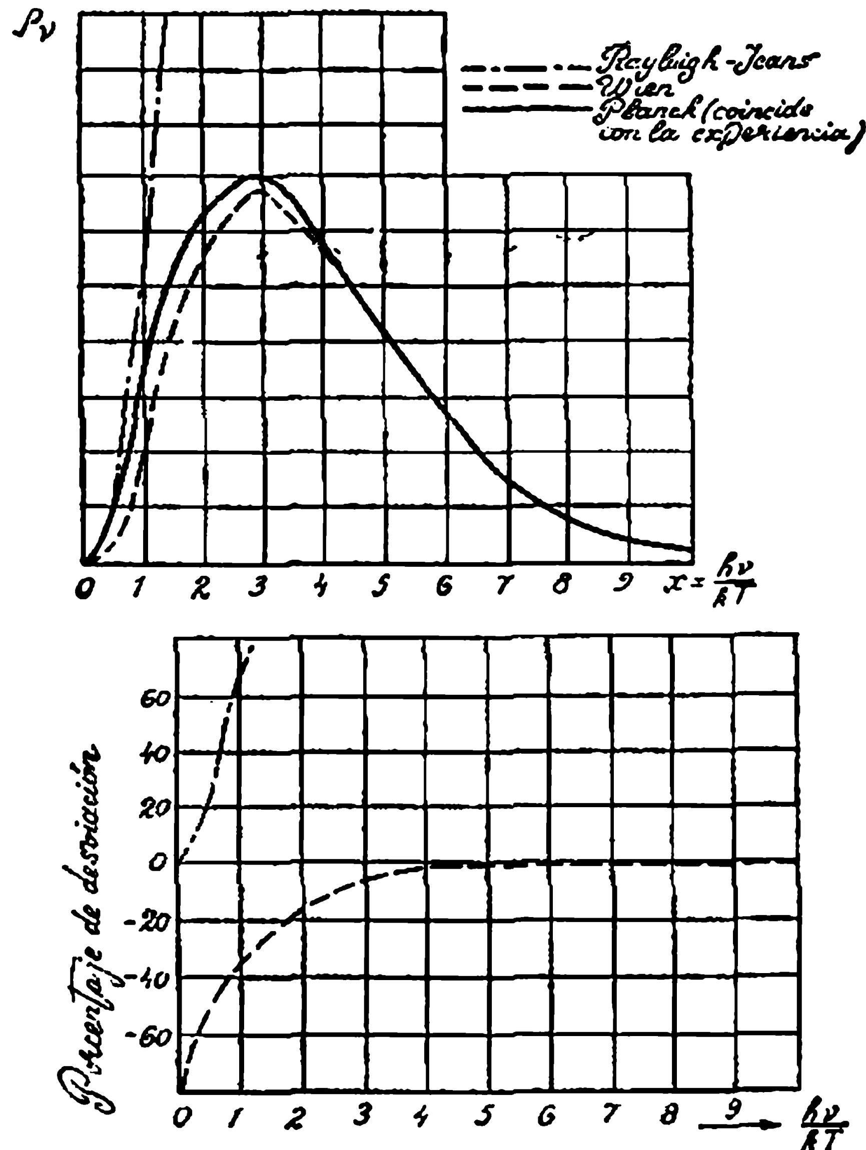


FIG. 189.

mula teórica con la experiencia y el carácter que tienen las desviaciones, con respecto a los resultados correctos, de las fórmulas teóricas de Wien y de Raylaigh — Jeans.

De la fórmula de Planck se deducen las leyes, antes estudiadas, de Wien y de Stefan — Boltzmann. Para demostrar la primera de estas leyes hay que resolver el problema en el extremo, es decir, hallar la raíz de la ecuación

$$\frac{\partial \rho_\nu}{\partial \nu} = 0.$$

Para demostrar la segunda hay que hallar

$$\int \rho_\nu d\nu.$$

Damos al lector la posibilidad de hacer estos cálculos.

§ 166a. *Radiación estimulada*

Retornemos una vez más a la cavidad dentro de la cual existe un campo electromagnético en equilibrio con las paredes. Pero ahora analicemos este sistema desde el punto de vista microscópico. Los emisores de fotones son los átomos excitados. Fijemos nuestra atención en los fotones $h\nu$. El gas de estos fotones se halla en equilibrio con los átomos que emiten y absorben luz de frecuencia ν, es decir, con los átomos que poseen las energías E_2 y E_1, donde $E_2 - E_1 = h\nu$.

Al establecerse el equilibrio, el número de átomos N_1 que se encuentran en el nivel E_1, y el de átomos N_2 que se hallan en el nivel E_2 será invariable. Y como la distribución de los átomos por energías satisface la ley de Boltzmann,

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{(E_2 - E_1)/kT} = e^{h\nu/kT}.$$

Como es natural, el equilibrio del sistema tiene carácter dinámico, es decir, los átomos pasan del nivel inferior al superior y viceversa, y los fotones serán ya absorbidos ya emitidos. Como existe el equilibrio, los números de transiciones hacia arriba y hacia abajo en la unidad de tiempo serán iguales entre sí.

Hay dos procesos que nos parecen evidentes. El primero de ellos es la absorción del fotón, que ocurre cuando el fotón incide sobre un átomo que se halla en el nivel inferior E_1; en este caso el átomo se «excita», es decir, pasa al nivel E_2. El número de estos sucesos puede escribirse de la forma

$$BN_1W(\varepsilon).$$

Aquí B es un coeficiente de proporcionalidad, y nuestra expresión afirma que el número de transiciones de los átomos de abajo a arriba

(número de absorciones de fotones) es proporcional al número de átomos de energía E_1 y al número de fotones de energía ε.

El segundo proceso cuya existencia es evidente es el de la transición espontánea de los átomos desde el nivel superior al inferior. El estado de los átomos en el nivel E_2 es inestable, y por esto tienen que pasar paulatinamente al nivel inferior. El número de estas transiciones en la unidad de tiempo debe ser proporcional al número de átomos excitados que hay en el sistema

$$AN_2,$$

donde A es otro coeficiente de proporcionalidad.

Si se igualan AN_2 y $BN_1W(\varepsilon)$ para $W(\varepsilon)$ se obtiene la ley de distribución de Boltzmann, o sea, la estadística a que se subordinan los átomos. Pero esta suposición, como vimos en el párrafo anterior, conduce a una manifiesta contradicción con la experiencia. Por lo tanto, además de los dos procesos que hemos descrito, en la creación del equilibrio interviene otro.

Inmediatamente después de publicar Planck su fórmula, Einstein indicó que todo quedaría en su lugar, si se admitía que la incidencia de un fotón de energía $h\nu$ sobre un átomo excitado lo estimula a radiar con esta misma frecuencia. Con la particularidad de que la probabilidad de este proceso debe ser la misma que la de la absorción, es decir, el número de actos de radiación estimulada en la unidad de tiempo es igual a

$$BN_2W(\varepsilon).$$

Igualando ahora el número de transiciones hacia arriba y hacia abajo, obtenemos

$$AN_2+BN_2W(\varepsilon)=BN_1W(\varepsilon),$$

o bien

$$W(\varepsilon)=\frac{A/B}{e^{h\nu/kT}-1}.$$

Los valores extremos de $W(\varepsilon)$, o sea, $W(\varepsilon)=e^{kT/h\nu}$ para los valores pequeños de $h\nu/kT$ (Raylaigh — Jeans) y $W(\varepsilon)=e^{-h\nu/kT}$ para los valores grandes de $h\nu/kT$, los conocemos. Esto nos obliga a suponer que $A=B$. Esta es la demostración de cómo se llega a la fórmula de la estadística de los fotones

$$W(\varepsilon)=\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}.$$

Como vemos, el espectro del cuerpo negro sólo puede explicarse introduciendo la hipótesis de la radiación estimulada.

Puede demostrarse que la radiación estimulada debe diferir considerablemente de la espontánea. Los fotones emitidos espon-

táneamente tienen distintas direcciones y sus fases son casuales. En cambio, los fotones que aparecen en virtud del encuentro de un fotón $h\nu$ con un átomo excitado, tienen la misma fase e igual dirección que el fotón primario. Gracias a estas singularidades de la radiación estimulada pueden conseguirse flujos luminosos de potencias fantásticas en los aparatos llamados *laseres* o *generadores de radiación estimulada* (véase el § 206).

§ 166b. Luminiscencia

Cuando hablamos de luminiscencia nos referimos al caso en que las moléculas pueden hacerse entrar en estados excitados sin que aumente su energía cinética media, es decir, sin calentamiento.

La luminiscencia no cumple la ley de Kirchhoff. La intensidad de la luminiscencia, por definición, es mayor que la intensidad de la radiación de la misma longitud de onda emitida por el cuerpo negro.

Hay dos tipos de luminiscencia. Uno, el fenómeno llamado fluorescencia, que consiste en la transición espontánea de la molécula del estado excitado F al nivel inferior N (fig. 189a). La duración de la fluorescencia es generalmente menor que 10^{-7} s y siempre menor de 1 s.

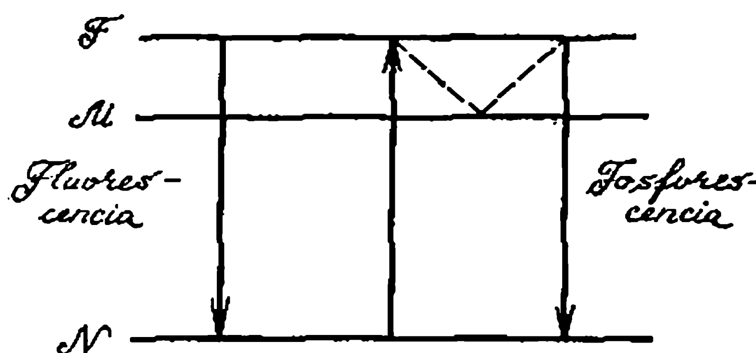


FIG. 189a.

Si la molécula o el átomo excitado pasa del estado excitado a un nivel metaestable, puede producirse la fosforescencia. Se llama metaestable un nivel desde el cual son extraordinariamente poco probables las transiciones a un nivel más bajo. La radiación sólo puede producirse ahora si la molécula retorna del nivel M al nivel excitado F que tenía antes. Cuando las temperaturas son altas, este retorno se produce rápidamente, cuando son bajas, lentamente. Por lo tanto, la fosforescencia, a diferencia de la fluorescencia, depende de la temperatura.

La luminiscencia puede ser provocada por factores muy diversos: por una reacción química, por rozamiento, etc. Las variantes mas importantes son la fotoluminiscencia y la electroluminiscencia, que se producen a causa de la absorción de la luz o de los choques de las partículas con carga.

La fotoluminiscencia no puede tener una frecuencia mayor (es decir, un cuanto de energía mayor) que la luz excitadora. La fluorescencia roja la excita la luz anaranjada, la amarilla, la luz verde, la verde, la luz celeste y así sucesivamente.

III

ESTRUCTURA Y PROPIEDADES DE LA MATERIA

26

FLUJOS DE PARTÍCULAS CARGADAS

La forma más simple de la materia, por lo menos en el sentido de la clasificación, es cierto conjunto de partículas con carga — electrones e iones —. Nos encontramos con sistemas de partículas cargadas, bien en forma de haces de partículas en los que todas ellas tienen la misma velocidad y se mueven en el mismo sentido, o bien en forma de gas de partículas que se mueven caóticamente. Como es natural, también puede haber estados intermedios. En este capítulo se estudiarán los fenómenos físicos fundamentales y los dispositivos técnicos en que nos encontramos con los haces de partículas y con el plasma. Los problemas de emisión de electrones relacionados directamente con la física del sólido se expondrán en el cap. 37.

§ 167. Movimiento de una partícula con carga en un campo eléctrico y en un campo magnético

Sobre una partícula con carga, un campo electromagnético arbitrario ejerce una fuerza $f=eE+\frac{e}{c}[vB]$ (pág. 282). Si los campos E y B se conocen en función de las coordenadas y del tiempo y se da la velocidad inicial y el punto en que se encuentra la partícula, la trayectoria $r(t)$ de las partículas que se mueven con velocidades $v \ll c$ pueden hallarse partiendo de la ley fundamental de la

mecánica

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=f.$$

La resolución de este problema ofrece generalmente grandes dificultades matemáticas. Para conocer las leyes de carácter general basta estudiar el movimiento de la carga en un campo uniforme.

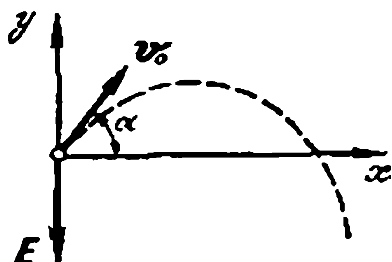


FIG. 190.

PARTÍCULA EN UN CAMPO ELÉCTRICO. La partícula penetra en el campo formando un ángulo de $90^\circ+\alpha$ (fig. 190). Cuando las coordenadas se toman como indica la figura, las ecuaciones del movimiento tienen la forma

$$\frac{dv_y}{dt}=-\frac{e}{m}E,\qquad \frac{dv_x}{dt}=0.$$

De donde

$$v_y=-\frac{e}{m}Et+v_{0y},\quad v_x=v_{0x}.$$

Volviendo a integrar, y suponiendo $x=0$ cuando $t=0$, obtenemos:

$$y=-\frac{1}{2}\frac{e}{m}Et^2+v_{0y}t,\quad x=v_{0x}t.$$

Eliminando el tiempo, hallamos la ecuación de la curva parabólica que describirá la carga eléctrica (línea de trazos de la fig. 190).

Si la partícula penetra en el campo formando un ángulo recto ($v_{0y}=0$), la ecuación de la trayectoria toma la forma

$$y=-\frac{1}{2}\frac{e}{m}E\frac{x^2}{v_0^2}.$$

Y si la partícula penetra en el campo siguiendo la dirección longitudinal de una línea de fuerza, continuará su movimiento a lo largo de esta línea con una aceleración $\frac{e}{m}E$.

Llamando V a la diferencia de potencial entre los puntos inicial y final del movimiento de la partícula con carga, y aplicando la ecuación de la energía cinética, obtenemos:

$$eV=\frac{m}{2}(v^2-v_0^2).$$

Si la velocidad final $v\gg v_0$,

$$eV=\frac{mv^2}{2}\ \text{y}\ v=\sqrt{2\frac{e}{m}V}.$$

Esta ecuación explica por qué se utiliza tanto la unidad de energía *electrón-voltio*:

$$1\,eV=1{,}63\cdot10^{-12}\ \text{erg}.$$

Este es el trabajo necesario para acelerar un electrón con una diferencia de potencial de 1V. La unidad «electrón-voltio» resulta cómoda en aquellos casos en que la energía se refiere a una partícula elemental. El trabajo de ionización, de arranque de un electrón y de desprendimiento del electrón de un metal son magnitudes del orden de unidades y decenas de electrón-voltios.

PARTÍCULA EN CAMPO MAGNÉTICO. Las peculiaridades de la fuerza que actúa sobre una partícula con carga en un campo magnético son conocidas (pág. 283). Supongamos que la partícula penetra en el campo con la velocidad inicial $\boldsymbol{v}_0$. Descompongamos este vector en sus componentes longitudinal $v_{\parallel}$ y transversal $v_{\perp}$ al campo. En este caso, para el movimiento en el plano perpendicular al campo, tendremos

$$ma = \frac{e}{c} v_{\perp} B.$$

El movimiento longitudinal transcurrirá uniformemente con la velocidad constante $v_{\parallel}$.

El movimiento en el plano perpendicular es circular y $a = v_{\perp}^2/R$ es la aceleración centrípeta. Por lo tanto,

$$\frac{e}{c} v_{\perp} B = \frac{mv_{\perp}^2}{R},$$

de donde el radio de la circunferencia $R = \frac{mv_{\perp}c}{eB}$ es directamente proporcional a la velocidad de la partícula e inversamente proporcional a la inducción magnética. Tiene importancia recordar que la velocidad angular de rotación alrededor de la línea de fuerza $\omega = \frac{eB}{mc}$ es igual para todas las partículas de un mismo tipo en un campo dado. Independientemente de las magnitudes y de las direcciones que tengan sus velocidades, todas las partículas darán una vuelta alrededor de la línea de fuerza en un mismo tiempo.



FIG. 191.

Si la partícula penetró en el campo formando ángulo con la dirección de éste, se moverá siguiendo una hélice, el radio de cuya espira será R, con una frecuencia ω (fig. 191). La proyección de la

velocidad sobre la dirección de las líneas de fuerza $v_{\parallel}$ permite hallar el paso de la hélice:

$$z = v_{\parallel} T = v_{\parallel} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi mc}{eB} v_{\parallel}.$$

Es esencial que la magnitud $v_{\parallel} = v_0 \cos\alpha$, donde α, que es el ángulo que forma la velocidad inicial con el campo, es constante, con gran exactitud incluso cuando el ángulo de dispersión de las velocidades iniciales es de 5—10° (los valores de $v_{\parallel}$ diferirán entre sí no más de un 1%). De aquí se deduce que cada z centímetros, el haz divergente (dentro de los límites indicados) de partículas cargadas se reunirá en un punto, es decir, se enfocará sobre la generatriz del cilindro (sobre el cual se arrolla la trayectoria helicoidal) que pasa por el punto de entrada de las partículas en el campo.

Ejemplo. Supongamos que un electrón es acelerado por una tensión $V=300$ V y que penetra en un campo magnético, cuya inducción $B=500$ Gs, formando un ángulo $\alpha=30°$. La velocidad del electrón será

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 1}{9 \cdot 10^{-28}}} = 10^9 \text{ cm/s}.$$

Conviene señalar que $v_0/c = 1/30$, por lo que en este cálculo no tiene sentido introducir las correcciones relativistas.

$$v_{\parallel} = v_0 \cos\alpha = 0{,}87 \cdot 10^9 \text{ cm/s}, \quad v_{\perp} = 0{,}5 \cdot 10^9 \text{ cm/s}.$$

El radio del cilindro sobre el que se arrolla la trayectoria helicoidal del electrón es $R = \frac{mv_{\perp}c}{eV} = \frac{9 \cdot 10^{-28} \cdot 0{,}5 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 500} = 0{,}056$ cm, es decir, su diámetro es un poco mayor que un milímetro. La velocidad angular

$$\omega = \frac{eB}{mc} = \frac{4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 500}{9 \cdot 10^{-28} \cdot 3 \cdot 10^{10}} = 0{,}89 \cdot 10^{10} \text{ rad/s}.$$

El paso de la trayectoria helicoidal

$$z = v_{\parallel} T = 0{,}87 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 3{,}14}{0{,}89 \cdot 10^{10}} = 0{,}6 \text{ cm}.$$

§ 168. Obtención de haces de partículas con carga

En un tubo de descarga en gas (véase más adelante) se mueven, uno al encuentro del otro, dos flujos, uno de electrones y otro de iones positivos. Para obtener un rayo iónico, es decir, un haz de iones que se muevan en la misma dirección, se puede practicar un orificio (canal) en el cátodo. Una parte considerable de los iones que lleguen al orificio pasará por él y después seguirán moviéndose por inercia. Estos haces, con el nombre de rayos canales o anódicos, eran ya conocidos por los físicos en el siglo pasado. Este proce-

dimiento de obtención de un flujo iónico conserva su actualidad hasta ahora. Una sustancia se hace pasar al estado gaseoso, sus moléculas se ionizan y luego los iones positivos se hacen salir por el canal del espacio de la descarga en el gas.

Cuando se trata de obtener un rayo electrónico no se usa la descarga en gas. De fuente del rayo electrónico hace las veces el llamado cañón o proyector de electrones, que es un dispositivo en que se aprovecha el fenómeno de la emisión termoelectrónica (para más detalles véase la pág. 545). Como sabemos, los metales incandescentes pueden servir de fuentes de electrones. Así, por ejemplo, 1 cm^2 de superficie de volframio calentada hasta 2400°C produce en 1 s el número de electrones que le corresponde a una corriente de 1A de intensidad.

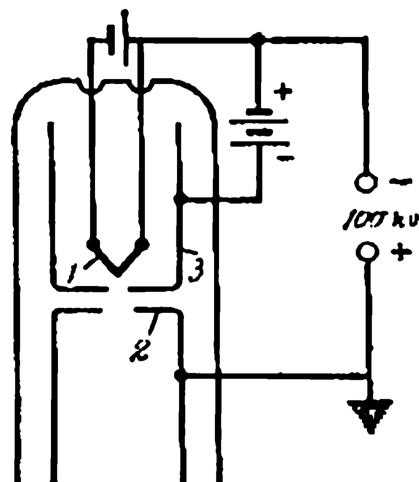


FIG. 192.

En la fig. 192 puede verse el esquema de un cañón electrónico. Entre los electrodos se crea una diferencia de potencial que acelera los electrones. Sirve de cátodo un filamento de volframio *1* caldeado por una corriente eléctrica. El ánodo *2* tiene forma de vaso con un orificio circular en su fondo. Los electrones salen de este orificio formando un haz cuya divergencia y anchura dependen del orificio. El enfoque del haz de electrones (por medio del electrodo de enfoque *3*) permite obtener haces intensos y delgados (véase el § 169).

El problema de la obtención de un haz de electrones cuya intensidad sea máxima para un consumo de energía dado, tiene una gran importancia técnica.

Para aprovechar todos los electrones que emite el filamento es necesario, en primer lugar, acelerarlos por medio de una tensión suficientemente alta. El filamento emite un número de electrones determinado en la unidad de tiempo. Todos estos electrones deben ser alejados del filamento. Si la tensión es pequeña, junto al filamento se forma una nube electrónica que dificulta la emisión. A medida que aumenta la tensión, la nube se va disipando paulatinamente y la corriente termoiónica aumenta. Por fin, llegamos a una tensión con la cual no se forma nube de electrones. Un aumento mayor de la tensión no contribuye ya a incrementar la corriente termoiónica: hemos alcanzado la corriente de saturación. Estas son las condiciones en que debe funcionar el cañón electrónico. Así, pues, una tensión suficientemente grande asegura la retirada de todos los electrones del filamento.

Ante la técnica se plantea otro problema: el de aumentar el número de electrones que salen del filamento. Los cátodos de volframio han sido superados, en cuanto a propiedades emisoras, por los cátodos toriados y oxidados. El cátodo toriado consiste en un alambrito de volframio recubierto de una finísima capa de torio metálico. La corriente que proporciona el volframio puro a 2400°C, la da el volframio toriado a 1500°C. El cátodo oxidado consta de un soporte metálico recubierto de una capa de óxidos de metales alcalinotérreos. Este cátodo a 900°C proporciona ya la misma corriente que el de volframio a 2400°C.

En los aparatos electrónicos modernos, el cátodo oxidado se utiliza con caldeo indirecto. En este caso el cátodo se fabrica en forma de un tubito, dentro del cual se coloca una resistencia helicoidal de volframio que se calienta por medio de una corriente.

§ 169. Lentes electrónicas

Los campos eléctricos y magnéticos dan la posibilidad de dirigir un haz de electrones. Pero sus acciones no se limitan a las posibilidades de desviar el haz de su dirección inicial. Valiéndose de diversos campos se puede conseguir que un haz de electrones paralelo se haga convergente o divergente, se puede hacer que el haz que diverge de un punto se reúna en otro. Unos sistemas de campos bastante simples permiten hacer «lentes» para el haz electrónico. Se hace posible la creación de una nueva rama de la ciencia, la óptica electrónica, cuyo éxito más notable es el microscopio electrónico.

Recordemos las propiedades de una lente biconvexa ordinaria. Si a un lado de ella se coloca un objeto, al otro lado de la lente aparece la imagen del objeto aumentada o disminuida. Esto ocurre

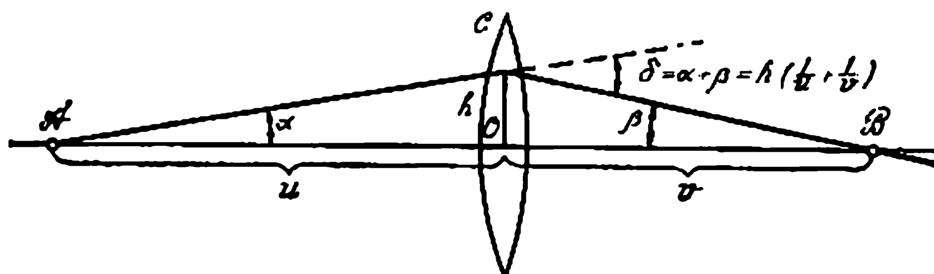


FIG. 193.

porque todos los rayos que parten de un punto cualquiera del objeto se reunen en un punto de la imagen, y todos los puntos de la imagen van a parar a un mismo plano perpendicular al eje de simetría de la lente. La simple construcción geométrica que reproduce la fig. 193,

muestra por qué la lente se comporta de este modo: el rayo que incide sobre ella se desvía en un ángulo proporcional a la distancia h que hay entre el eje de simetría y el punto de intersección del rayo con la lente. La construcción se ha hecho para un punto del objeto que se halla en el eje de simetría. Pero este mismo resultado también será correcto para otros puntos. Debe convenirse (como se hace en óptica) en que estos razonamientos son válidos para las lentes delgadas y para los haces que divergen dentro de los límites de un ángulo sólido pequeño.

Ahora demostraremos que el papel de lente pueden desempeñarlo eficazmente unos campos eléctricos y magnéticos cuya simetría sea axil. Estos campos pueden obtenerse de placas con un orificio circular cargadas de electricidad, de condensadores cilíndricos, de espiras de corriente y de bobinas planas. Existe un gran número de sistemas que se comportan, con respecto a un haz electrónico, como una lente. Pero para comprender esta idea bastará que consideremos un ejemplo de lente eléctrica y otro de lente magnética.

Como ejemplo de lente eléctrica se ha elegido un condensador en una de cuyas placas se ha practicado un orificio redondo (fig. 194).

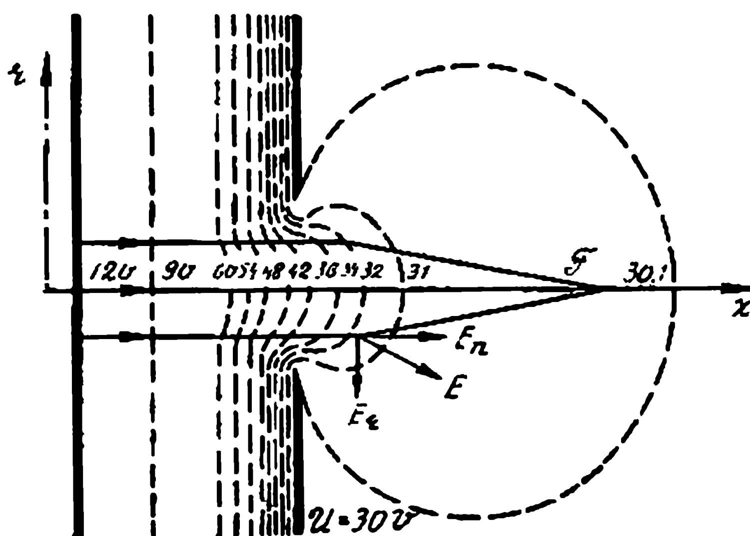


FIG. 194.

Si un haz de electrones incide sobre este orificio por la parte del campo uniforme, se enfocará. En efecto, cuando el electrón llegue a la región del campo no uniforme, sobre él actuará una fuerza perpendicular a las superficies equipotenciales y que, por consiguiente, forma ángulo con el eje de simetría. Descomponiendo esta fuerza en dos, vemos que existe una componente radial que aprieta los electrones hacia el eje. Sin embargo, esto sería insuficiente para

que el sistema considerado desempeñase el papel de lente. Se necesita además que la componente radial del campo sea proporcional a la distancia entre el eje de simetría y el punto de incidencia del electrón sobre el plano del orificio. Una simple deducción demuestra que así es en realidad. La componente radial de la intensidad del campo eléctrico puede representarse de la forma

$$E_r = -\frac{1}{2}\frac{dE}{dz}r,$$

donde $\frac{dE}{dz}$ es el gradiente de la intensidad a lo largo del eje de simetría. Para demostrarlo consideraremos un pequeño cilindro colocado como indica la fig. 195 (la distancia 1—2 se considera

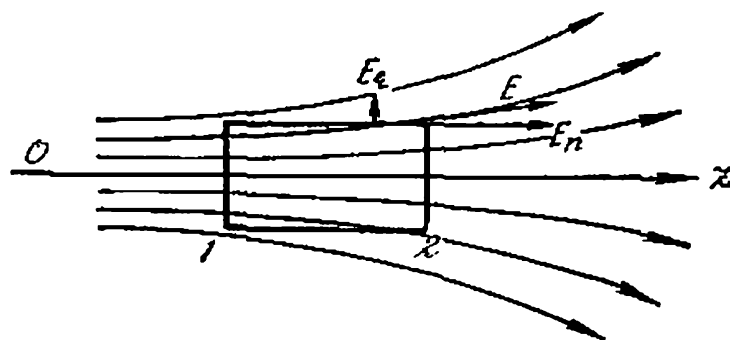


FIG. 195.

infinitamente pequeña). Como dentro del cilindro no hay cargas, la diferencia entre los flujos a través de las bases 1 y 2, $\pi r^2 \cdot dE$, deberá ser igual al flujo a través de la superficie lateral $E_r \cdot 2\pi r\, dz$ con signo contrario.

De este modo, el orificio practicado en la placa cargada de electricidad hace las veces de lente para el rayo electrónico.

Veamos ahora cómo se comportan los rayos electrónicos que pasan a través de una bobina plana con corriente (fig. 196). Esta bobina es una lente magnética. Los electrones se mueven describiendo espirales y retornan al eje de simetría después de recorrer una espira. Las propiedades de enfoque de esta bobina son indudables. Puede demostrarse que el ángulo de desviación del rayo es proporcional a la distancia desde él al eje de simetría. La bobina magnética cambia el acimut de la trayectoria electrónica y, por lo tanto, la imagen del objeto producida por esta lente será invertida. Pero este giro no distorsiona la imagen electrónico-óptica.

Así, pues, si un objeto dispersa o emite rayos electrónicos, interponiendo en la trayectoria de estos electrones dispersados una lente eléctrica o magnética, podemos obtener la «imagen electrónica» del objeto. Si en el plano de la imagen se coloca una placa

fotográfica o una pantalla luminiscente, aparecerá en ella una «vista» singular del objeto, brillante en los puntos que emiten o dispersan muchos electrones, y oscura en aquellos que corresponden a la ausencia de dispersión o emisión en el objeto. Como quiera que es posible

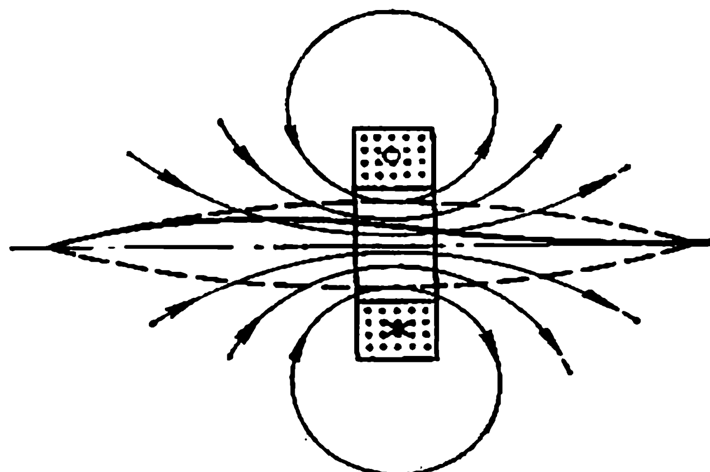


FIG. 196.

construir un sistema de lentes electrónicos que produzcan una imagen aumentada del objeto, resulta viable la realización del microscopio electrónico.

§ 170. *Microscopio electrónico*

El microscopio electrónico, es decir, un microscopio en el cual el papel de los rayos de luz lo desempeñan rayos electrónicos, posee unas posibilidades extraordinarias, aún no aprovechadas por completo, de «observación» de los objetos. Esto se explica porque las posibilidades de aumentar la imagen del objeto que se observa al microscopio electrónico, en general, son ilimitadas. En cambio, el microscopio óptico sólo puede dar aumentos no mayores de 2000—3000 veces.

Para poder comprender las causas de esta diferencia hay que conocer el concepto de *poder resolutivo o separador* del microscopio. El problema se plantea del modo siguiente: ¿cuáles son las condiciones necesarias para poder ver separadamente dos puntos próximos?

Supongamos que delante de una rendija o de un orificio circular hay un foco de luz idealmente puntual. Después que la luz pasa por el orificio, aparece una figura de difracción. Una lente colocada detrás del orificio no puede concentrar los rayos en un punto. Al contrario, aparece un círculo nebuloso (o una franja, según se trate de un orificio redondo o de una rendija) rodeado de anillos oscuros

y brillantes que se suceden entre sí. En la pág. 390 calculamos la magnitud de esta nebulosidad para una rendija. El radio del disco, por el cual se representa el punto después de la difracción en el orificio, se dio en la pág. 390. Este radio es igual a $1{,}22\ \lambda f/D$.

Todo aparato óptico tiene necesariamente un orificio de entrada: el objetivo. La difracción en el objetivo es una circunstancia inevitable, y cualquier punto luminoso se extenderá, formando un circulito brillante, en el plano focal. La dimensión angular de este esparcimiento es igual a $1{,}22\ \lambda/D$, de modo que sus dimensiones lineales en el plano focal serán $1{,}22\ \lambda f/D$. Aquí f y D tienen respectivamente el sentido de distancia focal y de diámetro del objetivo. Para el microscopio sólo da esta fórmula el orden de magnitud, porque el objeto se encuentra cerca del objetivo y el haz de rayos no puede considerarse paralelo. Pero ahora no vamos a entrar en detalles, ya que únicamente nos interesan las valoraciones cualitativas.

Si los dos puntos luminosos, que se observan al microscopio, están tan cerca que los discos brillantes de sus imágenes tienen sus centros más próximos entre sí que una distancia igual al radio del disco, estos dos puntos no pueden verse separados.

En las observaciones microscópicas la resolución lineal es igual a $1{,}22\ \lambda f/D$. Y como la relación de la distancia focal al diámetro del objetivo no puede hacerse considerablemente menor que la unidad, el microscopio da la posibilidad de ver dos puntos que se hallen a una distancia del orden de la longitud de onda. Por lo tanto, cuando para la observación se utiliza luz ordinaria (cuya longitud de onda es de cerca de $0{,}5\ \mu m$), en el objeto es imposible distinguir detalles que tengan centésimas de micra.

Pero, ¿qué aumento útil proporciona el microscopio óptico? Supongamos que cierta imagen se observa por medio de un ocular, se fotografía, se vuelve a observar por el ocular y así sucesivamente. Está claro que por este procedimiento puede alcanzarse un aumento tan grande como se desee. Pero este aumento perderá todo sentido una vez que en la fotografía obtenida puedan distinguirse a simple vista los puntos de máxima resolución. Por consiguiente, si una fotografía obtenida en un microscópio óptico se aumenta hasta un grado tal, que a una micra le corresponda 0,5—1 mm, se habrá alcanzado el límite del aumento útil. Como vemos, para este microscopio el aumento útil máximo se encuentra aproximadamente entre 1 y 2 mil.

En el párrafo siguiente veremos que el rayo electrónico posee las propiedades de una onda cuya longitud viene expresada por la fórmula

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

donde h es la constante de Planck; m, la masa y v, la velocidad del electrón. Cuando la tensión es de 50 000 V, la longitud de onda es igual a 0,05 Å. Pero la distancia entre los átomos es mayor que 1 Å. Por lo tanto, las posibilidades límites del microscopio electrónico no están ligadas al poder resolutivo.

Los cálculos demuestran que la construcción del microscopio electrónico permite en principio alcanzar un poder separador de 2—3 Å. En la actualidad se consigue obtener en ciertos casos una resolución de 5—8 Å, es decir, un aumento útil de hasta un millón de veces.

¿Cuál es la estructura del microscopio electrónico? La óptica luminosa y la electrónica tienen mucho de común. En los aparatos electrono-ópticos nos encontramos siempre con los mismos elementos y los mismos principios estructurales que vemos en los aparatos ópticos ordinarios. La diferencia principal (que, sin embargo, no tiene carácter esencial) consiste en que las lentes electrono-ópticas son dispositivos cuyo «índice de refracción» varía de un modo continuo, ya que los campos eléctricos o magnéticos varían en ellas, no a saltos (como el índice de refracción en el límite de una lente de vidrio), sino continuamente. El esquema del microscopio se muestra en la fig. 197; 1 es el proyector de electrones; 2, la lente condensadora; 3, el objeto; 4, el objetivo; 5, la imagen intermedia; 6, la lente proyectora; 7, la imagen final, y 8, la ventanilla de observación. Si se desea observar la imagen a simple vista, en lugar de la placa fotográfica puede colocarse una pantalla fluorescente. Las dimensiones del microscopio electrónico son mucho mayores que las del óptico. Ocupa un espacio considerablemente mayor, consume tensión eléctrica y cuesta bastante más caro. Pero todo esto se compensa por su enorme poder resolutivo.

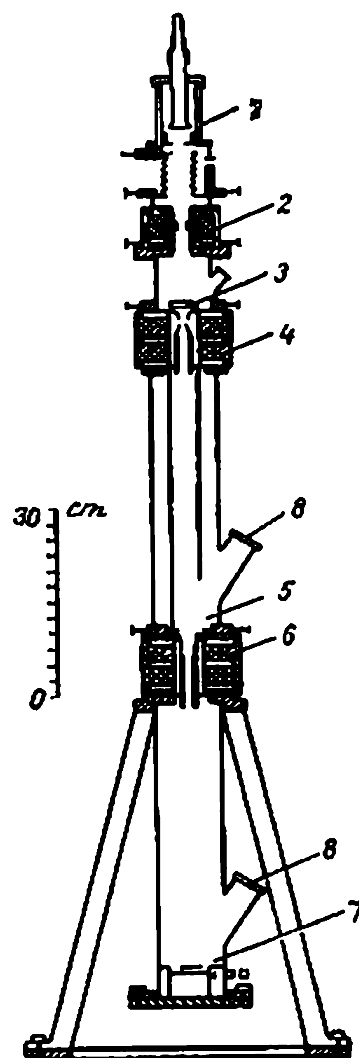


FIG. 197.

El microscopio electrónico, cuyo esquema reproduce la figura, funciona con lentes magnéticas. Para eliminar los choques de los electrones con las moléculas del aire, en el sistema se hace un vacío suficientemente alto, del orden de 10^{-5} mm de la columna de mer-

curio. El cañón electrónico genera un haz de electrones cuya energía corresponde a 50 000 V. Por lo tanto, la instalación debe tener un transformador de alto voltaje que eleve la tensión de la red hasta el valor indicado.

Existen diversos procedimientos para observar un objeto valiéndose de un rayo electrónico. Los electrones son absorbidos muy intensamente por la sustancia. Por esto, si se desea observar un objeto «a trasluz», su espesor debe medir fracciones de micra. Al pasar a través de una capa delgada de sustancia, los electrones se dispersan de distinto modo en los diferentes puntos del objeto. Este fenómeno se aprovecha para observar el objeto. Existen dos sistemas de visión electrónica, ambos se muestran en la fig. 198. Pueden dejarse pasar sólo aquellos rayos electrónicos que atraviesan la sustancia sin dispersarse, y retener los rayos dispersados en un diafragma (fig. 198, *a*). En este caso los puntos más brillantes

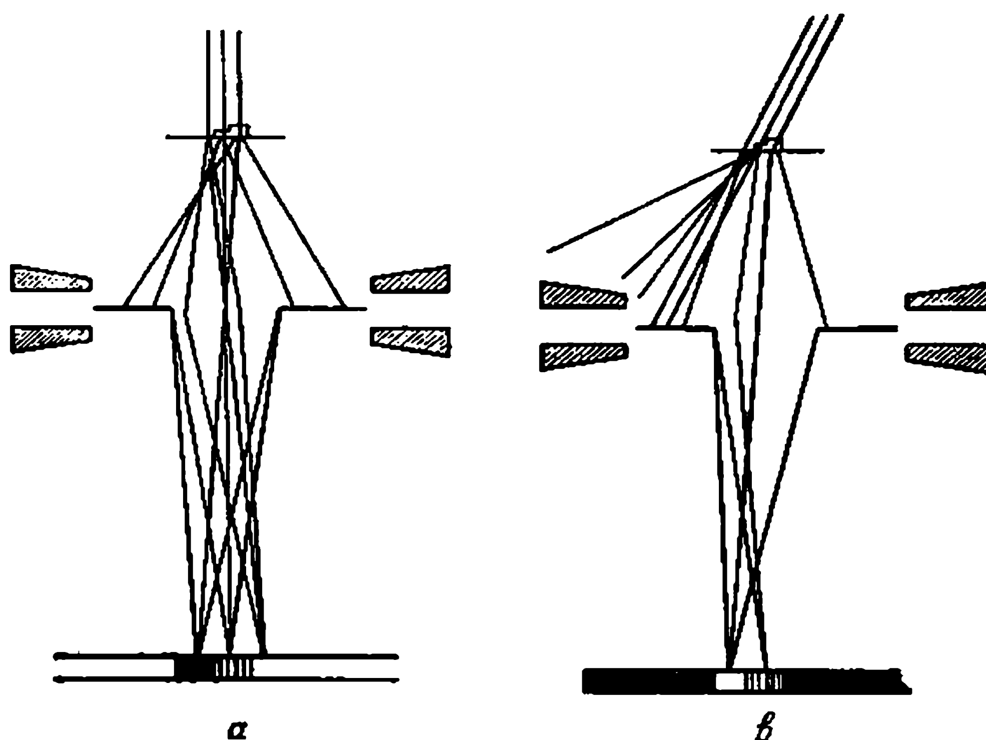


FIG. 198.

de la imagen serán las partes de la sustancia que no dispersan a los electrones (incluyendo en ellos los puntos en que el espesor de la capa es pequeño). Y al contrario, parecerán oscuras las partes del objeto que dispersan intensamente a los rayos electrónicos. El segundo procedimiento es el inverso al primero (fig. 198, *b*). El objeto se coloca formando ángulo con el eje del microscopio y a las lentes sólo se dirigen los electrones dispersados. Está claro que la

relación entre los campos oscuros y claros de la imagen será ahora inversa a la del caso anterior.

La observación de los objetos en el microscopio electrónico se efectuá generalmente depositándolos sobre substratos o membranas soporte cuyo espesor es de cerca de 0,01 μ m. Este substrato se prepara como sigue. Sobre la superficie del agua se vierte una gotita

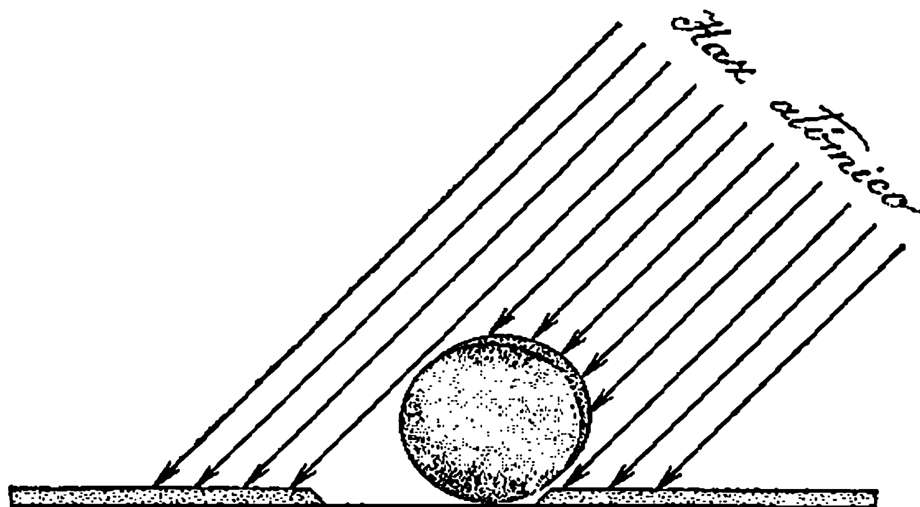


FIG. 199.

de solución de colodión en acetato de amilo. La gota se extiende por el agua formando una película delgada que, después de evaporarse el acetato de amilo, adquiere suficiente resistencia. Se hace un bucle de alambre delgado y con él se levanta la película cogiéndola por debajo; el soporte para el objeto está preparado. Cuando el substrato se observa bajo el haz directo, parecerá brillante. Cuando el rayo incida oblicuamente, la membrana soporte parecerá oscura.

Si los objetos a observar dispersan débilmente los electrones, se verán mal sobre fondo común. Para aumentar el contraste se recurre a la pulverización de diversos metales sobre dichos objetos. El substrato con el objeto depositado se somete a un flujo de átomos de metal (obtenido por vaporización del metal en vacio). La pulverización se lleva a cabo en ángulo oblicuo con respecto a la película soporte (fig. 199). Preparada de este modo, la muestra se sombrea. Al observarla a los rayos electrónicos aparece una imagen extraordinariamente clara, ya que los electrones sólo son dispersados por aquellas partes del objeto sobre las cuales se depositaron los átomos del metal. En la fig. 200 puede verse el aspecto que ofrece la microfotografía electrónica del virus de la gripe.

La observación de objetos sobre substrato tiene una importancia especial para la biología y la medicina. Las bacterias se sacan, con

el soporte de la muestra, del medio en que se sospecha que existen. Son fáciles de estudiar las partículas que se pueden obtener en estado de suspensión, para poder sacarlas con el soporte.

Cuando se trata de observar la superficie de un cuerpo sólido hay que recurrir a otros procedimientos completamente distintos. En algunos casos se puede hacer que el sólido sea emisor de electrones. Si es así, haciendo pasar este haz por las lentes, puede observarse la superficie. Pero en una serie de casos este procedimiento es inaplicable: porque la emisión es pequeña, la muestra no debe calentarse, etc. Entonces se utiliza el método de la réplica. Sobre la superficie del objeto se deposita una capa delgada de una sustancia que después se separa de él y se observa al trasluz en el microscopio electrónico. La experiencia demuestra que las capas que forman diversas sustancias (orgánicas, metálicas, o el cuarzo) constituyen una copia exacta (réplica) de la superficie que se estudia. La fig. 201 reporduce la microfotografía de la superficie de un vidrio esmerilado obtenida por este procedimiento. El método de las réplicas exige una experimentación meticulosa. La separación de la capa depositada es un problema difícil. Uno de los procedimientos posibles para resolverlo es disolver el objeto conservando la película.

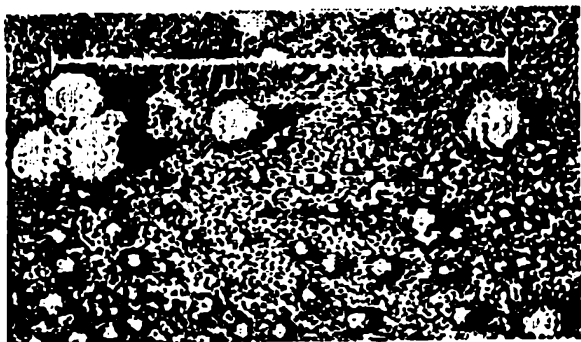


FIG. 200.



FIG. 201.

§ 171. *Proyectores electrónicos e iónicos*

En la actualidad se consigue ver con el microscopio electrónico, en el mejor de los casos, las moléculas grandes, en forma de manchas o puntos aislados. No obstante, existe la posibilidad de lograr mucho más, concretamente, de observar la forma de las moléculas y de ver el cuadro de su nube electrónica. Esto se ha conseguido por medio de microproyectores especiales.

La fig. 202 reproduce el esquema de un microproyector electrono-iónico *). Consiste en una ampolla de vidrio, de la cual se ha extraído el aire hasta alcanzar un vacío de 10^{-8} mm de la columna de mercurio, en la cual se han introducido unos electrodos. El cátodo se hace en forma de punta con un radio de redondeo muy pequeño. La forma del cátodo permite crear junto a él un campo del

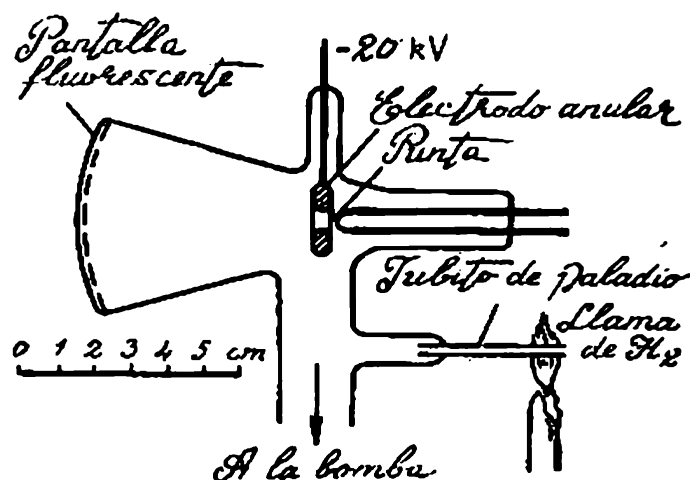


FIG. 202.

orden de 10^7 V/cm. En presencia de este campo, del cátodo frío comienzan a desprenderse electrones, los cuales salen lanzados formando un flujo radial. Si en la trayectoria del flujo se encuentra un obstáculo, en la pantalla fluorescente (o en la placa fotográfica) aparece una imagen en sombra. Si el objeto se halla en la superficie de la punta, el aumento será igual a la relación entre la distancia desde la punta hasta la pantalla y el radio de redondeo de la punta. Con procedimientos especiales se consigue obtener radios de redondeo menores de 200 Å.

Si sobre la punta se depositan moléculas de cualquier sustancia, sus imágenes pueden verse en la pantalla. Esto se ha conseguido hacer con moléculas de ftalocianina que miden cerca de 15 Å. En la pantalla se ve claramente la forma de la molécula, su estructura característica en cuatro pétalos y las condensaciones y enrarecimientos de la densidad electrónica.

Aunque este procedimiento no se puede considerar practicable, en las condiciones normales de laboratorio, con todos los objetos, difícil es sobrestimar la posibilidad de lograr un aumento útil de más de un millón de veces.

*) Se conoce también con el nombre de microscopio de emisión de campo o de campo iónico (*N. del T.*).

No obstante, el poder separador puede elevarse aún en un orden de magnitud, a la vez que se aumenta la nitidez de la imagen, sí, empleando este mismo principio, se observan los objetos sustituyendo el haz electrónico por un haz iónico. La estructura del proyector de iones no difiere esencialmente del esquema del proyector de electrones. A la punta se le comunica un potencial positivo y, cuando los campos son grandes (10^8 V/cm), se pueden desprender de ella iones. Para esto hay que practicar previamente, o durante el funcionamiento del proyector, la adsorción de los átomos o moléculas que se encuentran en la superficie de la punta. (En el aparato que muestra la fig. 202 se inyecta en la ampolla, por medio de un tubito de paladio, una pequeña cantidad de moléculas de hidrógeno). En cuanto los átomos (moléculas) neutros ocupan un sitio en la superficie de la punta, ceden su electrón y se dirigen a la pantalla en forma de iones positivos.

Con un proyector iónico de este tipo se ha conseguido ya obtener la imagen de la propia punta de volframio. La imagen aparece porque la adsorción de los átomos tiene lugar en determinados puntos del cristal de volframio. En la imagen obtenida se ven los períodos de la red, es decir, la resolución llega a 2—3 Å.

§ 172. Tubo de rayos catódicos

El tubo de rayos catódicos es un dispositivo que ha alcanzado gran difusión y que es elemento imprescindible del televisor, del radar y del oscilógrafo. El principio básico del tubo de rayos catódicos lo vamos a explicar poniendo el ejemplo de uno muy simple

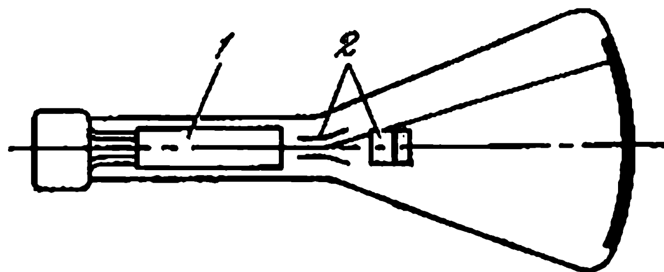


FIG. 203.

(fig. 203), formado por un cañón electrónico 1 y dos condensadores 2 que desvían el rayo electrónico en dos direcciones perpendiculares entre sí.

Veamos cómo funciona el tubo de rayos catódicos cuando se utiliza para registrar procesos que transcurren rápidamente. Si a los condensadores no se les aplica tensión, el rayo electrónico irá a lo

largo del eje del aparato y creará un punto en la pantalla luminiscente. Supongamos que al par horizontal de placas del condensador se le aplica una tensión variable (de frecuencia mayor que 20 Hz). En este caso, al compás de las variaciones del campo, oscilará el rayo electrónico en dirección vertical. Y como la masa de los electrones es insignificante, esta oscilación se realizará prácticamente sin inercia *). El movimiento del rayo no se ve, porque el ojo no tiene tiempo de seguir al punto luminiscente y porque la pantalla posee luminiscencia residual.

Ahora entra en función el segundo par de placas, que produce la llamada «exploración de tiempo». A este par de placas se le aplica una tensión en diente de sierra. Como este par produce la desviación horizontal del rayo, podemos suponer que esta tensión hace que el punto luminoso se mueva uniformemente de izquierda a derecha. Al llegar al extremo de la pantalla, el punto luminiscente retornará de un salto a la posición de partida y el proceso se repetirá. Existe la posibilidad de aplicarle a las placas tensiones en diente de sierra de distinta frecuencia y, de este modo, darle una escala de tiempos más diversa al desplazamiento horizontal del haz.

Si a las placas que producen la desviación horizontal del rayo se conecta la exploración de tiempo, y a las placas que producen la desviación vertical se aplica la tensión que se estudia, el rayo trazará la curva de la tensión en función del tiempo, puesto que la coordenada horizontal del punto luminiscente es proporcional al tiempo, contado a partir de un instante arbitrario.

Es eficiente en particular el empleo del oscilógrafo para observar los procesos periódicos. Siempre se consique elegir la exploración de tiempo de tal modo, que la figura que crea el rayo en un recorrido de izquierda a derecha coincida con la que genera en el segundo y en los demás barridos. Cuando el período de exploración queda establecido, en el oscilógrafo se ve una curva inmóvil que da el valor de la tensión, en función del tiempo, para cualquier intervalo de tiempo (menor que un período o igual a varios períodos).

Para crear la tensión en diente de sierra se utiliza un proceso autooscilatorio muy parecido al del baño basculante que describimos en la pág. 105. La carrera del rayo de izquierda a derecha se origina por el proceso continuo y uniforme de carga de un condensador **). A las bornas del condensador se conecta un tubo de descarga. Mientras la diferencia de potencial en el tubo es menor

*) El carácter no inercial de las oscilaciones del rayo viene determinado por la velocidad axil del movimiento de los electrones. Por esta razón, cuando se trata de registrar procesos muy rápidos, se utilizan oscilógrafos de alta tensión.

**) El condensador se carga y se descarga de acuerdo con una ley exponencial. Pero utilizando un pequeño trozo del exponente, estos procesos pueden hacerse muy aproximados a los lineales.

que la tensión de encendido, su presencia no influye en la carga del condensador. Pero en cuanto el potencial alcanza su valor crítico, se produce una descarga rápida del condensador y el proceso comienza de nuevo. Las oscilaciones en diente de sierra deben estar sincronizadas con el proceso periódico que se analiza.

El tubo de rayos catódicos puede hacerse más complejo colocando un modulador entre el cátodo y el ánodo. Este modulador consiste en un cilindro metálico con una de sus bases cerrada por un diafragma. El diafragma tiene un orificio cuyas dimensiones son aproximadamente iguales a las del cátodo. Comunicándole al modulador un potencial negativo, tenemos la posibilidad de variar la intensidad del haz. Con una tensión determinada (tensión de bloqueo), el rayo se apagará por completo; esto puede hacerse, por ejemplo, durante el retorno del rayo. Por este procedimiento se bloquea el rayo mientras retrocede durante la exploración.

Si en la pantalla se quieren observar simultáneamente dos magnitudes variables, el tubo de rayos catódicos se provee de un conmutador electrónico que periódicamente permuta el dispositivo de desviación ya al circuito medidor de una magnitud ya al de otra. Con este fin se han construido oscilógrafos de doble haz. Estos aparatos tienen un tubo catódico provisto de dos proyectores, independientes, de electrones y de dos sistemas de desviación. Este tipo de oscilógrafo posee también dos amplificadores, independientes, de las tensiones que se analizan y dos generadores de oscilaciones en diente de sierra.

Tiene gran importancia la pantalla luminiscente que se elija para el tubo catódico. Hay pantallas cuya luminiscenia residual dura mucho tiempo; sin embargo, para otros fines se necesitan pantallas en las cuales la luminiscencia desaparezca inmediatamente después de desconectarse el rayo.

Cuando hay que registrar procesos impulsivos instantáneos, el oscilógrafo electrónico se equipa con un dispositivo fotográfico cuyo obturador se sincroniza con la exploración, de modo que saque la fotografía de la pantalla en el instante preciso.

§ 173. Espectrógrafo de masas

De la ecuación fundamental del movimiento de una partícula con carga

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=e\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{vB}]\right)$$

se deduce evidentemente que su trayectoria viene determinada por la razón de la carga a la masa e/m. Por esto, el análisis de la des-

viación de una partícula en los campos eléctrico y magnético puede utilizarse para hallar e/m. Como la velocidad inicial del movimiento de la partícula no se conoce, e/m no puede hallarse midiendo la desviación sólo en un campo eléctrico o sólo en un campo magnético. En efecto, considerando las fórmulas generales que dedujimos en el § 167 para las desviaciones en los campos eléctrico y magnético, vemos que la trayectoria se determina por unos coeficientes, en los

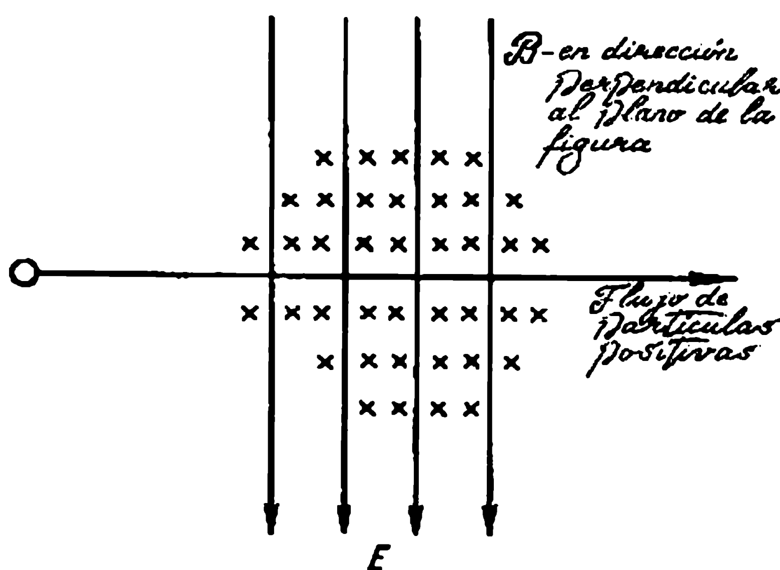


FIG. 204.

que figura e/m, y por la velocidad inicial. El problema se resuelve aprovechando las desviaciones de una misma partícula tanto en un campo magnético como en un campo eléctrico.

En el caso más simple basta equilibrar la desviación eléctrica con la magnética. Para esto hay que situar los campos como indica la fig. 204. Las partículas con carga no se desviarán si se cumple la condición $eE=\frac{1}{c}evH$. De este experimento se obtiene la velocidad de la partícula. Después puede utilizarse sólo la desviación eléctrica o sólo la desviación magnética; por el valor de la desviación de la trayectoria rectilínea se puede calcular e/m.

Las medidas de e/m tienen gran importancia en la física atómica como medio para determinar la masa de las partículas (si se conoce la carga). Esta importancia es aún mayor cuando se trata de mediciones de las masas de los iones. El aparato en el cual un haz de partículas se divide por masas y la composición de las partículas por masas puede analizarse, se llama *espectrógrafo de masas*.

El esquema de este aparato puede verse en la fig. 205. Su idea, propuesta por F. W. Aston, consiste en lo siguiente. En el campo

eléctrico de un condensador entran partículas con velocidades distintas. Destaquemos mentalmente un grupo de partículas que tengan las mismas *e/m*. El flujo de estas partículas llega al campo eléctrico y se desintegra: las partículas rápidas se desvían menos en el campo eléctrico, las lentas, más. El abanico formado por estas partículas entra ahora en un campo magnético perpendicular al dibujo.

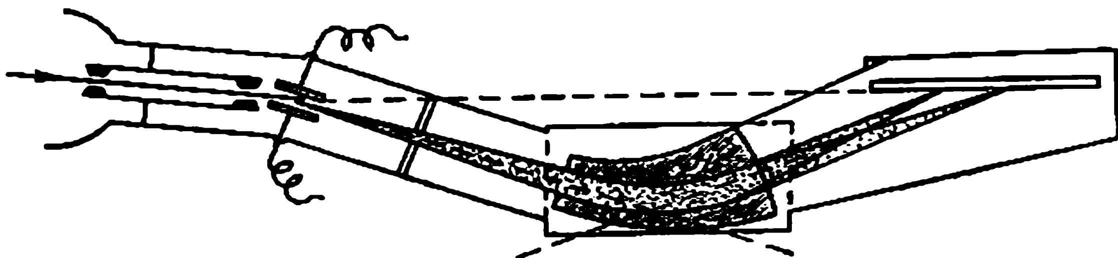


FIG. 205.

Este campo está conectado de modo que desvíe las partículas en sentido contrario. Aquí también se desvían menos las partículas rápidas, y más, las lentas. De aquí se deduce que en un punto determinado, que se hallará fuera del campo, el haz de partículas iguales que destacamos mentalmente volverá a reunirse, es decir, se enfocará.

Las partículas que tengan otros valores de *e/m* también se reunirán en un punto, pero este punto será otro. Los cálculos demuestran que los focos, para todos los valores de *e/m*, se encuentran bastante próximos a cierta recta. Si a lo largo de esta recta se coloca una placa fotográfica, las partículas de cada tipo se revelan en una raya separada.

Si el espectrógrafo de masas está construido con gran meticulosidad, su poder separador será bastante grande y con él se podrá descubrir la presencia de isótopos muy próximos. A primera vista puede parecer que esto no tiene importancia, porque las masas de los isótopos difieren por lo menos en una unidad de peso atómico. Pero en una unidad se diferencian los isótopos de un mismo elemento químico, en cambio, la diferencia de masa de los isótopos de elementos distintos (por ejemplo, S^{36} y Ar^{36}) puede ser muy insignificante. Además, tiene mucha importancia poder determinar la masa de los iones complejos. Problemas de este tipo se plantean, por ejemplo, cuando se analizan químicamente mezclas de gases. En este caso puede resultar que partículas diferentes tienen masas cuyos valores se aproximan mucho, como, por ejemplo, el $C^{12}H_2$ y el N^{14} o el $N^{14}H_2$ y el O^{16}, etc. Todos estos problemas se resuelven eficazmente con el espectrógrafo de masas.

§ 174. *Aceleradores de partículas cargadas*

En realidad son también aceleradores de partículas con carga las lámparas electrónicas, los tubos de rayos X y los cañones electrónicos. No obstante, se reserva este término para designar las instalaciones en que se crean flujos de partículas cargadas (electrones, protones, deuterones, etc.) que se mueven con velocidades próximas a la de la luz; estos flujos se utilizan para actuar sobre la sustancia. Los fines de esta acción pueden ser muy diversos: el estudio de las transformaciones nucleares, la creación de isótopos radiactivos, fines médicos, acciones químicas, etc. El papel que desempeñan los aceleradores en la ciencia moderna es extraordinariamente importante.

Está claro que una partícula se puede acelerar hasta energías cualesquiera haciéndola pasar sucesivamente por campos aceleradores. Sin embargo, para crear partículas con energías de decenas de millares de electrón-voltios se necesitan trayectos del orden de muchos centímetros. La física moderna tiende a obtener flujos de partículas con energías de decenas de millares de millones de electrón-voltios. Los aceleradores lineales que harían falta para conseguir este fin deberían tener una longitud de decenas de kilómetros. Un acelerador lineal de enorme longitud fue construido en Stanford (EE.UU.). A pesar de sus ventajas parciales, esta solución frontal del problema no puede considerarse óptima.

La idea fundamental que dio origen a la construcción de aceleradores basados en el principio circular pertenece a E.O. Lawrence. En una misma instalación se auna la aceleración de las partículas por un campo eléctrico y su retorno repetido al mismo intervalo acelerador por medio de un campo magnetico. Los primeros aceleradores basados en esta idea recibieron el nombre de *ciclotrones*.

El esquema del ciclotrón se muestra en la fig. 206. Para formarnos una idea de la cámara de aceleración, figurémonos una caja de bombones redonda y plana, cortada por su diámetro. Las dos mitades A y B de la gran caja metálica (que se llaman «des» por la forma D que tienen) constituyen la parte fundamental de la cámara de aceleración. Las des se someten a un campo eléctrico alterno de período T determinado. Todo este sistema se encuentra entre los polos de un electroimán que crea dentro de la caja un intenso campo magnético constante perpendicular a su base.

La intensidad del campo magnético se elige de acuerdo con el período establecido para la variación de la tensión eléctrica. Concretamente, el valor de la intensidad del campo debe ser tal, que el período de rotación de dicho campo (que se elige, como ya sabemos, por la fórmula $T=\frac{2\pi mc}{He}$) sea igual al período de la variación

del campo eléctrico. Si se cumplen estas condiciones, las partículas que llegan a la cámara de aceleración son arrastradas por los campos y emprenden un movimiento espiral acelerado de período T constante. En efecto, la partícula que cae en el intervalo entre las des recibe aceleración, recorre una semicircunferencia en el campo

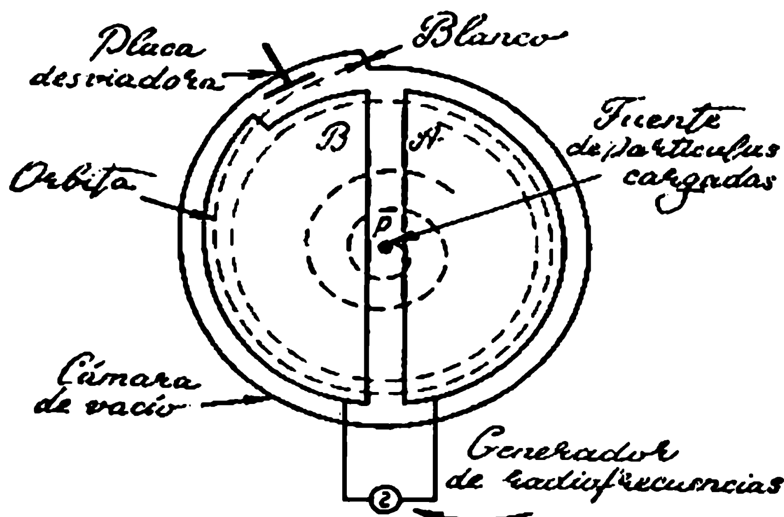


FIG. 206.

magnético y llega al intervalo acelerador precisamente en el instante en que la fase de la tensión varía en 180°; la partícula vuelve a acelerarse en la misma dirección y entra en la segunda de donde recorre una semicircunferencia de radio creciente. El proceso se repite, la velocidad de la partícula sigue aumentando y, finalmente, la dejamos salir del ciclotrón.

Las posibilidades del ciclotrón son limitadas. Esto se explica por el hecho de que, a medida que aumenta la velocidad de la partícula, crece también su masa y, por consiguiente, varía el período de revolución en el campo magnético. Este período comienza a aumentar y la partícula empieza a retrasarse, es decir, llega al intervalo de aceleración en un instante en que la fase de la tensión varió ya no en 180°, sino en una magnitud mayor. Este retraso se va incrementando y llega un momento en que el campo eléctrico no sólo no arrastra a las partículas, sino que las frena. Los cálculos demuestran que la energía límite que el ciclotrón puede comunicarle a una partícula con carga viene expresada por la fórmula $2\sqrt{ev_0mc^2/\pi}$, lo que para los protones da 22 millones de electrón-voltios (22 MeV) y para las partículas α, una magnitud tres veces mayor. Para alcanzar energías mayores hay que buscar otros caminos.

§ 175. *Autoestabilización en fase*

Nuevas ideas en la rama de los aceleradores fueron propuestas por V. I. Veksler (URSS) y E. M. Millan (EE.UU.) en 1944 y 1945 respectivamente. Estas ideas consisten en lo siguiente. Si se presta atención a la fórmula del período de revolución de la partícula en el campo, vemos que el aumento de la masa puede compensarse con un incremento del campo magnético. Si esta compensación fuera posible, el período de rotación de la carga podría permanecer invariable.

Supongamos que mientras funciona el ciclotrón va aumentando la intensidad del campo magnético. Entre los millares de millones de partículas que se mueven en la cámara de aceleración, se encontrarán, indudablemente, algunas en que el incremento de la masa, debido al aumento de la velocidad, guarde tal proporción con el incremento del campo magnético, que su período de revolución permanezca invariable. Los cálculos han demostrado que, en estas condiciones, las demás partículas tampoco se saldrán del sincronismo, con la única diferencia, sin importancia en la práctica, de que su energía no aumentará monótonamente como la de las partículas «afortunadas», cuyo aumento de masa se compensa totalmente por el incremento del campo magnético, sino oscilando en torno al valor de la energía de dichas partículas.

El radio de la órbita de las partículas «afortunadas» concuerda con el valor de la energía, en esto consiste su «suerte». Supongamos ahora que existe una partícula cuya energía es mayor que la correspondiente a un radio dado. En este caso, debido al incremento excesivo de su masa, la partícula se retardará. Por el contrario, si la partícula no tiene suficiente energía, el incremento de su masa será insuficiente y la partícula se acelerará con respecto a sus vecinas del mismo radio. De aquí se deduce que el fenómeno del incremento de la masa con la velocidad permite a las partículas regular independientemente la velocidad de su movimiento y elegir las fases de la tensión aptas para corregir este movimiento. De aquí el término de «autoestabilización en fase» *).

De este modo resulta posible, en principio, el aumento ilimitado de la velocidad de las partículas que se mueven en el ciclotrón, si la intensidad del campo magnético se incrementa suavemente. La aceleración de las partículas en los dispositivos de este tipo tiene que producirse por el método de impulsos. Cuando el campo crece, el dispositivo funciona; el ciclo inverso se efectúa en vacío.

Este procedimiento no es el único que existe para conseguir la autoestabilización en fase. Hay otro principio que consiste en variar

*) En la literatura extranjera suele llamarse «estabilidad de fase». (*N. del T.*)

lentamente el período de la tensión eléctrica. La idea es la misma: el aumento de la masa de la partícula con carga implica un incremento del período de revolución en el campo magnético; a este incremento debe adaptarse la variación correspondiente del régimen del campo eléctrico variable. El acelerador en el cual aumenta lentamente el período de la tensión eléctrica se llama *fasotrón* (*sincrociclotrón*). La trayectoria que sigue una partícula en el fasotrón es una espiral plana. Cuanto mayor sea el radio de la espiral, tanto mayor será la energía alcanzada por las partículas. De este modo, el incremento de la energía va ligado al aumento del área de la cámara de aceleración que se encuentra en el campo magnético.

De los aceleradores que existen de este tipo, el más potente es el fasotrón de la Academia de Ciencias de la URSS, cuyo imán pesa 7000 t. Este fasotrón proporciona un haz de protones de 680 MeV de energía.

Los fasotrones se ven limitados por energías del orden de unos cientos de MeV; mayores elevaciones de sus posibilidades conducirían a aumentos inadmisibles del peso del electroimán. Las partículas con energías de millares de millones de electrón-voltios (GeV) se consiguen en el sincrofasotrón.

§ 176. Sincrofasotrón. Sincrotrón

El sincrofasotrón tiene ya poco de común con el ciclotrón. El sincrofasotrón acelera las partículas en una órbita circular. Esto reduce considerablemente el volumen del campo magnético. En este caso podemos, por así decirlo, cortar toda la parte central del electroimán. La cantidad de metal que se emplea en éste disminuye notablemente. El electroimán del sincrofasotrón de 10 GeV, de la Academia de Ciencias de la URSS, pesa 36 000 t. Un fasotrón, para esta misma energía, requeriría cerca de 1 millón de toneladas de metal.

Para acelerar una partícula en una órbita de radio constante hay que cambiar, de un modo completamente coordinado, el período del campo eléctrico acelerador y la intensidad del campo magnético. El dispositivo deberá funcionar por el método de impulsos. Cada impulso consistirá en incrementar el campo magnético y disminuir el período de la tensión eléctrica aceleradora.

Cuando se da el radio de la órbita, la relación uniforme entre la intensidad del campo y la velocidad viene expresada por la fórmula

$$H = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{c}{er},$$

y la relación entre el período de revolución y la velocidad, por la fórmula

$$T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Si estas condiciones se cumplen, cierta partícula «afortunada» adquirirá velocidad monótonamente.

Las condiciones para la autoestabilización en fase también se dan aquí. Por esto, las demás partículas, aunque no describan una órbita circular, seguirán una trayectoria que oscilará en torno a esta órbita y participarán del incremento sincrónico de la velocidad. Las oscilaciones alrededor de la órbita circular media obligan a hacer bastante ancho el paso para las partículas con carga. Se trabaja intensamente en la búsqueda de procedimientos para estrechar este paso, lo que conducirá a una disminución del peso del metal necesario y permitirá alcanzar energías aún mayores de las partículas.

Hasta ahora nos hemos referido a los aceleradores que se utilizan para las partículas pesadas. Los aceleradores de electrones poseen una serie de particularidades.

En el año 1941 se construyó ya un acelerador de electrones que recibió el nombre de *betatrón*. Este dispositivo funciona según el principio de un transformador cuyo devanado primario es el de un electroimán, y el «devanado» secundario es un haz de electrones que gira siguiendo un círculo de radio constante. En otras palabras, los electrones se mueven siguiendo una línea de fuerza anular del campo eléctrico rotacional que crea el flujo magnético variable.

A primera vista parece que esta aceleración puede continuar indefinidamente. El aumento de la masa con la velocidad no impone limitación alguna, ya que en este fenómeno no se necesita ningún sincronismo. No obstante, el betatrón también tiene unas posibilidades limitadas. Es el caso que, cuando las energías alcanzan decenas y centenares de MeV, se dejan sentir las pérdidas por radiación, puesto que el electrón que se mueve con aceleración emite ondas electromagnéticas. A consecuencia de la radiación, la trayectoria de los electrones deja de ser circular para convertirse es espiral arrollada hacia dentro, y la aceleración se hace imposible. Cuando se necesitan electrones con energías de 20—50 MeV, los betatrones pueden utilizarse eficazmente. Pero si se desea obtener electrones con energías mayores, hay que recurrir a los *sincrotrones*, que son unos dispositivos cuya proposición data de 1946—1947.

El sincrotrón es semejante al fasotrón que hemos descrito antes, es decir, es un acelerador de resonancia. Al campo magnético del betatrón se le adiciona un campo eléctrico acelerador. El mecanismo de la aceleración se asegura con la autoestabilización en

fase. Pero el hecho de que se trate de las partículas más livianas —electrones—, simplifica la tarea del constructor. Esto se explica, porque con energías de 2—3 MeV la velocidad de los electrones se hace ya prácticamente igual a la de la luz. Si esto es así, un incremento mayor de la energía no influye en el radio de la trayectoria de los electrones. Esto da la posibilidad de hacer el electroimán en forma de anillo, como en el sincrofasotrón. Sin embargo, la radiación se produce incluso cuando el electrón se mueve en el sincrotrón. ¿Qué puede hacerse para compensarla? Para compensar las pérdidas por radiación hay que aumentar la tensión aceleradora.

Cuando las energías son grandes, las pérdidas por radiación alcanzan cifras imponentes. En un acelerador de 300 MeV y con 1 m de radio de la órbita, el electrón emite en una vuelta 1000 eV de energía. Si construyéramos un sincrotrón de 10 GeV con 20 m de radio de la órbita, las pérdidas de energía en cada revolución alcanzarían 30 MeV.

La potencia de los aceleradores va aumentando de año en año. La necesidad de esto viene dictada por el deseo de obtener los niveles de energía de los bariones y mesones lo más detalladamente posible (véase el § 226a).

En los años cincuenta comenzaron a construirse sincrofasotrones de protones. Se puso en marcha uno de 28 GeV en Ginebra (del Consejo Europeo para la Investigación Nuclear, C.E.R.N.) y otro de 33 GeV en Brookhaven (EE.UU.).

Uno de los aceleradores de partículas elementales más potentes del mundo es en la actualidad el sincrofasotrón de protones de 76 GeV de Sérpujov (URSS).

Para dar una idea de la grandiosidad de estas máquinas bastará citar unos datos del acelerador de Sérpujov: el diámetro de su órbita es de 472 m, y el hierro del electroimán pesa 20 000 toneladas.

§ 177. Gas ionizado

Un átomo se puede transformar en ion, es decir, un electrón puede arrancarse del átomo, por procedimientos muy diversos. El choque con un electrón, con otro átomo o con una molécula, lo mismo que la absorción de un fotón, son procedimientos de transmisión de energía que pueden ocasionar la ionización de un átomo, si la cantidad de energía suministrada es suficiente para vencer las fuerzas de ligadura del electrón con el átomo. Para los distintos átomos y moléculas esta energía oscila entre los límites de 4—25 eV (véase también el § 193). Esto quiere decir, que un átomo puede ser ionizado por un electrón acelerado por una diferencia de potencial de 4—25 V. Está claro que una partícula cuya energía sea mayor será

capaz de transformar en iones tantos átomos o moléculas como le permitan sus reservas de energía. Un electrón acelerado en un potente acelerador es capaz de crear millones de pares de iones.

La ionización de un átomo consiste en arrancarle un electrón; la ionización de una molécula también puede reducirse al desprendimiento de un electrón, pero en otros casos la molécula se divide en dos grandes iones al ionizarse. Por lo tanto, la ionización crea no sólo electrones e iones positivos, sino que puede ocasionar también la formación de iones negativos. Pero los iones negativos se producen también por la unión de un electrón libre a un átomo neutro. Resulta (véase el § 196) que, desde el punto de vista energético, este último proceso es conveniente.

Los procesos de ionización que tienen lugar en los sólidos se estudiarán detenidamente en el § 258. Aquí nos interesa el problema de la ionización únicamente como procedimiento para crear un flujo de iones. Desde este punto de vista sólo ofrece interés la ionización de los gases. Si queremos obtener un flujo de iones de una sustancia que en condiciones normales se encuentra en estado sólido o liquido, hay que vaporizarla.

Consideremos la ionización de un gas por un flujo de partículas cualesquiera. Si la fuente de ionización se elimina, comenzarán a reunirse (recombinarse) las partículas, con carga positiva y negativa, en átomos o moléculas neutros. Como en la recombinación se encuentra un par de partículas, es natural que la velocidad de recombinación sea proporcional al cuadrado del número de iones n que haya en la unidad de volumen. Si Δn es el número de iones que, en la unidad de tiempo, se transforma en partículas neutras en la unidad de volumen, $\Delta n=\gamma n^2$, donde γ es un coeficiente cuyo valor es del orden de 10^{-6} cm^3 s^{-1} para la mayoría de los gases en condiciones normales. Cuando el ionizador actúa constantemente, entre los procesos de ionización y recombinación deberá establecerse un equilibrio. Supongamos que el ionizador crea, en la unidad de tiempo, N pares de iones en la unidad de volumen. Al principio el número de iones que haya en el gas irá aumentando, pero como la recombinación se producirá cada vez con más frecuencia (proporcionalmente al cuadrado del número de pares de iones existente), el incremento de la cantidad de iones cesará cuando $N=\Delta n$, es decir, cuando sea $N=\gamma n^2$. Si el gas ionizado llena cierto volumen y si el movimiento caótico de las partículas del gas es el predominante, este gas conductor de la electricidad, formado por partículas neutras y partículas con carga, se llama *plasma* (véase más adelante).

Un ejemplo importante de gas fuertemente ionizado es la ionosfera. El número de partículas con carga por unidad de volumen que hay en la ionosfera está sujeto a grandes oscilaciones diarias y anuales. Es sabido que estas oscilaciones influyen en la calidad

de las recepciones por radio. En 1 cm^3 de ionosfera hay $\sim 10^6$ electrones e iones. El número total de partículas que hay en dicho volumen es $\sim 10^8$. Por lo tanto, el grado de ionización de la ionosfera es igual a $\sim 1\%$. El grado de ionización de los plasmas intensos que se forman en los diversos aparatos iónicos es de este mismo orden de magnitud.

§ 178. Descarga eléctrica en un gas

Los primeros conocimientos acerca de las partículas elementales con carga los obtuvieron los físicos al estudiar el paso de la corriente eléctrica a través de los gases (descarga eléctrica en un gas). En el circuito de la corriente se intercala un tubo de vidrio que contiene gas. La conexión se efectúa por medio de unos electrodos soldados en el vidrio. Para obtener una idea exhaustiva de este fenómeno hay que estudiarlo en diferentes gases, a presiones distintas y con diversas intensidades de campo.

El comportamiento de los distintos gases, en general, es el mismo. La diferencia de potenciales de ionización (véase el § 193) sólo hace que ciertos puntos críticos, de los que hablaremos más adelante, se produzcan con otras diferencias de potencial y presiones.

Veamos los fenómenos característicos de todo gas que ocurren cuando se aumenta la tensión que se aplica al tubo de descarga en gases. En un amplio intervalo de presiones, el comportamiento del gas es el que vamos a describir a continuación. Dejaremos a un lado únicamente aquellas pequeñas presiones con las cuales el recorrido libre de las moléculas se hace comparable con las dimensiones del tubo de descarga. Nuestras consideraciones tampoco se refieren a aquellas presiones tan grandes, que hacen que la densidad de los gases se aproxime a la de los líquidos, en los que no existe recorrido libre de las moléculas. El porqué de la importancia del recorrido libre de las partículas lo comprenderá ahora el lector.

Apliquémosle, pues, al tubo de descarga una tensión no muy grande. Si no existe ionizador, la corriente no pasará por el tubo. En presencia de un ionizador, en el gas habrá partículas con carga, es decir, iones y electrones. En este caso, cuando se aplica la tensión, las partículas son dirigidas por el campo hacia los electrodos. Este fenómeno se llama *conducción mantenida* del gas. La rapidez con que las partículas con carga se desplazan hacia los electrodos depende de muchas circunstancias y, ante todo, de la intensidad del campo y de la presión del gas.

Al movimiento ordenado del ion y del electrón debido a la acción de la fuerza eléctrica constante, se superpone el movimiento caótico térmico. La partícula acelerada por el campo eléctrico recorre una distancia pequeña. Este pequeño recorrido termina

inevitablemente en una colisión. Cuando las velocidades son pequeñas, estas colisiones se producen de acuerdo con la ley del choque elástico.

El recorrido libre medio viene determinado en primer lugar por la presión del gas. Cuanto mayor sea la presión, tanto menor será el recorrido libre y la velocidad media del movimiento ordenado de las partículas. La tensión aplicada al tubo de descarga actúa, como es natural, en sentido contrario, es decir, aumenta la velocidad media del movimiento ordenado de las partículas.

Como dijimos en el párrafo anterior, en un gas sometido a la acción de un ionizador se establece una determinada concentración de iones; en estado de equilibrio, el número de iones que se forman de nuevo por segundo es igual al número de los que se recombinan en este mismo tiempo. Al aplicar la tensión se infringe el equilibrio, porque una parte de los iones llega a los electrodos antes de poder recombinarse. A medida que se aumenta la tensión irá siendo cada vez mayor la parte de los iones creados en la unidad de tiempo que llegan a los electrodos, es decir, la corriente eléctrica que pasa por el gas, aumenta. Así continúan las cosas hasta que no queda tiempo para las recombinaciones y todos los iones producidos por el ionizador llegan a los electrodos. Está claro que, después de esto, si seguimos elevando la tensión no aumentará la corriente (corriente de saturación, representada por la parte horizontal de la curva de la fig. 207).



FIG. 207.

Cuanto menor sea la densidad del gas, tanto menores serán las intensidades del campo con que se consiga la corriente de saturación.

La intensidad de la corriente de saturación es igual a la carga de los iones que produce por segundo el ionizador en el volumen del tubo de descarga.

Si se sigue aumentando la tensión aparecen nuevos fenómenos. En cierto instante la velocidad de los electrones llega a ser suficiente para arrancar electrones de los átomos y de las moléculas neutros. En este caso la tensión debe alcanzar en el tubo un valor con el cual el electrón tenga tiempo de adquirir, en la longitud del recorrido libre, la energía suficiente para ionizar a una molécula.

La aparición de la ionización por choque se refleja en la curva de la corriente en función de la tensión: la corriente comienza a aumentar, puesto que el aumento de la tensión significa el incremento de la velocidad del movimiento del electrón. Pero el incremento

de la velocidad lleva consigo un crecimiento del poder ionizante del electrón y, por consiguiente, la creación de un número mayor de pares de iones y el aumento de la intensidad de la corriente.

En esta región de las tensiones, el paso de la corriente a través de los gases comienza a ir acompañado de fenómenos ópticos, el gas se ilumina. Efectivamente, si los choques con las partículas pueden ocasionar la ionización de un átomo y de una molécula, tanto más podrán dar lugar a fenómenos de excitación de partículas, es decir, al paso a niveles de energía más elevados. Al volver a un estado normal la molécula o el átomo emitirá un cuanto de luz. Aquí no nos detendremos en esta parte del problema, porque al estudio de la radiación de los átomos y moléculas excitados se dedicará bastante espacio en los caps. 28 y 29.

Si la energía del electrón supera en varias veces a la energía necesaria para ionizar una molécula, el paso de la corriente eléctrica a través del gas tomará un marcado carácter de avalancha. Un electrón cualquiera romperá un átomo, creando un ion y un electrón. Este electrón creado tendrá poder ionizante, y el electrón primario conservará aún energía suficiente para ionizar a otro ion. El proceso se irá ampliando y desde los puntos de ionización primaria se propagará hacia los electrodos una avalancha de cargas eléctricas: en cada capa sucesiva el número de pares de iones será mayor que en la precedente. Cuando las tensiones son más o menos altas, el incremento de esta avalancha se produce con una rapidez extraordinaria.

Los ionizadores secundarios del gas son los electrones, y no los iones. Estos últimos sólo adquieren la capacidad de ionizar a las moléculas del gas cuando las velocidades de movimiento son muy grandes; de ordinario no nos encontramos con estas velocidades. Si los iones no ionizan, al eliminarse el ionizador exterior cesará la descarga aunque el número de pares de iones creados por los choques sea centenares y millares de veces mayor que la ionización primaria. Cada avalancha debe comenzar por un primer electrón, y como los electrones se mueven hacia el ánodo, la descarga cesará, en ausencia del ionizador exterior, en cuanto todos los electrones lleguen al ánodo.

Este tipo de descargas mantenidas, bastante fuertes, posee la siguiente peculiaridad: a una tensión dada, la intensidad de la corriente eléctrica que pasa a través del gas es proporcional al número de iones primarios que crea el ionizador exterior en la unidad de tiempo. La razón de la intensidad de esta corriente «gasorreforzada» a la intensidad de la corriente de saturación, creada por la ionización primaria, puede llegar a ser de centenares y millares. Esta propiedad de la descarga se aprovecha para hacer los medidores de ionización o amplificadores proporcionales (véase la pág. 588).

La descarga eléctrica puede hacerse *automantenida*, es decir, que continuará después de eliminar el ionizador externo, únicamente en el caso en que los iones se conviertan en proveedores adicionales de partículas con carga. Esto siempre ocurre cuando las tensiones son muy elevadas, en cuyo caso, como ya indicamos antes, los iones pueden ionizar por choque a las moléculas del gas. En este caso los iones crearán cada vez más nuevos electrones, que a su vez son los focos iniciales de las avalanchas.

No obstante, la descarga automantenida puede producirse también cuando las tensiones son considerablemente menores si el cátodo del tubo de descarga se hace en forma de lámina. Esto se explica, porque los iones son capaces de arrancar electrones del cátodo frío. Si la velocidad del ion es suficiente para este proceso, la condición para que se produzca la descarga automantenida se puede enunciar así: la aparición de nuevos electrones en el cátodo debe, por lo menos, poder sustituir el funcionamiento del ionizador primario.

Hasta ahora nada hemos dicho del papel que desempeña la presión. Cuando las presiones son grandes, la columna de descarga se comprime y comienza la ionización térmica. La diferencia de presiones varía el cuadro de la distribución de la densidad de la corriente y, respectivamente, el carácter de la luminiscencia de la descarga en el gas. A presiones normales y más altas nos encontramos con diversos tipos de descargas, a saber: la descarga silenciosa, la descarga en arco y la descarga por chispas. En los gases enrarecidos se produce la llamada descarga luminiscente. ¿En qué condiciones se producen estas descargas y qué aspecto presentan?

Se llama descarga silenciosa la fuga de cargas de los condensadores o de otros cuerpos cargados sin que se produzca ruido ni luminiscencia. En las puntas de los conductores delgados y, en general, en todos los puntos en que tiene lugar una caída de potencial brusca y, por consiguiente, la intensidad del campo es grande, pueden producirse descargas silenciosas autónomas, llamadas descargas en escobilla y efecto corona.

A tensiones más altas se produce la descarga por chispas (perforación del gas). La tensión disruptiva sólo depende bastante rigurosamente del producto de la presión del gas por la distancia entre los electrodos. En el aire entre dos electrodos esféricos salta la chispa cuando la intensidad del campo es de 30 kV/cm (a presión normal). La longitud de la chispa puede utilizarse para medir las altas tensiones.

Un tipo particular de descarga es el que se observa en el arco voltaico. En la descarga en arco la densidad de la corriente es grande aunque la diferencia de potencial entre los electrodos sea pequeña. La peculiaridad de la descarga en arco, que de ordinario se crea

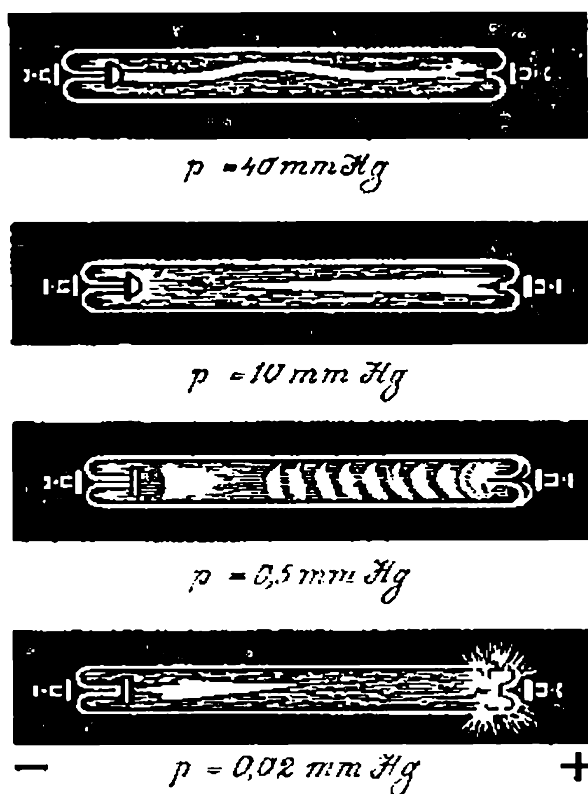


FIG. 208.

entre electrodos de carbón, es la temperatura extraordinariamente alta de dichos electrodos. Por esta razón, en el arco desempeña un gran papel la emisión termoiónica del cátodo.

La descarga luminiscente en gases enrarecidos ofrece un aspecto característico para cada presión. Cuando se tiene cierta experiencia, por el aspecto de la descarga se puede determinar con gran exactitud el grado del enrarecimiento. La forma de los distintos tipos de descarga en gas se muestra esquemáticamente en la fig. 208.

§ 178a. *Plasma*

LA MATERIA EN ESTADO DE PLASMA. Un gas se puede hacer pasar al estado ionizado elevando su temperatura. La ionización térmica de un gas empieza a una temperatura del o den de 6000°C. A esta temperatura, la energía media del movimiento de las moléculas, $3/2\ kT$, se hace ya suficiente para que sean frecuentes las colisiones entre moléculas portadoras de la energía necesaria para arrancar un electrón o ionizarse de otro modo.

El grado de ionización depende de la temperatura y de la presión del gas. A medida que aumenta la presión disminuye la ionización.

A temperaturas del orden de decenas de millares de grados y mayores, el gas de átomos o moléculas neutros contenido en cierto volumen pasa a un nuevo estado que se llama *plasma*.

No es difícil calcular que a temperaturas de 20 000—30 000°C el gas hidrógeno, por ejemplo, cuya densidad a la temperatura ambiente es la que corresponde a 1 mm de la columna de mercurio, resulta ionizado totalmente. En efecto, la energía media por grado de libertad a la temperatura de 30 000°C es igual a $\frac{1}{2}RT = 30$ calorías-kilogramo por mol. Esta energía es considerablemente mayor que la necesaria para ionizar el átomo de hidrógeno. De este modo, las colisiones térmicas convierten el gas neutro en una mezcla de

dos «gases», uno de protones y otro de electrones. Esto es precisamente el estado de plasma.

El plasma formado de otras sustancias puede tener una composición más compleja. En él puede haber electrones, núcleos desnudos y diversos tipos de iones. Está claro que el plasma contiene también una cantidad más o menos grande de partículas neutras. Pero a altas temperaturas este porcentaje es muy pequeño. En el ejemplo antes citado, a cada átomo neutro le corresponden $2 \cdot 10^4$ protones con carga.

La materia existe en estado de plasma en las estrellas y en el Sol. La capa superior de la atmósfera, la llamada ionosfera, también es plasma.

La obtención de materia en estado de plasma por calentamiento de un recipiente, en las condiciones de la Tierra, se comprende que es imposible por falta de materiales refractarios. Sin embargo, valiéndose de campos magnéticos de formas especialmente elegidas, se consigue confinar en un volumen limitado incluso el plasma caliente.

Si todas las partículas del plasma intercambian libremente la energía, éste entra pronto en estado de equilibrio, es decir, la energía media de los electrones y de los iones será igual, a pesar de la gran diferencia que existe entre las masas de estas partículas. Los iones del plasma se mueven lentamente en comparación con los electrones. En una serie de cálculos puede considerarse incluso que están en reposo.

La rapidez con que se establece el equilibrio entre los distintos tipos de partículas puede oscilar desde fracciones insignificantes de segundo hasta un segundo en el caso del plasma caliente (del orden de 10^8 °K).

Un ejemplo de plasma que no está en equilibrio es el de la descarga en gas. Las fuentes externas transmiten energía, en primer lugar, a los electrones. Y el equilibrio de energías entre los electrones y los iones sólo se produce al cabo de un gran número de choques. Por esto, en la descarga en gas, la temperatura electrónica T_e es mucho mayor que la iónica T_i. En la descarga en arco, T_e es del orden de muchas decenas de millares de grados, y T_i es del orden de millares de grados.

Para dar una idea de cómo se comportan las partículas en el plasma, damos a continuación el resultado de unos cálculos sencillos tomados del libro de L. Artsimóvich, «Física elemental del plasma» *).

En el plasma de hidrógeno de alta concentración (10^{14} iones por centímetro cúbico) se tiene, si el plasma es frío ($T = 10^4$ °K), que el

*) Л. Арцимович, «Элементарная физика плазмы», Атомиздат, 1963

recorrido libre y el tiempo que tardan las partículas en recorrerlo son respectivamente

$$\lambda \approx 0{,}03\ \text{cm} \quad \text{y} \quad \tau \approx 4\cdot 10^{-10}\ \text{s}.$$

Y si el plasma es caliente ($T = 10^{8}\ ^\circ\text{K}$),

$$\lambda = 3\cdot 10^{6}\ \text{cm} \quad \text{y} \quad \tau \approx 4\cdot 10^{-4}\ \text{s}.$$

Estos datos se refieren a los choques de electrones con iones.

Consideremos ahora el problema del campo eléctrico del plasma. Este campo varía mucho en el espacio y en el tiempo. No obstante puede calcularse el campo medio de un sistema que contenga igual número de iones que de electrones, situados a cierta distancia media l unos de otros. No es difícil comprender que, a causa del carácter neutro del plasma, su campo medio deberá ser igual, en orden de magnitud, al campo de una carga situada a la distancia l de él, es decir, $E \approx en^{2/3}$, donde n es la concentración. Por lo tanto, para el plasma de hidrógeno tomado antes como ejemplo, $E \approx 4\cdot 10^{-10}\cdot 2\times 10^{9} \approx 1$ u. CGS. Este campo varía muy de prisa. Puede cambiar de signo en un tiempo del orden de la duración del recorrido libre y a una distancia del orden de la que hay entre las partículas.

Ya hemos hablado del carácter neutro del plasma. Esta propiedad es necesaria y se cumple rigurosamente a pesar del movimiento caótico de los electrones. Cuando la diferencia de las concentraciones n_i y n_e es grande, el campo eléctrico empieza a repeler lentamente las partículas que hay en exceso y a atraer partículas de otro signo. Este automatismo actúa con una exactitud enorme (que impide hasta desviaciones absolutamente insignificantes de la neutralidad) incluso en volúmenes pequeños cuyo radio sea mayor de $\sqrt{T_e/n}$, es decir, para el plasma de nuestro ejemplo, el radio debe ser mayor de 10^{-5}—10^{-3} cm.

El plasma es fuente de ondas electromagnéticas cuyas longitudes se encuentran en un amplio intervalo. Como sabemos el frenado de un electrón genera un espectro continuo de ondas electromagnéticas (así se originan los rayos X) con frecuencias desde cero hasta $E_{máx}/h$, donde $E_{máx}$ es la energía máxima del electrón. Para valorar el orden de magnitud de la longitud de onda de la radiación de frenado del plasma puede suponerse que $E = kT_e$. Entonces resulta que la radiación de frenado del plasma frío será visible e infrarroja, y la del plasma caliente, de rayos X.

Una fuente importante de radiación es la recombinación del protón (ion) con el electrón. En este caso es evidente que se emite un fotón, cuya energía es igual a la de ligadura de las partículas de signos contrarios.

Además de la radiación que tiene el mismo carácter para las diversas sustancias que se hallan en estado de plasma, el plasma emite

espectros de rayas característicos (cuyo origen se explicará en los §§ 199 y 203), ya que en su composición entran determinados átomos y moléculas excitados.

EL PLASMA EN UN CAMPO MAGNÉTICO. Cuando se aplica un campo magnético, las trayectorias de las partículas con carga adquieren una dirección. Cada partícula libre se moverá siguiendo una línea helicoidal arrollada al vector intensidad del campo magnético. Los desplazamientos transversales a las líneas de fuerza sólo se deben a la acción de las colisiones. Cuando la temperatura es alta y el campo intenso, la partícula con carga no puede abandonar la región del campo magnético.

La aplicación de un campo magnético al plasma hace que este último sea comprimido por la presión electrodinámica. En la fig. 208a se muestra el corte transversal de la columna de plasma

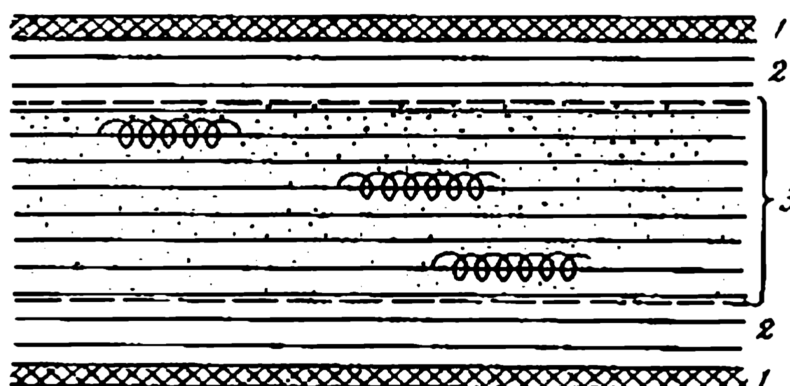


FIG. 208a.

(*1* son las paredes de la cámara, *2* son vacíos, *3* es el plasma). La trayectoria de los electrones parece circular si se mira a lo largo del campo. Puede considerarse que, estas corrientes se componen y forman una corriente circular superficial.

Con esta disposición de la corriente y del campo, de acuerdo con lo expuesto en la pág. 285, se produce una fuerza dirigida hacia dentro de la columna. La presión lateral será igual, según el § 119, al valor de la densidad de la enregía electromagnética, que en nuestro caso es $H^2/(8\pi)$ (si se considera que la intensidad del campo dentro del plasma es anulada por los campos de las corrientes circulares). Esta presión equilibra la presión gaseosa del plasma, la cual, en ausencia del campo, haría que el plasma se expandiera inmediatamente.

En el efecto de la presión del campo magnético se basaron las esperanzas de poder retener durante largo tiemoo el plasma caliente en estado concentrado. La importancia práctica de esta posibilidad

se hace evidente si nos formamos una idea acerca de las reacciones termonucleares. Como se indica en el § 218, temperaturas del orden de 10^8 °K, si pudieran conseguirse, harían posible la creación del reactor termonuclear con todas las consecuencias que de esto se deducen para la energética del futuro.

Cuando se produce una fuerte descarga en gas, la fuerza electrodinámica $\frac{I}{c}[dl, H]$ hace que se forme un estrecho cordón de plasma separado de las paredes del tubo de descarga.

La ecuación $p=H^2/(8\pi)$ puede escribirse de la forma siguiente. Supongamos que las temperaturas iónica y electrónica son iguales entre sí, entonces

$$p = 2nkT.$$

Aquí n es la concentración de partículas. Admitiendo que el cordón tiene la forma de un cilindro de radio r_0, y considerando que se produce el efecto pelicular, podemos escribir para la intensidad del campo magnético en la superficie del cilindro la fórmula siguiente:

$$H = \frac{2I}{cr_0}.$$

Llamando N al número de electrones por unidad de longitud $\pi r_0^2 n$, obtenemos que

$$I^2 = 5{,}5 \cdot 10^{-14}\, NT;$$

esta fórmula da la intensidad de la corriente medida en amperios.

Si la presión inicial del hidrógeno era de 0,1 mm de la columna de mercurio, el radio del tubo tiene 10 cm y la intensidad de la corriente de descarga es de $5 \cdot 10^5$ A, la temperatura del plasma resultará ser igual a 2 millones de grados.

PROBLEMAS DE LA ESTABILIDAD. La creación de un cordón de plasma estable o de una región de plasma de cualquier otra forma es un problema técnico muy complicado que aún no ha podido resolverse. Como resultado de las fluctuaciones pueden ocurrir deformaciones casuales del filamento.

A primera vista parecía que la creación de botellones magnéticos sin fugas no era una tarea demasiado difícil. Las teorías iniciales permitieron calcular la velocidad de difusión en diversos dispositivos. Los resultados de los cálculos eran bastante optimistas, pero la experiencia demostró que la velocidad de difusión de la columna de plasma es miles de veces mayor.

Durante los últimos diez años la teoría del comportamiento del plasma en el campo magnético ha alcanzado un gran desarrollo y las causas de las inestabilidades del plasma han quedado mucho más claras. Los esquemas y modelos de plasma con que operaba la

teoría inicial, que consideraba el plasma como un conjunto de dos líquidos, con carga positiva y negativa respectivamente (magnetohidrodinámica), no daban una idea exacta de la complejidad de los procesos que se desarrollan en el plasma. Para comprender las complicaciones que hay que introducir en la teoría, examinaremos unos ejemplos de inestabilidades que no tenía en cuenta la magnetohidrodinámica.

En una descarga débilmente ionizada, del tipo que se da frecuentemente en las lámparas fluorescentes ordinarias, cuando se aplica un campo magnético paralelo al eléctrico, los cordones de plasma toman forma helicoidal. Hasta que los campos tienen 1000 Gs,

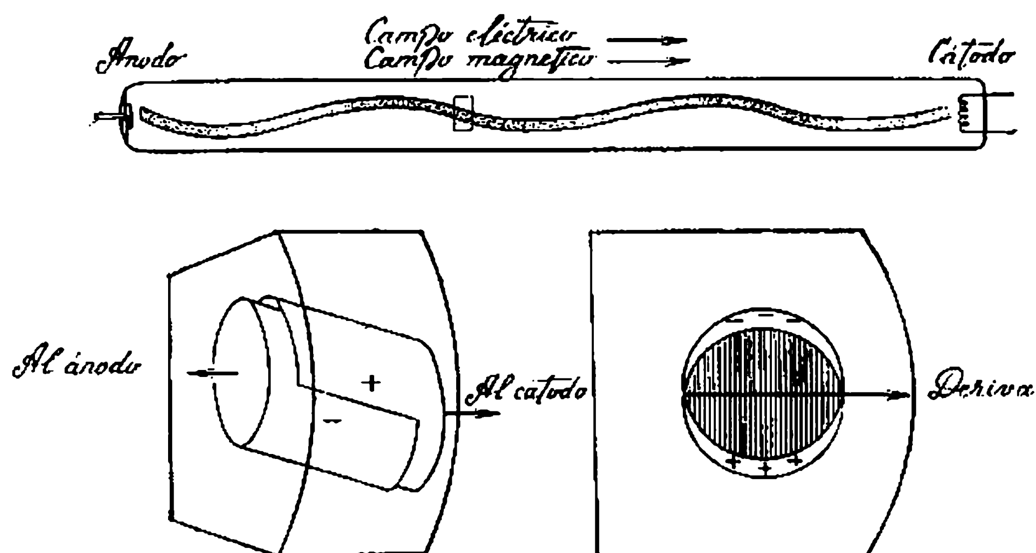


FIG. 208b.

la difusión del plasma hacia las paredes se somete a reglas sencillas. Pero cuando el campo aumenta se producen fuertes oscilaciones del cordón de plasma y comienza una difusión anómala.

Las causas de este fenómeno son las siguientes. Figurémonos que una parte del cordón helicoidal se ha hecho más densa (en el dibujo superior de la fig. 208b se señala con un rectángulo). El campo eléctrico exterior tenderá a disipar esta condensación, por lo que la componente iónica de esta parte del cordón se desplazará hacia el ánodo, mientras que la electrónica lo hará hacia el cátodo (véase el dibujo de la izquierda de la fig. 208b). Pero como la parte considerada tiene forma helicoidal, el desplazamiento longitudinal de las componentes negativa y positiva da lugar a que en la sección transversal de dicha parte del cordón los iones positivos resulten desviados con respecto a los electrones (véase el dibujo de la derecha de la fig. 208b). Aparece un campo eléctrico transversal y la corres-

pondiente corriente. Todos estos sucesos se desarrollan dentro del campo magnético longitudinal. Por esto, en dirección perpendicular a los campos empieza a actuar la fuerza de Lorentz. Si observamos atentamente la forma geométrica de este efecto, resulta que la fuerza actúa sobre la parte «externa», es decir, de modo que la hélice se esparce, y en fin de cuentas, entra en contacto con las paredes del recipiente.

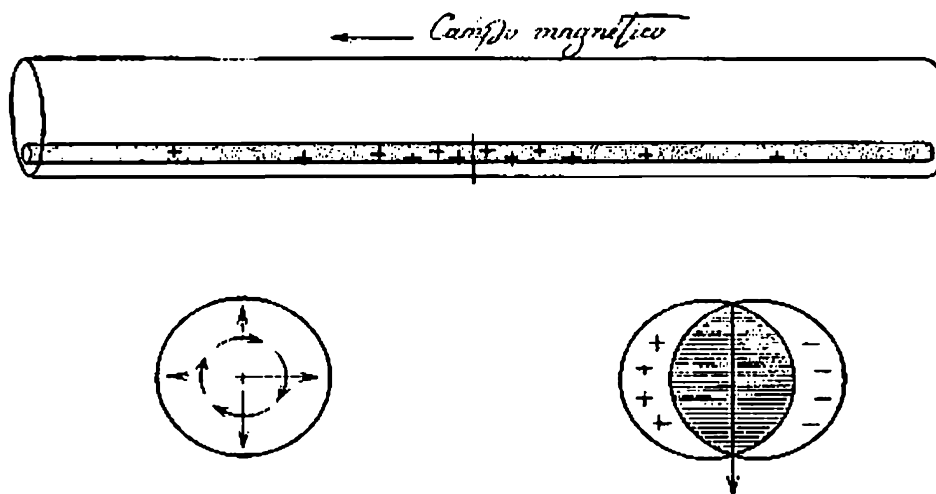


FIG. 208c.

Otro mecanismo de inestabilidad que ocasiona fugas de los botellones magnéticos es el que sigue. Supongamos que en la columna de plasma se forma un cordón cuya densidad es mayor que la media (fig. 208c, dibujo superior). Admitamos que este filamento, que se forma en virtud de las fluctuaciones, tiene la longitud l y dura un tiempo t. Los hechos que describimos ahora se producen en el caso en que la velocidad térmica de los iones es mucho menor que l/t, y la velocidad térmica de los electrones es mucho mayor que l/t. Está claro que estas condiciones se cumplen sin dificultad. Demostremos ahora que ocasiona el esparcimiento del plasma.

Si se crea una región de densidad más elevada, es inevitable el gradiente de presión que inicia el proceso de disipacion. Los electrones se mueven rápidamente, mientras los iones permanecen prácticamente en reposo. Por esta razón, la parte media de la región adquiere carga positiva. El campo eléctrico que se produce debe, en fin de cuentas, equilibrar al gradiente de presión.

Consideremos ahora la sección transversal de la región (fig. 208c, dibujo de la izquierda). Está claro que la carga positiva concentrada en su centro será origen de un campo eléctrico radial. Todas las partículas del plasma se mueven en cada instante en un campo eléctrico y otro magnético cruzados. Al movimiento helicoidal

alrededor de la línea de fuerza magnética se superpone el desplazamiento de Lorentz transversal a las líneas del campo eléctrico. En la proyección aparece un movimiento circular.

A la inestabilidad del cordón nos lleva la circunstancia de que la velocidad de deriva en un campo eléctrico no uniforme es menor para los iones que para los electrones (fig. 208c, dibujo de la derecha).

Si un electrón y un ion (tomemos un protón, por ejemplo) se hallan en equilibrio térmico, entre sus radios de rotación alrededor de las líneas de fuerza magnéticas R_e y R_p existirá la relación 1 : 40. En efecto (véase la pág. 475),

$$R = \frac{mvc}{eB}; \qquad R_e : R_p = \frac{m_e v_e}{m_p v_p}.$$

Pero cuando existe equilibrio térmico, $m_e v_e^2 = m_p v_p^2$, es decir,

$$\frac{v_e}{v_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}}, \text{ y por lo tanto, } \frac{R_e}{R_p} = \sqrt{\frac{m_e}{R \cdot m_p}} \approx \frac{1}{40}.$$

Si el campo eléctrico que se superpone al magnético es uniforme, el radio R no influye en la velocidad de deriva. Esta velocidad es, claro está, proporcional al campo eléctrico. Si el campo eléctrico no es uniforme, el movimiento de la partícula será variado, es decir, más rápido en la región del campo más intenso y más lento en la del campo menos intenso.

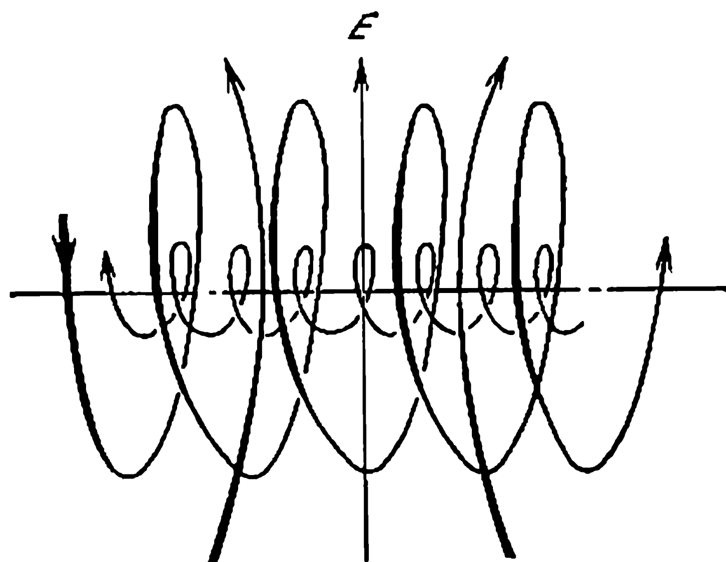


FIG. 208d.

Comparemos ahora el comportamiento de un electrón y de un ion que se muevan en dirección transversal a las líneas de fuerza eléctricas de un campo no uniforme. Supongamos que el eje de la trayectoria helicoidal se proyecta sobre la región en que el campo eléctrico es más intenso (fig. 208 d). El radio del ion es 40 veces

mayor; por esto, al arrollarse alrededor de la línea de fuerza magnética, tiene que pasar por regiones en que los campos eléctricos son más débiles. Por consiguiente, la fuerza eléctrica que provoca la deriva será, en promedio, menor para el ion.

Volvamos a ocuparnos de la inestabilidad del plasma debida a la formación casual de un cordón denso pequeño. Ya hemos demostrado que en la sección transversal de esta región se produce una deriva circular de las partículas. Ahora sabemos que los iones se moverán más despacio. Si la densidad del plasma fuera uniforme, esta circunstancia no se apreciaría. Pero cuando la densidad no es uniforme, la deriva circular, lenta para los iones y rápida para los electrones, hace que en la deriva desde los puntos de alta densidad a los puntos de densidad inferior se desplacen principalmente los electrones y, al contrario, que en la deriva desde los puntos menos densos a los más densos, hacia estos últimos vengan más iones.

La densidad de la columna de plasma es necesariamente no uniforme por la sencilla razón de que tiene límites.

De este modo, la densidad decrece desde el eje de la columna hacia las paredes laterales. Esto significa que la deriva de los iones y electrones, en la región de fluctuaciones que estamos estudiando tan detenidamente, ocasiona la separación de las cargas en una sección transversal (véase el dibujo de la derecha de la fig. 208c). Se crea un campo eléctrico más, que se muestra en la fig. 208c, a la izquierda. Este campo eléctrico, junto con el campo magnético, crea una fuerza de Lorentz que actúa en dirección hacia el exterior. Así, pues, las regiones densas de fluctuación se desplazan automáticamente desde el eje de la columna de plasma hacia sus paredes (arriba). La lucha contra esta inestabilidad universal del plasma, que lo destruye en unas pequeñas fracciones de segundo, es un problema extremadamente difícil.

Este problema que se le plantea a la técnica es el de crear una «reacción», es decir, construir una estructura tal, que haga que las fluctuaciones casuales provoquen fuerzas que tiendan a anularlas. No obstante, hasta ahora no está claro cómo conseguir esto.

27

PROPIEDADES ONDULATORIAS DE LAS MICROPARTÍCULAS

§ 179. Difracción de los electrones

En la fig. 209 pueden verse las figuras de dispersión de los rayos X y de los haces electrónicos por una misma sustancia.

La completa semejanza de estas figuras demuestra que en el caso de los electrones se produce también el fenómeno de la difracción. Partiendo de un espectrograma de rayos X (roentgenograma) y valiéndose de la ecuación $n\lambda = 2d \operatorname{sen} \theta$ se puede, conociendo la longitud de onda λ, hallar el valor de las distancias entre planos (véase

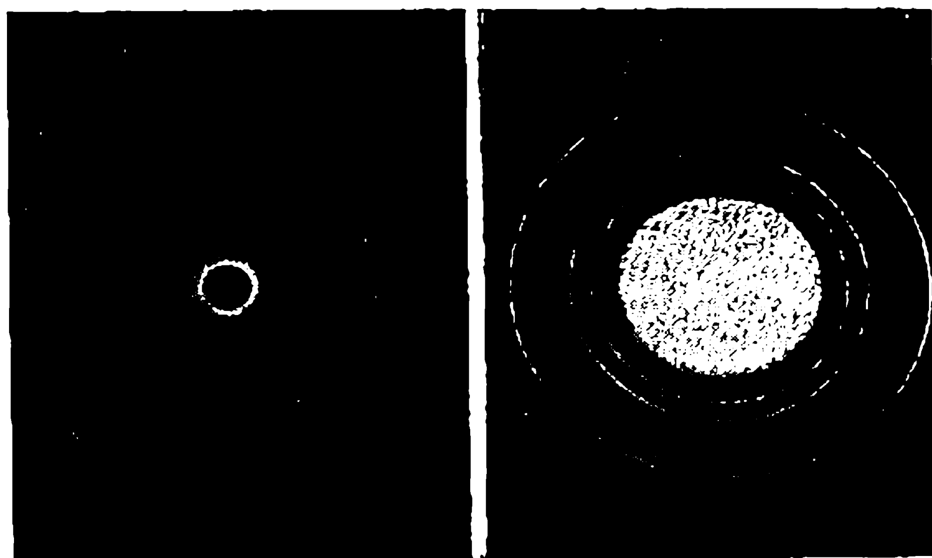


FIG. 209.

la pág. 410). Midiendo en un electronograma los ángulos θ de todos los anillos y aprovechando los valores de d hallados por el espectrograma de rayos X, se puede calcular λ. Los cálculos con respecto a todos los anillos dan un mismo valor. Con esto se demuestra que la figura procede de la difracción y que es posible equiparar un haz de electrones a una onda de longitud determinada.

Para obtener una figura de este tipo hay que interponer en la trayectoria del haz electrónico una película delgada de la sustancia. Los electrones son absorbidos intensamente por la sustancia y sólo pasan a través de películas cuyo espesor es del orden de 10^{-5} cm. Los electronogramas se obtienen en los electronógrafos, que son aparatos parecidos a un microscopio electrónico. Para obtener electronogramas de difracción puede emplearse también dicho microscopio. Para esto lo único que hay que hacer es quitar la lente.

El fenómeno de la difracción de los electrones se aplica con los mismos fines que la difracción de los rayos X. La electronografía tiene una serie de ventajas sobre la roengenografía. La primera de ellas es que las exposiciones son más cortas. La sustancia dispersa con mucha más eficacia los electrones que los rayos X. Un electronograma se puede obtener en unos segundos e incluso en fracciones de segundo, mientras que para conseguir un espectrograma de rayos X se necesitan minutos y hasta horas.

Como los haces electrónicos no penetran considerablemente en la sustancia, la electronografía es un procedimiento cómodo de analizar la estructura de las superficies. La electronografía permite también estudiar la disposición de los átomos en los cristales, aunque sólo en aquellos casos en que la estructura no es complicada.

Pero a nosotros nos interesa no la aplicación de la electronografía, sino el propio hecho de la difracción de los electrones. Volviendo a ella, nos planteamos la pregunta más importante: ¿qué longitud de onda tiene un haz de electrones? A esta pregunta da respuesta la experiencia. Cambiando la tensión aceleradora U, variamos la longitud de onda, resultando λ inversamente proporcional a $\sqrt{U}$, a saber:

$$\lambda \approx \frac{12{,}25}{\sqrt{U}},$$

si λ se expresa en Å y U en voltios.

Ya en el año 1924, antes de descubrirse la difracción de los electrones, Louis de Broglie propuso una hipótesis audaz: consideró que el comportamiento dual del campo electromagnético, que se manifiesta no sólo en forma de ondas de frecuencia ν y longitud λ, sino también en forma de partículas, fotones de energía $E=h\nu$ e impulso $p=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}$, debe extenderse a las partículas de la materia. Los experimentos de difracción de los electrones confirmaron esta hipótesis. La fórmula de la longitud de onda de los electrones

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv},$$

valiéndose de la relación $mv^2/2=eU$, de donde $v=\sqrt{2eU/m}$, puede reducirse inmediatamente a la forma

$$\lambda=\frac{\text{const}^*}{\sqrt{U}}, \quad \text{donde} \quad \text{const}^*=\frac{h}{\sqrt{2em}}.$$

Tomando los valores de e, m y h en el sistema CGS y el de U en voltios, se obtiene el valor de la constante que hemos dado antes. Esto demuestra indiscutiblemente que la hipótesis de De Broglie es correcta.

Las longitudes de onda de los electrones para distintos valores de los potenciales aceleradores, calculadas por la fórmula que acabamos de dar son:

U (V)	1	100	1000
λ (Å)	12,25	1,22	0,39

Como la difracción en un cristal sólo es posible cuando el orden de magnitud de la longitud de onda es igual al período de la red cristalina (~1 Å), está claro que sólo podrán difractarse en el cristal los electrones que posean una energía del orden de centenares de electrón-voltios.

§ 180. Ideas fundamentales de la mecánica cuántica

Quedamos, pues, en que un haz de electrones puede comportarse como una onda de longitud $\lambda = h/p$. ¿Es típico este comportamiento del conjunto de un gran número de electrones, o las propiedades ondulatorias son peculiares de un electrón aislado? Para responder a esta pregunta se pueden comparar los electronogramas obtenidos de un haz de electrones intenso y de otro débil. En uno de los experimentos realizados fue tan débil el haz, que el intervalo medio de tiempo transcurrido entre dos pasos sucesivos de un electrón a través del sistema difractante fue 30 000 veces mayor que el tiempo empleado por un electrón en recorrer la distancia desde el filamento incandescente hasta la placa fotográfica. No obstante, la figura de difracción no difería en absoluto de otro electronograma obtenido con un haz 10^7 veces más intenso. Estas experiencias demuestran que la naturaleza ondulatoria es propia de cada electrón por separado. De este modo, lo que se dijo en las págs. 453—454 acerca del fotón, es también correcto para el electrón. El electrón no se comporta como una bola o como un garbanzo. Su comportamiento no puede definirse por medio de las ecuaciones de la mecánica de Newton. Del estudio del comportamiento de las micropartículas se ocupa la *mecánica cuántica.*

El comportamiento dual del electrón no es una peculiaridad de esta partícula precisamente. Este comportamiento es característico de cualquier micropartícula. Puede observarse, por ejemplo, la difracción de los neutrones. También se ha observado la difracción de los átomos de helio y de las moléculas de hidrógeno. Como veremos más adelante, las propiedades ondulatorias van pasando a segundo plano a medida que aumenta la masa de las partículas. Pero de esto hablaremos después. Llamemos ψ a la amplitud de la onda equiparada con una micropartícula de masa m. Esta amplitud, como la de una onda de cualquier naturaleza, es función de las coordenadas. La función $\psi(x, y, z)$ («función psi») debe satisfacer la ecuación de onda (véase la pág. 360)

$$\Delta\psi + \frac{4\pi}{\lambda^2}\psi = 0.$$

Sustituyamos en esta ecuación la longitud de onda de la micropartícula $\lambda = h/(mv)$, expresando la velocidad de la partícula por medio de su energía. Si la partícula se mueve en un campo cuya energía potencial sea U y posee una energía total $\mathscr{E}$.

$$\frac{mv^2}{2} = \mathscr{E} - U \quad \text{y} \quad v = \sqrt{\frac{2}{m}(\mathscr{E} - U)}.$$

Haciendo la sustitución en la ecuación de onda, obtenemos

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(\mathscr{E} - U)\psi = 0.$$

Esta es la *ecuación de Schrödinger*, que constituye la ley fundamental de la mecánica cuántica. La sustitución que hemos hecho en la función de onda no es en modo alguno la deducción de la ley fundamental de la mecánica cuántica. Esta sustitución debe considerarse únicamente como una ilustración de la conjetura que condujo al descubrimiento de esta ecuación.

Lo mismo que la ley fundamental del movimiento de Newton, la ecuación de Schrödinger es una ley de la naturaleza que abarca, como veremos después, un amplio círculo de fenómenos *).

Esta ecuación diferencial permite en principio hallar la amplitud de la onda $\psi(x, y, z)$ equiparable con la micropartícula en todos los puntos del espacio que se considere.

¿Cómo se puede comprobar que la ecuación de Schrödinger es correcta? Esto puede hacerse por medio de la afirmación fundamental de la teoría: la intensidad de la onda ψ, en cada punto del espacio, es decir, el valor de ψ^2, es la densidad de la probabilidad **) de que el electrón se encuentre en este punto del espacio. En cuanto a la amplitud de la onda ψ (análogamente a los vectores de intensidad de la onda electromagnética), no se mide en el experimento.

La definición de la partícula por medio de la función ψ no es procedimiento incompleto o imperfecto de definir su movimiento. Sería erróneo pensar que únicamente en virtud de las peculiaridades de la mecánica cuántica hallamos sólo la probabilidad $\psi^2(x, y, z)$ de que la partícula esté en el punto dado del espacio, pero que es posible otra teoría mejor, mediante la cual se podrá hallar la trayectoria de la partícula e indicar con certeza el punto en que se encuentra. Esta descripción cierta del movimiento de la partícula, determinando su trayectoria, es imposible por la sencilla razón de que la micropartícula no se comporta como un cuerpo macroscópico. La micropartícula no es una partícula en el sentido clásico de esta palabra.

Vamos a repetir la descripción del experimento con las dos rendijas que utilizamos al considerar el comportamiento dual del fotón.

*) Aquí hemos simplificado el cuadro, puesto que no se ha tenido en cuenta la dependencia de ψ respecto del tiempo. La ecuación de Schrödinger completa toma en consideración esta dependencia.

**) O sea, la probabilidad de que la partícula se halle en un volumen pequeño, dividida por la magnitud de dicho volumen.

Supongamos que un haz de electrones incide sobre una pantalla con dos rendijas. Se produce la difracción. Fijemos nuestra atención en un punto de la pantalla, por ejemplo, aquel en que la interferencia anuló la onda. Si sólo se abre una rendija, hasta este punto llegarán electrones. Si se abren las dos, no llegarán. Este hecho no se puede explicar por las acciones colectivas de los electrones.

Si se insiste en que el electrón se comporta como una partícula clásica, hay que admitir que el electrón que pasa por una de las dos rendijas «sabe» que la otra rendija está abierta o cerrada y, de acuerdo con esto, varía su comportamiento. Como es lógico, tenemos que llegar a la conclusión de que el electrón no es una partícula clásica. Cada electrón posee propiedades ondulatorias, y el concepto de trayectoria no es completamente inaplicable en su caso. Por esta razón, preguntar por cuál de las rendijas pasó el electrón en el experimento en que ambas estaban abiertas, carece de sentido. Esta pregunta sólo es correcta cuando se trata de una partícula «ordinaria», pero no lo es si nos referimos a una micropartícula.

¿Quiere esto decir que carecen de sentido todos los razonamientos acerca de la velocidad y de las coordenadas de las micropartículas? A esta pregunta da respuesta el llamado principio de incertidumbre establecido por el físico alemán Werner Heisenberg.

§ 181. Principio de incertidumbre

Este principio indica entre qué límites puede utilizarse la definición clásica de micropartícula.

LÍMITES DE APLICACIÓN DEL CONCEPTO DE TRAYECTORIA. Supongamos que se desea determinar la coordenada de una micropartícula en cierto punto x y que esto logramos hacerlo con una exactitud Δx. Para poder «ver» la partícula habrá que utilizar un «microscopio» que funcione con una luz cuya longitud de onda sea suficientemente corta, ya que cuanto menor sea λ, tanto mayor será el poder separador. En principio podemos hacer Δx tan pequeño como se desee, para esto bastará tomar λ más corta, para que Δx sea del mismo orden que la longitud de onda: $\Delta x \approx \lambda$.

Pero una longitud de onda pequeña implica un impulso grande, $p=h/\lambda$, del fotón. Este impulso se transmitirá a la partícula que «se observa al microscopio». La partícula recibirá un «capirotazo» y su impulso variará en una magnitud Δp del orden de h/λ. Si se disminuye λ, disminuirá la incertidumbre en la coordenada Δx, pero aumentará la incertidumbre en nuestros conocimientos de Δp. Eliminando λ de las dos relaciones $\Delta x \approx \lambda$ y $\Delta p = h/\lambda$, obtenemos la ecuación

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx h,$$

que es la expresión del *principio de incertidumbre*. Este principio indica que la descripción de la trayectoria de una micropartícula sólo tiene sentido físico en el caso en que esté determinada con unas incertidumbres en los valores de las coordenadas y del impulso a lo largo de una misma dirección que satisfaga la desigualdad

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim h.$$

Esta notable relación establece los límites de aplicación de la terminología de la física clásica a la micropartícula.

Sustituyendo el impulso p por el producto mv (lo que es correcto para velocidades que no se aproximen demasiado a la velocidad de la luz), obtenemos la condición

$$\Delta x \cdot \Delta v \gtrsim \frac{h}{m},$$

que liga las incertidumbres en la coordenada y en la velocidad a lo largo del eje x. El segundo miembro de esta relación tendrá órdenes de magnitud completamente distintos en dependencia de si nos referimos a un electrón, a un átomo, a una molécula o a una pelota de tenis.

Para el electrón

$$\frac{h}{m} \approx 7\ \text{cm}^2/\text{s}$$

y, por lo tanto, las incertidumbres en la coordenada y en la velocidad están ligadas por la relación

$$\Delta x \cdot \Delta v \gtrsim 7.$$

El electrón se encuentra dentro de un átomo (cuya dimensión es 10^{-8} cm). ¿Puede definirse el movimiento del electrón en el átomo como si aquél fuera una partícula «ordinaria»? Aplicando el principio de incertidumbre hallamos que $\Delta v \approx 10^9$ cm/s. Por consiguiente, los razonamientos acerca de la velocidad del electrón atómico sólo pueden tener un carácter muy general. Carecen de contenido los conceptos de trayectoria del electrón en el átomo, de camino de transición del electrón de un estado de energía a otro (véase más adelante), etc. Resumiendo, en el electrón de un átomo se notan muy poco los indicios de partícula «ordinaria».

Pero supongamos ahora que un electrón entra en la cámara de niebla y que, con medios poco exactos, queremos seguir la trayectoria con una precisión del orden de décimas de milímetro. Si el espesor de la traza de la partícula es $\Delta x = 10^{-2}$ cm, por la relación de incertidumbre $\Delta v \approx 7$ m/s; esta será la incertidumbre en la componente transversal de la velocidad. Si el electrón marcha, por ejemplo, con la velocidad de 1 km/s (y tanto más si se trata de un electrón rápido), la incertidumbre del orden que hemos señalado no

desempeña ningún papel y la trayectoria del electrón adquiere sentido. Del mismo modo podemos considerar la trayectoria del rayo electrónico en el microscopio, o la de los electrones en el tubo catódico, sin entrar por esto en contradicción con la representación «clásica».

Los protones, los neutrones, los núcleos atómicos y los átomos poseen una masa millares de veces mayor. La posibilidad de considerar estas partículas desde el punto de vista clásico es algo más amplia. Así, por ejemplo, para una partícula α, cuya masa es aproximadamente 7000 veces mayor que la del electrón,

$$\Delta x \cdot \Delta v > 10^{-3}.$$

¿Puede preguntarse por qué punto de un átomo pasará la trayectoria de la partícula α que penetra en la sustancia? Si queremos trazar la trayectoria con una exactitud de 10^{-9} cm, disponemos de datos acerca de la componente transversal de la velocidad con una incertidumbre de 10^{6} cm/s = 10 km/s. Para una partícula α rápida (20 000 km/s) esta incertidumbre es insignificante y, por lo tanto, puede hablarse de si la trayectoria de la partícula α atraviesa el átomo lejos de su centro.

Sin embargo carece de sentido hablar de las trayectorias de los protones y de los neutrones en los núcleos, ya que la dimensión del núcleo es $\sim 10^{-13}$ cm.

Cuando se trata ya de una molécula grande, por ejemplo, de una de albumina con peso molecular del orden de 10^{6}, el principio de incertidumbre pierde su importancia. Para esta molécula el producto $\Delta x \cdot \Delta v > 10^{-7}$ y de la trayectoria de la molécula puede hablarse sin vacilar con suficientes detalles. Incluso puede seguirse el movimiento térmico caótico de dicha molécula, cuya velocidad media será del orden de 1 m/s, y trazar la trayectoria de su centro de gravedad con una exactitud del orden de 1 Å.

Ni que decir tiene que incluso para las partículas de polvo, que se ven al microscopio, ya no tiene importancia práctica el principio de indeterminación.

POSIBILIDADES DE MEDIR SIMULTÁNEAMENTE DOS MAGNITUDES FÍSICAS. No debe pensarse que la imposibilidad de determinar la trayectoria de una partícula se debe a cierta imperfección de la medida y que en el futuro la física resolverá este problema. El hecho de que carezca de sentido dar con exactitud ideal un par determinado de magnitudes físicas es una peculiaridad de las micropartículas. La diferencia entre las micropartículas y las partículas ordinarias se manifiesta en que los métodos de definición del comportamiento de la partícula «ordinaria» se hacen inaplicables a las micropartículas. El dar simultáneamente la definición

de la coordenada y del impulso sólo tiene sentido cuando se trata de una partícula clásica.

El principio de incertidumbre tiene un significado más amplio que el de simple procedimiento de determinar aproximadamente la posibilidad o imposibilidad de construir la trayectoria de una partícula. Siendo parte orgánica del formalismo matemático de la mecánica cuántica, el principio de incertidumbre permite determinar si es posible medir simultáneamente dos magnitudes físicas cualesquiera, y no sólo las coordenadas y el impulso.

En primer lugar vamos a precisar el principio de incertidumbre con respecto a la coordenada y el impulso. Debe recordarse que una partícula tiene tres coordenadas y que el vector impulso posee tres componentes. En vez de una relación, como hemos considerado antes, hay que plantear tres, a saber:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x > h; \quad \Delta y \cdot \Delta p_y > h; \quad \Delta z \cdot \Delta p_z > h.$$

La mecánica cuántica estudia también el problema acerca de la posibilidad de definir (dar) simultáneamente todas las coordenadas sobre los distintos ejes y todas las componentes del impulso. El dar simultáneamente las coordenadas o las tres componentes del impulso resulta ser posible (es decir, tiene sentido). ¿Por qué subrayamos esta circunstancia? Al parecer siempre se pueden determinar simultáneamente las tres componentes de cualquier vector. Pero un estudio determinado demuestra que esto no es así. De ejemplo de vector cuyas tres componentes no pueden ser definidas simultáneamente sirve el impulso rotacional (momento de la cantidad de movimiento o momento de impulsión) de una partícula.

Supongamos que la partícula gira alrededor de cierto eje con el impulso de rotación L. Este movimiento puede considerarse como el conjunto de tres rotaciones, alrededor de tres ejes perpendiculares entre sí, cuyos momentos de rotación sean L_x, L_y y L_z. Si se trata de una partícula «ordinaria», está claro que pueden determinarse por separado las tres componentes del impulso de rotación, puesto que se puede seguir la trayectoria de la partícula. Pero para una micropartícula es imposible hacer esta determinación, y el dar simultáneamente las tres componentes del impulso de rotación no tiene sentido. En efecto, supongamos por un instante lo contrario: se conocen las tres componentes del impulso de rotación. Si esto es así, con las tres componentes se puede construir el vector resultante del impulso de rotación. Hecho esto, queda determinado el plano en que se mueve la partícula. Pero si se conoce este plano, conoceremos también exactamente la coordenada de la partícula a lo largo del eje de rotación y al mismo tiempo advertimos que la velocidad del movimiento de traslación a lo largo del eje de rotación

es nulo. Esto contradice el principio de incertidumbre que relaciona la coordenada con el impulso.

Por lo tanto, para una micropartícula es característica la imposibilidad de que sean determinadas simultáneamente las tres componentes de su impulso de rotación. ¿Qué datos relativos a la rotación pueden darse simultáneamente? El principio de incertidumbre responde a esta pregunta del modo siguiente: cualquiera de las componentes y el valor absoluto (longitud del vector) del impulso de rotación. Esta regla tiene una sola excepción: para la micropartícula puede establecerse la absoluta carencia de rotación, es decir, la nulidad del vector impulso de rotación, en otras palabras, la igualdad a cero de sus tres componentes al mismo tiempo.

ENERGÍA E INTERVALO DE TIEMPO. Operando con el principio de incertidumbre, que liga la coordenada con el impulso de la partícula, puede suponerse que una relación análoga debe existir, en cierta medida, con respecto a la energía. Efectivamente, en la mecánica de las partículas ordinarias, para calcular la energía total como suma de las energías cinética y potencial, era necesario conocer simultáneamente la posición de la partícula y su velocidad. Para las micropartículas esto es imposible. Pero la energía total de la partícula puede hallarse íntegramente, sin dividirla en partes, y, basándonos en lo que acabamos de decir, es natural esperar que esto pueda hacerse con cierta incertidumbre $\Delta\mathcal{E}$. Si pensamos que el principio de incertidumbre conserva su forma, de las razones de dimensión se deduce que la relación de incertidumbre deberá tener para la energía la forma

$$\Delta\mathcal{E}\cdot\Delta\tau \approx h,$$

donde $\Delta\tau$ es el intervalo de tiempo.

¿Qué intervalo de tiempo es éste y qué sentido debe atribuírsele a la relación de incertidumbre para la energía? Por $\Delta\tau$ debe entenderse el tiempo durante el cual la micropartícula posee la energía $\mathcal{E}\pm\Delta\mathcal{E}$. La incertidumbre de la energía de la micropartícula viene determinada por el tiempo de permanencia en este estado de energía. La incertidumbre en la energía sólo puede alcanzar valores considerables en aquellos casos en que el tiempo de permanencia en el nivel de energía dado comienza a determinarse por fracciones insignificantes de segundo.

El electrón de un átomo puede encontrarse tanto tiempo como se quiera en su nivel de energía más bajo (fundamental) (véase más adelante). Por esta razón la energía del estado fundamental se fija con todo rigor. En el nivel más alto el electrón permanece muy poco tiempo. Su energía en este estado será $\mathcal{E}\pm\Delta\mathcal{E}$. De acuerdo con esto, la frecuencia emitida por el átomo, al pasar del nivel de energía más alto al más bajo, no puede ser determinada rigurosa-

mente, sino que se encuentra entre los límites estrechos de $\nu \pm \pm \Delta\mathscr{E}/h$. Esto se observa en la práctica, las rayas espectrales tienen una anchura finita, lo que se aprovecha para determinar la llamada vida de los microsistemas en estado excitado. La experiencia demuestra, por ejemplo, que la anchura de las rayas espectrales en la región de los rayos X es del orden de 10 eV. En este caso la vida en el estado excitado es del orden de $\frac{h}{\Delta\mathscr{E}} \sim 10^{-16}$ s.

§ 182. Caja de potencial

A su debido tiempo (§ 13) se dieron a conocer las curvas de potencial que interpretan gráficamente las condiciones del movimiento de una partícula. La más simple de las curvas de este tipo es la rectangular, llamada *caja de potencial*. En dicha caja la energía potencial tiene un valor constante a lo largo de cierto segmento a (para simplificar nos limitaremos al problema lineal). En los bordes del pozo la energía potencial varía de golpe. Si las paredes de la caja son muy altas, puede considerarse que la energía potencial dentro de ella es nula (puesto que la elección del punto de referencia no desempeña ningún papel) y que en los bordes del pozo es igual a infinito (fig. 210).

Supongamos que en una caja de este tipo se halla un electrón (o cualquier otra partícula) e intentemos resolver el problema acerca del carácter de su movimiento. Resolvemos un simple problema unidimensional y suponemos que el electrón sólo se mueve a lo largo del eje x. Si al electrón se le pudieran aplicar las leyes de la mecánica de Newton, este electrón se movería continuamente, primero hacia un lado de la caja, se reflejaría elásticamente en la pared, después se movería en sentido contrario y así sucesivamente. Desde el punto de vista de la mecánica de Newton no puede ocurrir de otro modo, ya que, cuando $U=0$, la energía cinética $mv^2/2$ debe ser constante. De esta manera, con respecto a los posibles movimientos en una caja de potencial, la mecánica de la partícula «ordinaria» conduce a las conclusiones siguientes. Dentro de la caja el movimiento de la partícula puede tener cualquier energía cinética $mv^2/2$; la partícula puede también estar en reposo dentro de la caja. Para cada energía dada, el movimiento será uniforme y se

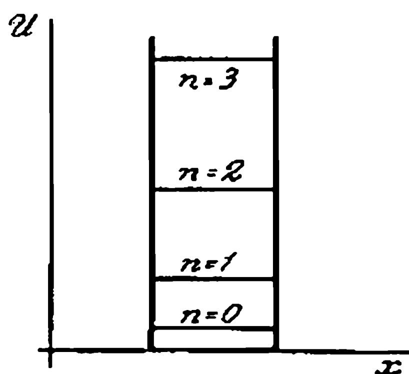


FIG. 210.

efectuará ya en un sentido ya en el otro, variando su dirección de un salto al final del intervalo de velocidades permitido.

Veamos ahora cuál es la respuesta que da la mecánica cuántica acerca del movimiento de un electrón en esta misma caja.

El comportamiento del electrón debemos caracterizarlo por medio de una función ψ cuyo cuadrado indicará la probabilidad de que el electrón se encuentre en un punto cualquiera del segmento permitido. Como dentro de la caja $U=0$, la ecuación de Schrödinger se simplifica y se escribe de la forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\psi=0,\ \text{donde}\ \lambda=\frac{h}{\sqrt{2mE}}.$$

Esta ecuación la satisfacen el seno y el coseno del argumento $\frac{2\pi x}{\lambda}$. Si la caja está limitada por las coordenadas $x=0$ y $x=a$, para estos valores $\psi=0$ (porque el electrón no pasa la pared). Por esto, $\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}$ no puede ser solución de la ecuación (porque $2\pi\frac{x}{\lambda}=1$ cuando $x=0$). Por lo tanto,

$$\psi=A\ \text{sen}\frac{2\pi}{\lambda}x.$$

Pero la longitud de onda no puede ser cualquiera, porque $\psi=0$ cuando $x=a$. Esto quiere decir que debe cumplirse la igualdad

$$\frac{2\pi}{\lambda}a=(n+1)\pi,$$

o bien

$$\lambda=\frac{2a}{n+1},\ \text{donde}\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Así, pues, la longitud de onda puede tomar los valores $2a$, a, $\frac{2a}{3}$, $\frac{a}{2}$, ... Vemos que la función ψ representa la amplitud de una onda estacionaria (véase la pág. 140) y que todo el problema considerado tiene formalmente mucho de común con el de las oscilaciones de una varilla o de una cuerda. Pero si la longitud de onda λ tiene una serie discreta de valores, la energía $\mathscr{E}$ de la micropartícula no puede ser cualquiera, sino que tiene que ser

$$\mathscr{E}=\frac{(n+1)^2h^2}{8ma^2};$$

el número entero n se llama *número cuántico*.

De este modo la ecuación de Schrödinger conduce a la cuantificación de la energía. La micropartícula tiene en la caja de potencial una serie de niveles de energía discretos. El nivel de energía más bajo se produce cuando $n=0$. La energía, en este caso, es igual

a $\frac{h^2}{8ma^2}$. Esta es la energía del punto cero, de la partícula que se halla en la caja de potencial.

La existencia de la energía del punto cero es una interesante peculiaridad de las micropartículas. La energía más baja de las partículas «ordinarias» es la de valor nulo. Pero el movimiento de las micropartículas no se interrumpe en ningunas condiciones. A la temperatura de cero absoluto la micropartícula posee una determinada energía del punto cero, que difiere sensiblemente en dependencia del carácter que tenga el campo de fuerzas en que se halla la partícula.

Ejemplo. Sea $a=1$ Å (magnitud característica para la región del átomo). En este caso la energía del punto cero del electrón en la caja de potencial será

$$\mathcal{E}_0=\frac{h^2}{8ma^2}=\frac{(6,6\cdot 10^{-27})^2}{8\cdot 9,1\cdot 10^{-28}(10^{-8})^2}=0,6\cdot 10^{-10}\,\text{erg}=37\,\text{eV}.$$

Si $a=1$ cm (electrón libre en un trozo de metal), $\mathcal{E}_0=0,6\cdot 10^{-26}$ erg$=37\cdot 10^{-16}$ eV.

Cuando el electrón se halla en un nivel de energía dado, tiene una velocidad que puede calcularse partiendo de la longitud de onda: $v=h/m\lambda$. Sin embargo, el movimiento del electrón ya no puede ser definido por las ecuaciones de la mecánica clásica, y es imposible indicar dónde se encuentra el electrón en tal o cual instante. En cambio puede hallarse el valor de ψ^2, es decir, la densidad de la probabilidad de que el electrón se encuentre en tal o cual punto del espacio, por la fórmula

$$\psi_n^2=A^2\,\text{sen}^2\,\frac{2\pi}{\lambda}\,x=A^2\,\text{sen}^2\,\frac{\pi}{a}\,(n+1)\,x.$$

Una circunstancia característica es la siguiente: a cada nivel de energía le corresponde su (del mismo número n) función de onda (función propia).

La fig. 211 representa la función ψ y su cuadrado para los cuatro primeros niveles de energía del electrón que se encuentra en una caja de potencial. La mecánica cuántica llega a la conclusión de que el electrón no se halla con la misma frecuencia en los diversos puntos del espacio. Si la energía del electrón es la mínima (se encuentra en el nivel fundamental, $n=0$), lo más frecuente es encontrar al electrón en medio de la «caja». Si el electrón se halla en el estado en que $n=1$, nunca se encuentra en el centro del segmento permitido, y así sucesivamente. Las curvas ψ_n^2 dan una idea clara de los puntos que frecuenta el electrón.

Resumamos lo expuesto. La mecánica de las micropartículas llega a las siguientes conclusiones con respecto al movimiento de

la micropartícula en una caja de potencial. En la caja sólo es posible un movimiento en el cual la energía tenga una serie de valores discretos $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ... La partícula no puede estar en reposo, ya que incluso al nivel de energía más bajo le corresponde un movimiento con cierta velocidad. La información acerca del carácter del

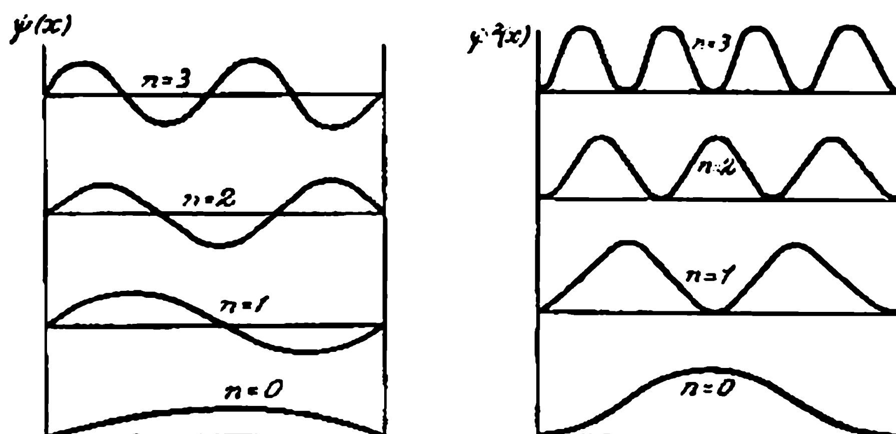


FIG. 211.

movimiento de la partícula cuando tiene una energía determinada viene dada por el cuadrado de la función ψ; conociendo $\psi^2(x)$ se puede saber en qué puntos del espacio se encuentra la partícula con más frecuencia, y en cuáles con menos.

Nos queda por explicar en qué circunstancias se hace posible describir «ordinariamente», es decir, según la mecánica clásica, el comportamiento de la partícula.

Figurémonos que se trata de una molécula de oxígeno encerrada en una caja real cuyas dimensiones son varias decenas de veces mayores que las de la molécula. Supongamos que la molécula tiene la energía media de las moléculas del gas oxígeno a la temperatura ambiente, o sea, 10^{-13} erg. Tomando los valores $a=100$Å, $m=5{,}4\times\times10^{-23}$ g y $\mathcal{E}=10^{-13}$ erg, hallamos en qué nivel de energía cuántico se encuentra la micropartícula. El cálculo da que $n=1000$. De aquí pueden sacarse dos conclusiones. Primera, la curva ψ_n^2 tendrá un número tan enorme de máximos y mínimos consecutivos, que no pecaremos mucho contra la verdad si decimos: la probabilidad de que la partícula se encuentre en ellos es igual para todos los puntos de la caja. Segunda, vemos que los niveles de energía contiguos estarán muy próximos entre sí.

Las dos peculiaridades que se deducen de la ecuación fundamental de la mecánica cuántica se borran: la distribución de las probabilidades para la partícula se hace prácticamente indistinguible de la curva envolvente, los niveles de energía se aproximan tanto

entre sí, que el carácter discreto de la energía se hace prácticamente imperceptible. Los resultados de la mecánica cuántica empiezan a coincidir con los de la mecánica de las grandes partículas. Esto ocurre siempre que la energía de la partícula corresponde a un gran número cuántico. Hemos llegado así a un principio importante de la mecánica cuántica: cuando los números cuánticos son grandes, los resultados de la mecánica cuántica coinciden con los de las partículas «ordinarias». Esto significa que, cuando las n son grandes, el concepto de la trayectoria de la partícula y demás peculiaridades propias de la partícula ordinaria pueden ser aplicados también a la micropartícula.

§ 183. ¿Qué da la solución de la ecuación de Schrödinger?

Hemos dedicado relativamente mucho espacio al movimiento de la partícula en la caja de potencial. En este ejemplo tan simple resultó fácil mostrar los rasgos principales del método mecánico-cuántico de examinar los problemas. Si un electrón (o cualquiera otra partícula) puede efectuar un movimiento dentro de un volumen limitado, las particularidades características de la resolución de la ecuación de Schrödinger se conservan cualquiera que sea la forma que tenga en esta región la curva de potencial. El pozo de potencial puede ser cruzado en todos los casos por cierta cantidad de rectas horizontales, es decir, niveles de energía posibles. En principio la ecuación de Schrödinger permite calcular estos valores de la energía si se da la forma del pozo de potencial. El nivel más bajo da la energía del punto cero de la partícula para el pozo de potencial dado.

Para cada nivel de energía de número n, la mecánica cuántica establece una forma de funciones de onda $\psi_n(x, y, z)$. La magnitud $\psi_n^2(x, y, z)$ da la densidad de la probabilidad de que la partícula se encuentre en un punto dado del espacio si la energía de dicha partícula es $\mathcal{E}_n$. Como durante el tiempo que dura la medición puede la partícula pasar muchas veces por todos los puntos del espacio, $\psi^2(x, y, z)$ puede considerarse como la densidad de la «nube de la partícula». La nube electrónica que rodea el núcleo atómico es algo así como una fotografía del átomo sacada con una exposición muy larga. La función ψ es la amplitud de la onda asimilada a la partícula. En el ejemplo del electrón que se encuentra en una caja de potencial, eran ondas estacionarias, y a cada nivel le correspondía su longitud de onda λ.

En el caso general el problema no se plantea así, y las «ondas» estacionarias correspondientes a un estado dado (es decir, a la n

dada) serán muy particulares: su longitud $\lambda=\frac{h}{\sqrt{2m(\mathscr{E}-U)}}$ será diferente en distintos puntos del espacio, de acuerdo con la marcha de la «curva» de potencial $U(x, y, z)$. Para ejemplos más o menos complejos, la semejanza de la función ψ con la amplitud de una onda estacionaria (en el sentido acostumbrado de esta palabra) se hace bastante lejana.

Tanto la teoría como la experiencia han demostrado que, en una serie de casos, a un valor de la energía $\mathscr{E}_n$ le pueden corresponder varias funciones propias ψ_n. Esto ocurre cuando, con una misma energía, son posibles varios estados de la partícula que se diferencian entre sí por otra magnitud física (por ejemplo, por el impulso de rotación). Las formas de las nubes ψ^2 de estos estados (que se llaman *degenerados*) pueden diferir radicalmente.

Una vez hallados los niveles de energía y calculadas las funciones ψ propias para todos los niveles, queda resuelto exhaustivamente el problema del movimiento de la partícula en el pozo de potencial de la forma dada. Conociendo la solución de la ecuación de Schrödinger puede predecirse el resultado de cualquier medición realizada con respecto a la partícula.

§ 184. Efecto túnel

Vamos a detenernos ahora en un efecto singular que es posible para la micropartícula e imposible para la partícula ordinaria. Nos referimos al efecto túnel, es decir, a la «infiltración» de la partícula a través de una barrera de potencial.

Figurémonos que dentro de la región en que se mueve la partícula hay una barrera de potencial (fig. 212) de altura U y anchura d. Si la energía de la partícula $\mathscr{E}<U$, una partícula ordinaria podrá encontrarse delante de la barrera o detrás de ella. El paso a través de la barrera será imposible, ya que en este caso tendría la partícula una energía cinética negativa y una velocidad imaginaria, lo que sería absurdo. Cuando se trata de una micropartícula el problema se plantea de otro modo. El principio de incertidumbre no permite atribuir simultáneamente a la micropartícula valores exactos de la velocidad y de la coordenada y,

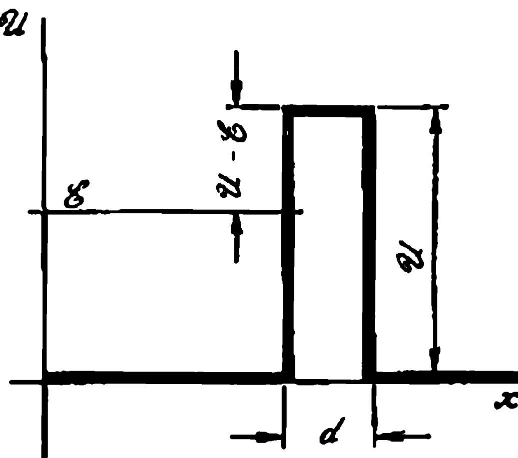


FIG. 212.

por consiguiente, de la energía cinética y de la potencial. Por esta razón una partícula cuya energía total sea $\mathscr{E}$ puede pasar a través de la barrera.

Las condiciones de este paso pueden valorarse del modo siguiente. Las incertidumbres de la coordenada y del impulso están ligadas por la relación $\Delta x \cdot \Delta p \approx h$. La incertidumbre en el impulso está relacionada uniformemente con la incertidumbre en la energía cinética, puesto que $K = p^2/(2m)$. Si ΔK es una magnitud del orden $U - \mathscr{E}$, donde $\mathscr{E}$ es la energía de la partícula y U, la altura de la barrera, la incertidumbre en la coordenada de la partícula que se encuentra a la izquierda de la barrera (véase la figura) será

$$\Delta x \sim \frac{h}{\Delta p} = \frac{h}{\sqrt{2m(U-\mathscr{E})}}.$$

Si la anchura d de la barrera es menor que Δx, la partícula podrá hallarse al otro lado de la barrera. Con la partícula ocurre como si pasara por un túnel practicado a través de la barrera al nivel de la energía total $\mathscr{E}$.

Así, pues, la condición para que se produzca el efecto túnel consiste en que

$$d\sqrt{2m(U-\mathscr{E})} < h, \text{ es decir, } \frac{d}{h}\sqrt{2m(U-\mathscr{E})} < 1.$$

Como puede verse sin dificultad, este fenómeno sólo tiene importancia para las micropartículas.

Cuando $U - \mathscr{E} = 10$ eV $\sim 10^{-11}$ erg, $m \sim 10^{-27}$ g (masa del electrón) y $d \sim 10^{-8}$ cm, $\frac{d}{h}\sqrt{2m(U-\mathscr{E})} = 0{,}2 < 1$, es decir, el efecto túnel es posible.

Para una bolita de masa $m = 1$ g situada junto a una caja de cerillas ($U - \mathscr{E} = 3000$ erg, $d = 2$ cm), $\frac{d}{h}\sqrt{2m(U-\mathscr{E})} = 2{,}5 \cdot 10^{28} > 1$. Está claro que la bolita no puede «infiltrarse» a través de dicha caja.

La teoría rigurosa permite valorar la probabilidad de la infiltración a través de la barrera. Esta probabilidad resulta ser proporcional a

$$e^{-\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m(U-\mathscr{E})}\,d}.$$

El efecto túnel es una consecuencia rigurosa de la ecuación de Schrödinger. La solución de esta ecuación demuestra que la función ψ tiene valores distintos de cero en aquellos puntos del espacio en que $U > \mathscr{E}$. Esto quiere decir, que existe cierta probabilidad, tanto menor cuanto mayor sea $U - \mathscr{E}$, de que el electrón pueda encontrarse en aquellas regiones del espacio en que, en el lenguaje de las partículas «ordinarias», debería poseer una energía cinética negativa.

28

EXTRUCTURA DEL ATOMO

§ 185. *Niveles de energía del átomo de hidrógeno*

Un electrón que «gira» en el campo del núcleo. Al parecer, un problema fácil. Sin embargo, incluso para este átomo tan simple, la ecuación de Schrödinger tiene una resolución que ocupa mucho espacio y que no podemos reproducir. No obstante, nos ocuparemos detenidamente en analizar los resultados de estos cálculos.

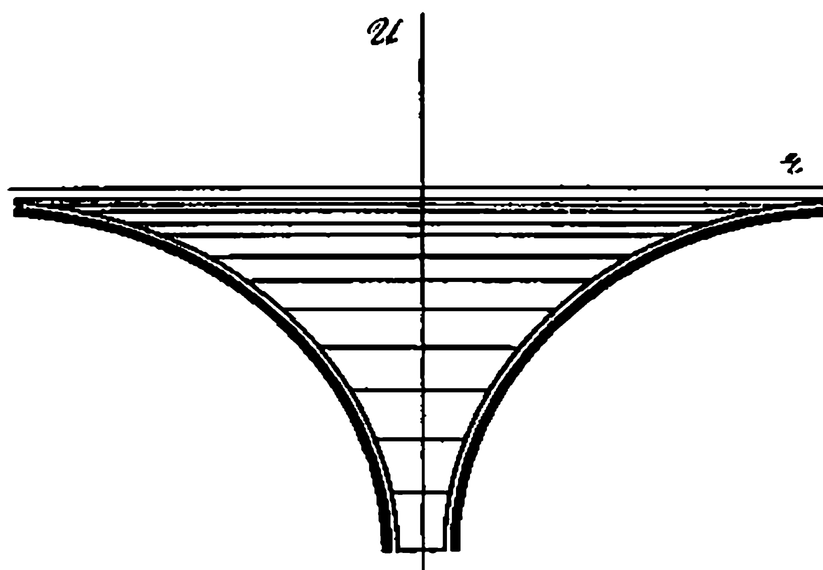


FIG. 213.

Entre el electrón y el núcleo actúa una atracción eléctrica coulombiana. La energía potencial del electrón en el campo del núcleo $U=-e^2/r$, donde e es la carga del electrón (igual que la carga del protón) y $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ es la distancia desde el electrón al núcleo.

La ecuación de Schrödinger tiene la forma

$$\Delta\psi+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(\mathscr{E}+\frac{e^2}{r}\right)\psi=0.$$

El átomo es una variante peculiar del pozo de potencial (fig. 213). Se trata de un pozo sin fondo y con los bordes divergentes. Los bordes del pozo son hipérboles, el eje $r=0$ es una de las asíntotas.

El electrón, dentro del átomo, posee energía potencial negativa *), puesto que el valor mínimo de la energía potencial tiende a infinito cuando $r \to 0$, y el valor máximo es nulo.

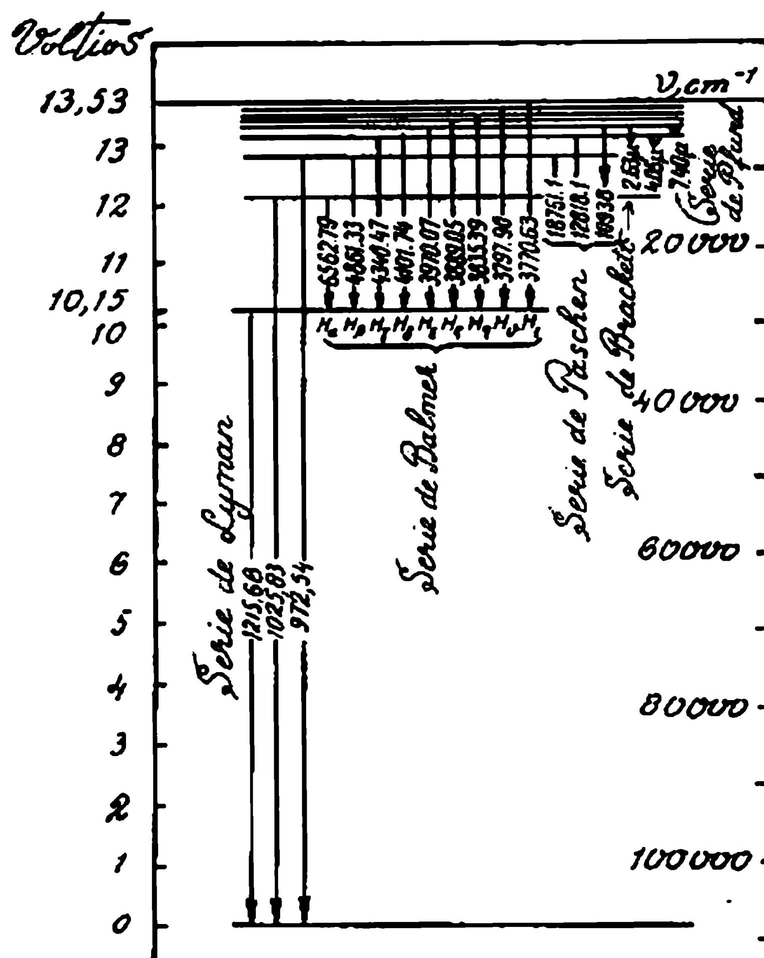


FIG. 214.

En la fig. 214 se representan los niveles de energía obtenidos resolviendo la ecuación de Schrödinger. Una particularidad importante de la solución es la aproximación de los niveles entre sí a medida que aumenta el número cuántico n. De las transiciones entre niveles trataremos más adelante. Las escalas de valores, proporcionales a la energía, se dan en las unidades que se usan en

*) Puede plantearse la pregunta: ¿Por qué se toma el origen de la energía potencial de tal modo, que la del electrón resulta negativa? No es difícil comprender la ventaja de esta elección. Para diferentes átomos, la energía potencial sólo tiene el mismo valor cuando $r \to \infty$. Es natural que se tome este valor *común* como cero.

esprectroscopia: voltios y centímetros recíprocos. La fórmula de los niveles energéticos puede presentarse de la forma

$$\mathscr{E}_n = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2 n^2}.$$

Pero por motivos históricos, esta fórmula suele escribirse como sigue:

$$\mathscr{E}_n = -\frac{cRh}{n^2},$$

donde $R=\frac{2\pi^2 me^4}{ch^3}=109\,740\ \text{cm}^{-1}$ se llama *constante de Rydberg*.

De este modo, no sólo la energía potencial, sino también la energía total del electrón en el átomo resulta ser negativa. El electrón del átomo puede hallarse en los niveles designados con el número n. Cuanto mayor sea n tanto más elevado será el nivel de energía y tanta más energía tendrá el electrón. El electrón de un átomo libre, de hidrógeno, no sometido a acción alguna, se halla en el nivel de energía más bajo, $\mathscr{E}_1=-cRh$.

Si al átomo, por un procedimiento cualquiera, se le comunica energía, y por su magnitud ésta es mayor que cRh, el electrón se escapa del pozo de potencial, es decir, el átomo se ioniza. La energía cRh recibe el nombre de *energía de ionización*.

El trabajo de arranacar el electrón del átomo suele caracterizarse por el *potencial de ionización*. Para el hidrógeno

$$V_{ion}=\frac{cRh}{e}=\frac{3\cdot 10^{10}\cdot 109\,740\cdot 6{,}6\cdot 10^{-27}}{4{,}8\cdot 10^{-10}}=4{,}5\cdot 10^{-2}\ u.\text{CGS}=13{,}5\,V.$$

La causa de esta denominación es la siguiente. Supongamos que el electrón es arrancado del átomo por la acción de un haz de electrones. Para ionizar el átomo hay que acelerar los electrones que hacen las veces de proyectiles, por lo menos, hasta una energía $eV=cRh$. Por consiguiente, V es la diferencia de potencial hasta la cual hay que acelerar el electrón, para que al chocar con el átomo de hidrógeno pueda provocar la ionización.

Si el átomo de hidrógeno recibe una energía menor que cRh, puede saltar a un nivel n-ésimo cualquiera *). De este átomo se dice que está en estado excitado.

En el estado excitado permanece el átomo una fracción insignificante de segundo y pasa a un nivel más bajo emitiendo un fotón de acuerdo con la igualdad

$$h\nu_{mn}=\mathscr{E}_m-\mathscr{E}_n=cRh\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right).$$

*) En el caso del átomo de hidrógeno, que posee un solo electrón, las frases «el átomo se encuentra en el n-ésimo nivel de energía» o «el electrón se halla en el n-ésimo nivel de energía» tienen el mismo significado.

Si los átomos de hidrógeno son excitados por colisiones de diversos tipos, se elevan a distintos niveles de energía y retornan al nivel fundamental «saltando» distinto número de escalones (véase la fig. 214). Por esto una gran acumulación de átomos de hidrógeno emitirá fotones diversos con todas las frecuencias ν_{mn} posibles. Así aparece el espectro característico de rayas de emisión.

Calculando, para un n dado, las frecuencias ν_m correspondientes a los números $m=n+1$, $n+2$, ... pueden obtenerse las distintas series de frecuencias de las rayas del espectro del hidrógeno. La existencia de estas series era conocida desde mucho antes de la creación de la mecánica cuántica. Una de ellas (la serie de Balmer) corresponde a $n=2$. Haciendo $m=3$, 4, 5, 6, 7, 8, calculamos las longitudes de onda de las seis líneas de esta serie: $\lambda_3=6562{,}80$ Å; $\lambda_4=4861{,}38$ Å; $\lambda_5=4340{,}51$ Å; $\lambda_6=4101{,}78$ Å; $\lambda_7=3970{,}11$ Å y $\lambda_8=3889{,}09$ Å. Se nota bien que las rayas se van aproximando entre

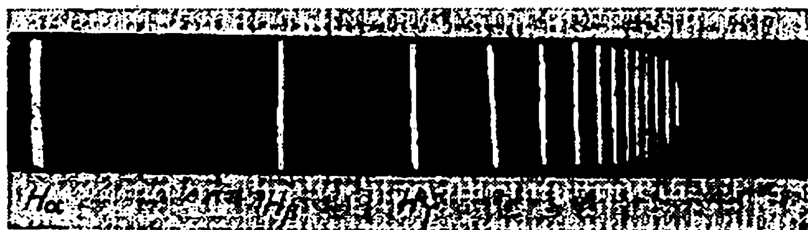


FIG. 215.

sí a medida que crece m, hecho que se observa también experimentalmente (fig. 215). La divergencia de estas cifras teóricas con las experimentales no excede de cinco unidades en la última cifra.

§ 186. *Números cuánticos*

Resolviendo la ecuación de Schrödinger pueden hallarse no sólo todos los niveles de energía $\mathcal{E}_n$ del átomo de hidrógeno, sino también todas sus funciones de onda. En el estado fundamental se caracteriza el electrón por una función ψ_1. En cuanto a los estados excitados, todos ellos —según la terminología de la mecánica cuántica— son degenerados, siendo la degeneración de orden n^2. Este término significa que a la energía $\mathcal{E}_2$ le corresponden cuatro funciones ψ, a la energía $\mathcal{E}_3$, nueve y así sucesivamente. Cada uno de estos estados puede realizarse.

¿En qué se distinguen unos de otros los n^2 estados que tienen el mismo número cuántico n? La mecánica cuántica da respuesta a

esta pregunta. Los estados con un mismo valor de la energía $\mathcal{E}_n$ pueden diferir en la magnitud del impulso de rotación del electrón y también en el valor de la proyección de dicho impulso sobre cualquier dirección (esta dirección se destaca entre todas las demás por la sencilla razón de que la elegimos).

La resolución de la ecuación de Schrodinger para el átomo de hidrógeno da el resultado siguiente: el impulso de rotación del electrón tiene una serie discreta de valores que vienen dados por la fórmula

$$L=\sqrt{l(l+1)}\frac{h}{2\pi},$$

donde l puede tomar cualquier valor entero desde 0 hasta $n-1$, si el electrón se encuentra en el nivel n-ésimo.

La ecuación de Schrödinger demuestra además que, con respecto a la dirección z elegida, el impulso de rotación L sólo puede estar orientado de tal modo que sea

$$L_z=m\frac{h}{2\pi},$$

donde m es un número entero que puede tomar los valores desde $-l$ hasta $+l$, incluyendo el nulo.

Recordaremos que de acuerdo con el principio de incertidumbre el conocimiento de L y L_z agota toda la información posible acerca del impulso de rotación, en otras palabras, tiene sentido el dar simultáneamente sólo estas dos magnitudes.

Así, pues, el estado del electrón en el átomo se caracteriza por medio de tres números cuánticos: n, l, y m. El número n se llama *número cuántico principal*, el l, *secundario u orbital* y m, *magnético*.

Los estados con valores de $l=0, 1, 2, 3, \ldots$ se designan respectivamente con las letras $s, p, d, f, \ldots$ El número delante de las letras sirve para indicar el número cuántico principal. Por ejemplo, el estado $3p$ es el estado en que $n=3$ y $l=1$.

A continuación se dan todos los estados posibles para $n=1, 2$ y 3.

n	l	Símbolo del estado	m
1	0	1 s	0
2	0	2 s	0
	1	2 p	—1, 0, 1
3	0	3 s	0
	1	3 p	—1, 0, 1
	2	3 d	—2, —1, 0, 1, 2

Las transiciones energéticas que tienen lugar en el átomo de hidrógeno se determinan exclusivamente por los valores del número cuántico principal n. Para que los números l y m desempeñen su papel hay que «eliminar la degeneración», es decir, lograr que a los estados que tienen diferente impulso de rotación les corresponda una energía distinta. En los átomos de hidrógeno esto se puede conseguir colocándolos en un campo magnético. En otros átomos, como veremos después, la degeneración se elimina por la interacción de los electrones.

§ 187. Nube electrónica para los estados s y p

El estado caracterizado por la terna de números n, l y m se define por la función de onda $\psi_{n,l,m}$. A este estado le corresponde una forma característica de nube electrónica, que viene determinada por la función $\psi^2_{n,l,m}$. Detengámonos en la forma de las funciones ψ^2 del átomo de hidrógeno que caracterizan los distintos estados excitados de este átomo.

Consideremos el estado s. Como $l=0$, también $m=0$, por lo tanto, para cada n habrá una sola función ψ. La igualdad $l=0$ significa

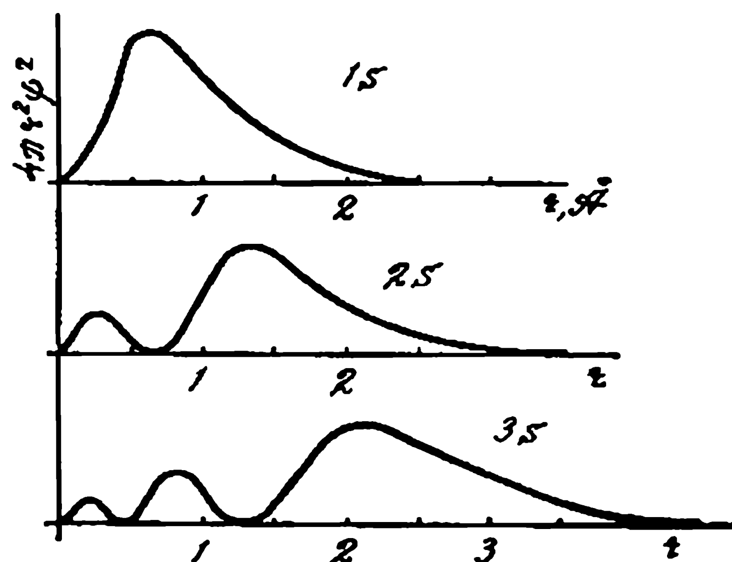


FIG. 216.

que el electrón carece de impulso de rotación. Naturalmente esto impone la condición de que no existan direcciones de movimiento privilegiadas, es decir, que la nube electrónica tenga simetría esférica. La ecuación de Schrödinger da precisamente este resultado: las funciones ψ_{1s}, ψ_{2s}, ψ_{3s}, etc., poseen simetría esférica.

La fig. 216 reproduce la construcción de las curvas de la distribución radial de la densidad de la nube electrónica (o, lo que es lo

mismo, de la densidad de la probabilidad de que el electrón se encuentre en un punto determinado). Sobre el eje de ordenadas se ha tomado la magnitud $4\pi r^2\psi^2$, llamada densidad radial; evidentemente, $4\pi r^2\psi^2 dr$ es el número de electrones *) que hay en la capa esférica comprendida entre los radios r y $r+dr$. Las curvas de densidad radial muestran que en el estado 1*s* existe un máximo de densidad electrónica, que en el átomo de hidrógeno se halla a la distancia de 0,53 Å del núcleo. En el estado 2*s* existen dos máximos de densidad, aunque el electrón estará principalmente dentro del segundo máximo. Finalmente, en el estado 3*s* existen tres máximos de densidad, de los cuales el más «frecuentado» es el tercero.

Con el aumento del número principal n, la nube electrónica se esparce.

Las funciones del estado p tienen un aspecto completamente distinto. Al valor $l=1$ pueden corresponderle tres valores de

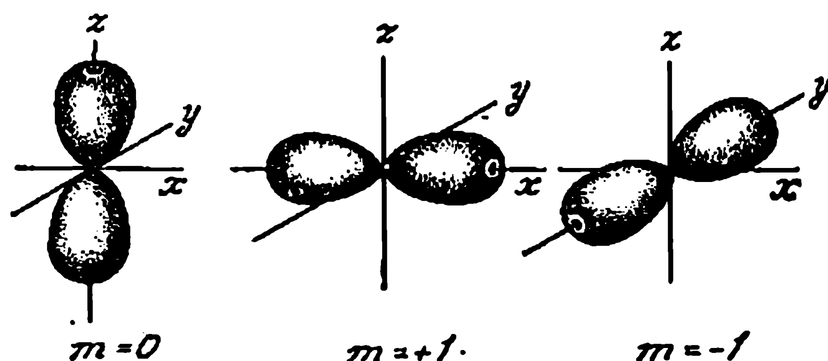


FIG. 217.

$m=0, -1, +1$. Una idea de las configuraciones de la nube electrónica la da la fig. 217. Cuando $m=0$ el eje mayor del «ocho» se sitúa a lo largo de la dirección elegida, cuando $m=\pm 1$, dicho eje es perpendicular a esta dirección. Es evidente que sólo tiene sentido distinguir los estados con $m=\pm 1$ cuando ambos existen. La figura da cierta idea de la simetría de la nube electrónica. Esta simetría es igual para todos los estados p. La diferencia de número cuántico principal se reduce solamente a la variación del carácter del decrecimiento radial de la densidad: cuanto mayor sea n tanto más se alargará la figura.

No vamos a considerar los estados con valores grandes de l; sus nubes electrónicas son más complejas.

*) No debe extrañarnos que el número de electrones sea fraccionario. Esto es sólo un modo de expresarse. En rigor, $4\pi r^2\psi^2 dr$ es la probabilidad de que el electrón se encuentre en la capa esférica cuyo espesor es dr.

§ 188. Principio de Pauli

Como sabemos, los átomos están dispuestos en la tabla de Mendeléiev según el orden en que aumenta el número de electrones que hay en ellos. El helio tiene dos electrones, el litio, tres, el berilio, cuatro. ¿Qué predicciones acerca de la estructura de los átomos pueden hacerse valiéndose de la ecuación de Schrödinger?

A primera vista, este problema parece imposible de resolver. Para el helio ya tendría que consistir el procedimiento riguroso en resolver la ecuación de Schrödinger para hallar una función de onda con seis variables $\psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$, cuyo cuadrado debería darnos el valor de la probabilidad de que el primer electrón se encuentre en el punto x_1, y_1, z_1, mientras que el segundo se halla simultáneamente en el punto x_2, y_2, z_2. Como energía potencial habría que hacer en la ecuación

$$U = -\frac{2e^2}{r_1^2} - \frac{2e^2}{r_2^2} + \frac{e^2}{r_{12}^2},$$

donde r_1 y r_2 son las distancias desde los electrones al núcleo (la carga del helio es $2e$), y r_{12} es la distancia entre los electrones. Este problema es imposible resolverlo exactamente.

Sería muy conveniente referirnos por separado a cada electrón del átomo y definirlo por medio de su función de onda $\psi(x, y, z)$. Pero, ¿cómo hacer esto? Está claro que hay que considerar el movimiento de un electrón en el campo del núcleo y de los demás electrones. Este campo efectivo puede suponerse que tiene simetría esférica. Por esta razón, la definición de las propiedades de dicho electrón no diferirá de la del electrón del átomo de hidrógeno.

A pesar de todo, el problema será bastante complicado: para diferentes electrones estos campos efectivos serán distintos y, lo que es más importante, habrá que determinar todos simultáneamente, porque de cada uno de ellos depende el estado de todos los demás electrones (este campo efectivo se llama «autoconsistente»). Este modo de abordar el problema del átomo multielectrónico permite conservar en grado considerable la definición de las propiedades del electrón del átomo de hidrógeno para describir el comportamiento del electrón de un átomo complejo.

El estado de cada electrón se caracterizará por los mismos números cuánticos que en el caso del hidrógeno. Pero en el caso de un átomo que tenga varios electrones, la interacción de los electrones elimina la degeneración y los niveles con distintos l y m poseerán diferentes energías.

La ecuación de Schrödinger permite hallar los niveles de energía posibles, pero nada nos dice de qué energía poseerán los electrones atómicos. Podría pensarse que todos los electrones de un

átomo ocupan el nivel de energía más bajo. Por lo menos así se comportarían las partículas «ordinarias». Sin embargo, la experiencia desmiente categóricamente esta suposición. El «alojamiento» de los electrones en los niveles de energía está regulado por el *principio de Pauli*. La primera conjetura acerca de la existencia de este principio se dedujo del estudio de la tabla de Mendeléiev.

Como se dijo antes, la ecuación de Schrödinger conduce a que, para unos valores dados de n y l, existen $(2l+1)$ estados. Esto, a su vez, da la cifra de n^2 funciones ψ diferentes para un valor de n. Los primeros valores de n^2 son 1,4 y 9. Veamos lo que ocurre en la tabla de Mendeléiev. El helio, el neón y el argón, en que concluyen los tres primeros períodos de la tabla, tienen respectivamente 2, 8 y 18, o sea, 2 n^2 electrones. ¿Es una casualidad? No, al contrario, es la expresión de una profunda regularidad según la cual sólo dos electrones pueden tener la misma función ψ. En otras palabras, cada nivel de energía sólo puede ser ocupado por no más de dos electrones. Esta ley general de la naturaleza, de la que volveremos a ocuparnos en el § 190, recibe el nombre de principio de Pauli.

Valiéndose de este principio se pueden «distribuir» los electrones de un átomo complejo de acuerdo con los números cuánticos y, por consiguiente, por los niveles de energía y los valores del impulso de rotación. El átomo de helio tiene dos electrones; estos electrones pueden ocupar el único nivel 1s. El tercer electrón del litio debe ocupar ya el nivel siguiente, 2s. En el átomo de berilio los cuatro átomos ocupan los niveles 1s y 2s. El quinto electrón del átomo de boro ocupa el nivel 2p. En este nivel hay seis puestos para electrones, los cuales irán siendo ocupados hasta llegar al neón. Pero el estudio de la relación entre la ley periódica de Mendeléiev y la estructura electrónica del átomo lo aplazaremos hasta el § 192.

¿Difieren en algo los dos electrones que ocupan un nivel caracterizado por los tres mismos números cuánticos? Sí, resulta que estos dos electrones se diferencian por la dirección del impulso de rotación propio (es decir, por la dirección del «espín»).

§ 189. Desviación de un haz atómico en un campo magnético

En los párrafos precedentes hemos hablado mucho del impulso rotacional del electrón creado por el movimiento del electrón alrededor del núcleo. La existencia de este impulso de rotación puede demostrarse, ya que como resultado del movimiento del electrón, el átomo adquiere un momento magnético.

Recurramos a las representaciones clásicas y supongamos que el electrón gira siguiendo una circunferencia de radio r. Como la

intensidad de la corriente es igual a la carga transportada en la unidad de tiempo, la intensidad de la corriente equivalente a este electrón girando será $I=ne$, donde n es el número de vueltas por segundo. Por otra parte, $n=v/(2\pi r)$, donde v es la velocidad. Por lo tanto

$$I=\frac{ve}{2\pi r},$$

y el momento magnético del electrón que gira (véase la pág. 277) será

$$M=\frac{1}{c}IS=\frac{1}{c}\frac{ve}{2\pi r}\cdot\pi r^2=\frac{1}{2c}evr.$$

El impulso de rotación del electrón L es igual a mvr Por consiguiente,

$$M=\frac{e}{2mc}L.$$

La relación entre el impulso de rotación y el momento magnético del electrón que se mueve alrededor del núcleo, obtenida por medio de este cálculo elemental, ha sido confirmada por la experiencia para todos los electrones atómicos.

Así, pues, los átomos en que $L\neq0$ poseen momentos magnéticos y, en el experimento oportuno, deben poner de manifiesto propiedades de pequeños imanes. Este experimento consiste en hacer pasar un haz paralelo de átomos por un campo magnético no uniforme (fig. 218).

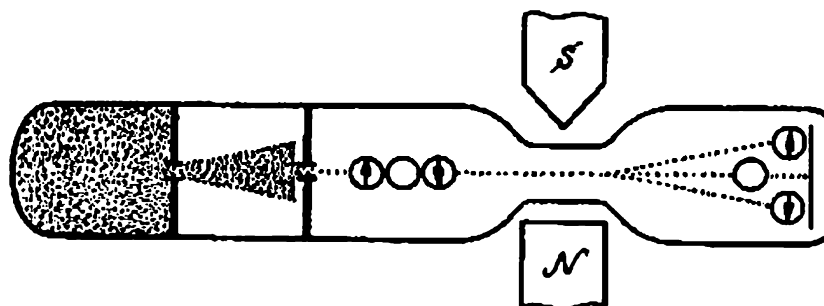


FIG. 218.

De un tubo largo se extrae con cuidado el aire. En el extremo izquierdo del tubo se crea un gas atómico. A través de los pequeños orificios que hay en las pantallas, los átomos pueden escaparse del compartimiento izquierdo. Como los orificios son dos, al espacio libre sólo salen en definitiva átomos que se mueven a lo largo del eje del aparato. Este haz paralelo de átomos pasa a través de un campo magnético no uniforme. Como sabemos (pág. 302), sobre un cuerpo que posea un momento magnético M actuará en este campo

la fuerza

$$f = M_z \frac{dH}{dy},$$

donde $\frac{DH}{dy}$ es el gradiente del campo en la dirección perpendicular al haz atómico, y M_z es la proyección del momento magnético sobre la dirección del gradiente. Si el momento magnético es perpendicular al campo, la fuerza no actúa; si el momento está dirigido a lo largo del campo, el cuerpo será atraído hacia un polo o hacia el otro en dependencia de cómo esté orientado el vector M, hacia la parte norte o hacia la parte sur. Si en el haz hay átomos con momentos magnéticos diferentes o con distinta orientación, dicho haz se dispersa: los átomos, sobre los cuales actúan fuerzas f diferentes, se desvían hacia lados distintos. El haz de átomos incide sobre una lámina; continuando el experimento, podemos esperar a que llegue el instante en que el número de átomos acumulados en ella sea suficiente para poder descubrirlos.

Este experimento desempeñó un papel importante en la elaboración de los fundamentos de la teoría del átomo. En la actualidad sigue teniendo importancia como procedimiento para determinar los momentos magnéticos de los núcleos atómicos.

§ 190. Espín del electrón

Las experiencias con los haces atómicos permiten medir M y, por lo tanto, L. Una de las conclusiones importantes de la mecánica cuántica fue la afirmación acerca de la cuantificación del impulso de rotación L: el impulso total L toma únicamente una serie de valores discretos, a saber:

$$L = \sqrt{l(l+1)} \frac{h}{2\pi},$$

donde l es el número cuántico secundario (orbital). Por consiguiente, los momentos magnéticos de los átomos también pueden tomar solamente una serie discreta de valores:

$$M = \frac{eh}{4\pi mc} \sqrt{l(l+1)} = \mu \sqrt{l(l+1)}.$$

La constante

$$\mu = \frac{eh}{4\pi mc} = 0{,}927 \cdot 10^{-20} \text{ erg/Gs}$$

se llama *magnetón de Bohr*.

En el experimento con los haces atómicos, en el campo magnético exterior se destaca la dirección perpendicular al haz. Las pro-

yecciones de L sobre esta dirección también pueden tener únicamente una serie discreta de valores:

$$L_z = m\frac{h}{2\pi},$$

por lo tanto,

$$M_z = m\mu,$$

donde m es el número cuántico magnético. Como puede verse, los valores de M_z deben ser iguales a un número entero de magnetones de Bohr.

En el experimento con los haces atómicos se determina directamente M_z. ¿Qué resultado debe dar este experimento hecho con haces de átomos diferentes? Puede esperarse la siguiente figura. Los átomos de hidrógeno, helio, litio y berilio sólo tienen electrones s. Como para ellos $L=0$, el haz no se desintegrará en el campo magnético. Cuando existen electrones p esperamos que el haz se desintegre en tres componentes nítidas: una central, no desviada, para $m=0$, y dos, situadas simétricamente a la derecha y a la izquierda, para $m=\pm 1$. Los electrones d deben dar cinco haces, de acuerdo con los cinco valores posibles del número cuántico m, y así sucesivamente.

Estas predicciones se justifican por una circunstancia: en ciertos casos el haz de átomos no se desintegra, en otros se divide en componentes bien definidas. Por lo tanto, está claro que existen átomos con momento magnético nulo, y también es indudable que si el momento magnético existe, se cuantifica.

En cuanto a los resultados obtenidos para átomos concretos, hay que decir que ponen de manifiesto un hecho nuevo: que el electrón tiene momento magnético propio.

A esta conclusión nos lleva inmediatamente el experimento con un haz de átomos de hidrógeno: este haz se desintegra en dos componentes simétricas, correspondientes a las desviaciones de los átomos con momentos magnéticos $\pm\mu$. ¡No existe haz central no desviado! Este hecho sólo puede ser explicado por la siguiente hipótesis, confirmada por todo el material restante de la física atómica: el electrón posee momento magnético; este momento sólo puede tener dos posiciones en el espacio, a saber: las de las proyecciones $\pm\mu$ sobre la dirección del campo exterior.

El momento magnético del electrón, que se debe al movimiento del electrón alrededor del núcleo, está ligado uniformemente, como acabamos de ver, con el impulso de rotación del movimiento del electrón en torno al núcleo. Resulta, pues, que el momento magnético propio del electrón también está ligado con el impulso de rotación propio del electrón, que recibe el nombre de *espin*.

Antes de que se hicieran los experimentos que hemos descrito, que revelaron que el electrón tiene un momento magnético propio, Goudsmit y Uhlenbeck supusieron ya en 1925 que el electrón poseía espín. Estos investigadores demostraron que la hipótesis de la existencia del espín del electrón, es decir, de su impulso de rotación propio, elimina dificultades insuperables en el descifre de los espectros. Inicialmente se supuso que el espín era consecuencia de la rotación del electrón alrededor de su eje. De aquí el término espín (del inglés «to spin», que significa girar). Sin embargo, esta interpretación es errónea. El espín del electrón es una característica primaria suya, que no puede reducirse a nada más simple.

Pero, ¿qué relación existe entre el impulso de rotación propio del electrón (espín) y su momento magnético propio? El experimento con el haz de átomos de hidrógeno nos llevó a concluir que la proyección del momento magnético propio del electrón M_z sólo puede tomar dos valores: $\pm\mu$. Es de suponer que la proyección del espín L_z pueda también tomar dos valores solamente.

Si queremos aplicar al impulso de rotación propio del electrón la fórmula

$$L=\sqrt{l(l+1)}\,\frac{h}{2\pi},$$

hallamos que el número l tiene un solo valor. En efecto, como se deduce de la mecánica cuántica, a los valores $l=0, 1, 2,\ldots$ corresponden 1, 3, 5,.. y, en general, $(2\,l+1)$ estados. Para obtener los dos estados de espín a que nos condujo el experimento $(2l+1=2)$, hay que suponer el número cuántico $l=\frac{1}{2}$.

El valor absoluto del impulso de rotación propio del electrón (espín) tiene un solo valor posible: $L=\sqrt{\frac{3}{4}}\,\frac{h}{2\pi}$. En cuanto a la proyección del espín, suponiendo como antes que las diferencias entre los valores posibles de L_z deben ser múltiplos de $\frac{h}{2\pi}$, vemos que puede tomar solamente dos valores: $+\frac{1}{2}\,\frac{h}{2\pi}$ y $-\frac{1}{2}\,\frac{h}{2\pi}$. De este modo, $(L_z)_{sp}=sh/(2\,\pi)$, donde s es un nuevo número cuántico (*número de espín*) que sólo puede tomar dos valores: $\pm\frac{1}{2}$.

Dijimos antes que el experimento con el hidrógneo dio unas desviaciones que correspondían a un momento magnético igual a un magnetón, y $M_z=\mu$. Como el número cuántico s es igual a $\frac{1}{2}$, la relación

$$M=\frac{e}{2mc}\,L$$

resulta errónea para el movimiento propio del electrón. La concordancia con el experimento se consigue si

$$M_{sp}=\frac{e}{mc}L_{sp}.$$

Por lo tanto, la relación M/L del momento magnético al impulso de rotación para el movimiento del electrón alrededor del núcleo es dos veces menor que esta misma relación referida al movimiento propio del electrón.

El hecho de que el electrón tenga espín permite volver de nuevo al principio de Pauli y enunciarlo de una forma más clara. En los estados con números cuánticos n, l, m pueden encontrarse no más de dos electrones. Estos electrones sólo se diferencian en las proyecciones de sus espines. ¿Pueden tener, estos dos electrones, proyecciones iguales de los espines? La experiencia da una respuesta negativa a esta pregunta y el principio de Pauli recibe el siguiente enunciado: en cada estado caracterizado por los *cuatro* números cuánticos n, l, m y s sólo puede encontrarse un electrón. En otras palabras, si en un estado n, l, m hay dos electrones, sus espines tendrán direcciones opuestas.

§ 191. Momentos magnéticos de los átomos

La hipótesis del espín del electrón permite descifrar los resultados de las experiencias con haces atómicos llevadas a cabo con diferentes átomos. La medida del momento magnético es uno de los procedimientos esenciales para juzgar acerca del estado electrónico de los átomos. Veamos qué deben dar estos experimentos para los primeros elementos de la tabla de Mendeléiev.

El átomo de hidrógeno ya lo hemos estudiado. ¿Qué da un haz de átomos de helio? El haz no se desintegra. Así debía ser; en este átomo hay dos electrones en el estado $2s$; el principio de Pauli condiciona que sus espines tengan direcciones opuestas y, por lo tanto, también las tengan los momentos magnéticos; el momento magnético total es nulo.

En el átomo de litio el momento magnético debe determinarse por el tercer electrón, puesto que los dos primeros, que se hallan en el estado $1s$, compensan entre sí la acción de sus espines. El tercer electrón del litio se encuentra en el estado $2s$. Por esto, lo mismo que en el caso del hidrógeno, el momento magnético sólo puede ser determinado por el espín. La desintegración del haz de átomos de litio en dos componentes confirma estos razonamientos. Lo mismo que en el hidrógeno, una componente corresponde a la proyección del espín $+1/2$, y la otra, a la proyección del espín $-1/2$.

En el átomo de berilio hay cuatro electrones, dos en el estado $1s$ y dos en el estado $2s$. Cada par de electrones tiene espines opuestos que al compensarse dan un momento total nulo. Por esta razón el haz de átomos de berilio no se desintegra en componentes.

El haz de átomos de boro, por el contrario, se divide en cuatro componentes. ¿De dónde provienen? Está claro que el momento magnético es creado únicamente por el quinto electrón, que se encuentra en el estado $2p$; este estado puede realizarse con tres valores del número cuántico magnético: +1, 0, —1. Por lo tanto, el momento magnético orbital puede tener tres valores, incluido el nulo. Con estos valores se compone el momento magnético de espín. ¿Cómo se componen? La fig. 219 muestra todas las posiciones mutuas posibles de los momentos. Vemos que son posibles cuatro combinaciones, cuyos impulsos de rotación son 3/2, 1/2, —1/2 y —3/2 (en unidades $h/(2\pi)$ esta indicación no se hace de ordinario).

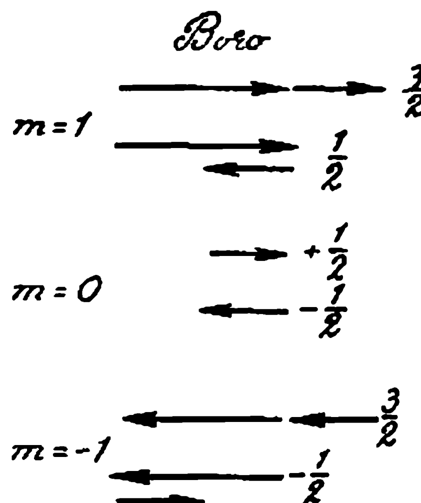


FIG. 219.

Aún más rica será la desintegración del haz de átomos de carbono: siete rayas, incluyendo la no desviada, con valores del impulso de rotación iguales a 3, 2, 1, 0, —1, —2, —3.

§ 192. *Ley periódica de Mendeléiev*

A la luz de los datos acerca de la estructura electrónica de los átomos se comprenden claramente las regularidades del sistema periódico de Mendeléiev.

Las reglas fundamentales de la distribución de los electrones en el átomo, según los números cuánticos, se deducen del principio de Pauli. Sin embargo, si nos guiásemos únicamente por estos datos, le atribuiríamos correctamente los números cuánticos sólo a los primeros dieciocho átomos (hasta el argón). La cuestión está en lo siguiente. Los electrones llenan el átomo en el orden de seguimiento de las energías del estado. En el átomo de hidrógeno los niveles de energía son degenerados, la energía viene determinada por un solo número cuántico. En los átomos con varios electrones, en virtud de la interacción, se elimina la degeneración y la energía del electrón en el átomo depende de todos los números cuánticos. En el átomo de hidrógeno está claro que si el electrón se encuentra en el nivel para el que $n=3$, su energía será menor que si se halla en

el nivel con $n=4$. Pero en un átomo multielectrónico, cuando el número cuántico secundario tiene valores grandes, este planteamiento no es único. Por esto en una serie de casos el orden «natural» de la marcha de los números cuánticos no está de acuerdo con el orden de ocupación del átomo por los electrones.

Dentro del átomo, los electrones se suelen dividir en capas, es decir, en conjuntos de niveles con distintos números cuánticos principales. Las capas se designan generalmente por letras latinas mayúsculas (en orden de seguimiento de los números cuánticos n):

$$K, L, M, N, \ldots$$

La envoltura electrónica del átomo se caracteriza en lo fundamental por la distribución de los electrones según los números cuánticos (por capas). Esta distribución la definen las fórmulas que indican (por el índice) la cantidad de electrones que tienen tal o cual valor del número cuántico principal (n) y del secundario (l). Por ejemplo:

el silicio — $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$;

el calcio — $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$.

Para hacerse una idea del grado de ocupación de los niveles hay que recordar los números máximos s, p, d, f, ... de electrones: 2, 6, 10, 14, ... (que se obtienen por la fórmula $2(2l+1)$).

Retornemos a la tabla de Mendeléiev e interesémonos por aquellos puntos en que tienen lugar alteraciones del orden de distribución de los electrones según los números cuánticos. La primera de estas alteraciones ocurre en el potasio. Su último electrón no entra en el nivel $3d$, sino en el $4s$. El elemento siguiente, el calcio, también recibe el electrón en el nivel $4s$, y a partir del elemento 21°, el escandio, se completa el nivel $3d$. En el cromo (elemento 24° de la tabla) aparece una nueva anomalía. El número de electrones es ahora otro y el orden de distribución de los niveles cuánticos por energías ha cambiado. El alojamiento de dos electrones en el nivel $4s$ se hace desfavorable desde el punto de vista energético y el cromo toma la estructura $3s^2\ 3p^6\ 3d^5\ 4s$.

No hay necesidad de seguir describiendo otras anomalías semejantes. La estructura electrónica de todos los átomos puede encontrarse en cualquier manual de física o química. Lo importante es esto: la distribución de los electrones por números cuánticos, determinada por procedimientos de investigación puramente físicos (análisis espectral, medida de los momentos magnéticos), ayuda a comprender las propiedades químicas de los átomos.

§ 193. Potenciales de ionización

Uno de los procedimientos de estudio de la estructura electrónica del átomo es la medición de la energía de ionización, es decir, de la energía que hay que gastar para arrancar un electrón del átomo. Como la energía del electrón en el átomo es negativa y se cuenta desde cero, que corresponde al desprendimiento del electrón del átomo, la energía de ionización es al mismo tiempo la energía del nivel que ocupa el electrón en el átomo. Esta energía se suele referir a la carga del electrón y se expresa en voltios. Por ejemplo, se dice: el potencial de ionización del átomo de hidrógeno es igual a 13,53 V; esto quiere decir que para liberar al electrón hay que realizar un trabajo igual al que se necesitaría para trasladar el electrón entre dos puntos cuya diferencia de potencial fuera de 13, 53 V (el sentido de esta cifra se muestra en la fig. 214).

Si se trata de un átomo multielectrónico, se puede hallar una serie de potenciales de ionización que caracterizan los niveles de los electrones primero, segundo, tercero, etc., contando desde la posición que ocupa el electrón menos ligado. En este sentido se habla de primer potencial de ionización; segundo potencial de ionización, etc. del átomo de que se trate.

Existen muchos métodos de medición de los potenciales de ionización. Para medirlos se sitúan los gases o vapores en un campo eléctrico. El flujo de electrones que emite un filamento que se caldea, ioniza el gas. Mientras la energía del electrón primario es insuficiente para arrancar el electrón atómico, la corriente eléctrica que pasa a través del gas no varía. Pero en cuanto la energía de los electrones primarios se hace suficiente para arrancar electrones de los átomos del gas, en el espacio se encuentra un número considerable de iones cargados positivamente y se produce un aumento brusco de la corriente eléctrica. Aumentando paulatinamente la tensión aplicada al aparato, puede apreciarse con bastante exactitud el instante en que comienza este aumento de la corriente eléctrica. El valor crítico de la tensión da directamente la magnitud del potencial de ionización. Los valores del primer potencial de ionización de la mayoría de los elementos químicos se dan gráficamente en la fig. 220.

Salta a la vista la periodicidad de esta propiedad, que coincide totalmente con el período químico. El electrón más difícil de arrancar es el del átomo de helio, así como los átomos de todos los demás gases nobles. Precisamente esta circunstancia es la que explica su carácter inerte químicamente. Los metales monovalentes alcalinos presentan los valores más pequeños de potencial. Esto también está de acuerdo con las ideas del químico, que conoce el extraordinario poder reactivo de estas sustancias.

Los valores del primer potencial de ionización y de los sucesivos están relacionados con la valencia de los átomos. ¿Por qué son monovalentes los átomos de los elementos alcalinos? Porque un electrón (el más exterior) de los átomos de estas sustancias está ligado mucho más débilmente que los demás electrones. Los primeros potenciales del átomo de cesio tienen, por ejemplo, los siguientes valores:

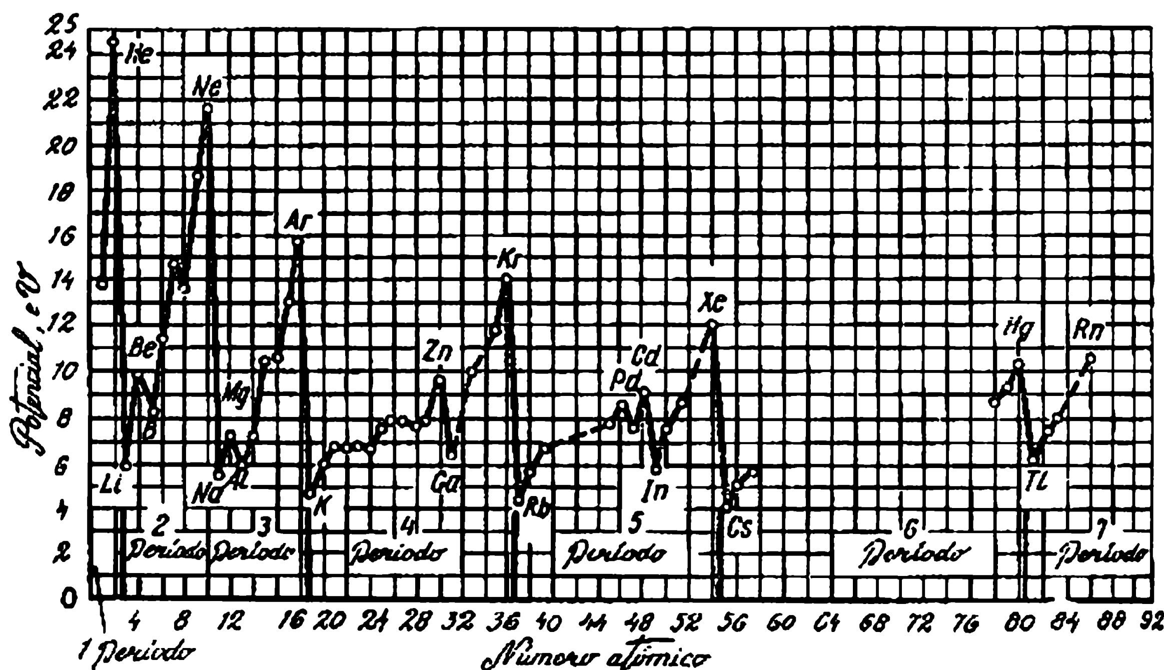


FIG. 220.

3,9; 27; 46 y 62 V. Como puede verse, es muy grande la diferencia entre la energía que hay que gastar para arrancar el primer electrón y la necesaria para arrancar los siguientes.

§ 194. *Espectros de los átomos en la región óptica*

Pueden observarse espectros atómicos de absorción y de emisión. Pero los que tienen importancia fundamental son los últimos. Los espectros atómicos de emisión en la región óptica pueden obtenerse estudiando, por medio de espectrógrafos, la radiación que crean los vapores de los cuerpos que a la temperatura normal son sólidos, o los gases.

Para que los átomos irradien hay que excitarlos, es decir, hacer que pasen del nivel energético más bajo al más alto. Al retornar el átomo al nivel de energía más bajo se produce el espectro de emisión. A cada transición le corresponderá una raya del espectro.

La excitación de los átomos se lleva a cabo por distintos medios. Uno de los procedimientos consiste en utilizar la descarga en gas. La tensión aplicada al tubo de descarga acelera las partículas cargadas que hay en el gas. Estas partículas chocan con los átomos neutros y les ceden energía. Otro procedimiento que se emplea en el análisis espectral de los metales consiste en crear un arco o hacer saltar chispas entre dos electrodos hechos con el material que se desea analizar. En la chispa y en el arco se desarrollan temperaturas bastante altas y la sustancia se vaporiza en el espacio de la descarga. La excitación de los átomos se logra gracias a las colisiones.

El espectro atómico de emisión consta de un número enorme de rayas nítidas. La frecuencia de radiación correspondiente a cada raya cumple la ecuación $h\nu_{mn}=E_m-E_n$. Por lo tanto, midiendo la frecuencia de la luz emitida podemos juzgar acerca de la diferencia entre los niveles energéticos del átomo dado. Los espectros de los átomos pueden descifrarse con bastante seguridad, es decir, hallar por los valores de las frecuencias de la radiación el cuadro de los niveles de energía. Los datos acerca de las rayas espectrales de los elementos y de sus niveles de energía se dan en los manuales.

No debe pensarse que en un espectro se encuentran las rayas correspondientes a la transición desde un nivel cualquiera a otro cualquiera. La experiencia ha demostrado (y la teoria ha fundamentado) que existen ciertas reglas de selección o de prohibición. Algunas transiciones están prohibidas y no se realizan.

Está claro que no puede decirse a qué estado de energía más bajo pasará el átomo excitado y cuál será precisamente la frecuencia de la raya espectral emitida. Pero no todas las transiciones son igualmente probables. La teoría puede en principio calcular la probabilidad del paso de un nivel a otro. La magnitud de la probabilidad define al principio la intensidad de respectiva raya espectral.

En los espectros de los átomos influyen los campos externos. Si la sustancia que irradia se halla en un campo eléctrico o magnético, una serie de rayas espectrales se desdoblan en varias componentes. La energía de un sistema que posea el momento magnético $\boldsymbol{M}$ y que se encuentre en un campo magnético exterior $\boldsymbol{H}$, viene dada por la expresión $U=-\boldsymbol{MH}$ (véase la pág. 290). Los estados con los mismos números cuánticos n y l pueden diferir entre sí por las proyecciones del momento magnético sobre la dirección del campo magnético. Por esto la superposición del campo magnético elimina la degeneración de niveles energéticos; electrones atómicos con diversos números cuánticos magnéticos tendrán distinta energía.

El estudio de los espectros atómicos de emisión en la región óptica tiene gran importancia: en él se basa el método del análisis espectral de las sustancias (especialmente de las aleaciones), que es un procedimiento muy sensible (hasta 10^{-10} g) de determinar la

composición química y que en muchos casos sustituye al análisis químico.

Las frecuencias ópticas se producen por lo general cuando el átomo se somete a una excitación relativamente débil, que hace que sus electrones periféricos, de valencia, pasen a un nivel más elevado. Sin embargo, incluso el electrón más «alto» puede crear un espectro de gran amplitud. Parece que la radiación no tiene límites por la parte de las pequeñas frecuencias. En efecto, en el cuadro de los niveles de energía (la fig. 214 representa los niveles y las transiciones para el hidrógeno, pero, en principio, es similar al cuadro que ofrecen otros átomos) vemos que cuando los valores de n son grandes, los niveles se aproximan y, por consiguiente, existen transiciones que ocasionan frecuencias tan pequeñas como se quiera y, por lo tanto, ondas largas. No obstante, la experiencia demuestra que los espectros que crean los electrones periféricos, aunque penetran sensiblemente en la región infrarroja del espectro, no producen rayas de gran longitud de onda. Esto significa, que la probabilidad de que el átomo pase a un nivel de energía cualquiera, por ejemplo, al 21°, no es grande, y que la probabilidad de la transición del nivel 21° al 20° (en cuyo caso sería emitido un fotón de pequeña frecuencia ν) es insignificante.

En cuanto a las frecuencias grandes (de las ondas más cortas), están limitadas por el potencial de ionización. Si nos referimos al electrón «más alto», el potencial mayor es el del helio, y el menor, el del cesio, respectivamente, 24 V y 4 V. Esto corresponderá a unas frecuencias de radiación de $6\ 10^{15}$ Hz ($\lambda = 500$ Å) y 10^{15} Hz ($\lambda = 3000$ Å). Por lo tanto, sólo un electrón periférico puede adelantarnos en la región de las ondas ultravioletas muy cortas, que a su vez puede llamarse región de ondas muy largas en comparación con la radiación característica de rayos X.

Está claro que si las excitaciones son grandes podrán elevarse ya a los niveles superiores los electrones que se hallan en las entrañas del átomo. En la composición del espectro característico comenzarán a figurar rayos X.

§ 195. Espectros atómicos de rayos X

En los átomos con muchos electrones los potenciales de ionización de los niveles inferiores alcanzan grandes magnitudes. Por esto, la excitación de estos átomos puede ocasionar la emisión de rayos X (de longitudes de onda del orden de 0,1—10 Å). Para provocar la emisión de rayos X hay que comunicarle al átomo una energía del orden de 10^4 eV. Este efecto puede lograrse en tubos de descarga en gas a los cuales se aplican tensiones de decenas y centenares de miles de voltios.

Puede valorarse la temperatura a que el átomo comienza a emitir frecuencias de rayos X debidas a las colisiones térmicas con otros átomos. Para que la energía cinética media correspondiente a un grado de libertad sea del orden de 10^4 eV, se necesita una temperatura del orden de 10^8 °K. Estas temperaturas tan altas se producen en las explosiones atómicas (véase la pág. 628), en el Sol y en las estrellas. La emisión de rayos X del Sol puede registrarse por medio de aparatos instalados en los satélites artificiales.

Pero el procedimiento práctico para obtener los rayos X es el bombardeo de cuerpos sólidos (anticátodo de los tubos de rayos X) por un flujo de electrones. El electrón que llega al anticátodo es frenado bruscamente y esto produce un espectro continuo de rayos X. La energía de los electrones, incrementada a espensas de la aceleración en el campo eléctrico hasta un valor $\mathscr{E}_1$, a causa del frenado disminuye hasta el valor $\mathscr{E}_2$. La diferencia de energía $\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2=h\nu$ se libera en forma de radiación. La magnitud $\mathscr{E}_2$ puede tomar cualquier valor, desde $\mathscr{E}_1$ hasta cero, de manera que las frecuencias de los rayos que se producen se encuentran entre los límites de $\nu=\mathscr{E}_1/h$ a cero. La energía de los electrones que no se transforma en radiación, se transforma en calor (en energía de rayos X sólo se transforma aproximadamente una centésima parte de la energía del haz electrónico). De lo expuesto se deduce claramente que el espectro continuo de rayos X tiene una frontera de ondas cortas:

$\lambda_{min}=\frac{c}{\nu_{max}}=\frac{hc}{eV}$. Sustituyendo los valores de las constantes, obtenemos que

$$\lambda_{min}=\frac{12,3}{V};$$

aquí λ se expresa en Å y V en kilovoltios. Así, pues, el espectro continuo de rayos X comienza en una longitud de onda rigurosamente determinada, aumenta de intensidad al aumentar la longitud de onda, alcanza el máximo al cabo de varias décimas de angstróm a partir de la frontera de ondas cortas, y luego decrece lentamente.

Las investigaciones demuestran que al espectro continuo se superponen unas rayas nítidas características de cada tipo de átomos. El espectro característico de rayos X se produce debido a que una parte de los electrones que inciden sobre el anticátodo penetran dentro de los átomos y desalojan de ellos electrones internos, es decir, electrones que se hallan en las capas K, L, etc. El cuanto X se produce cuando uno de los electrones periféricos salta al puesto inferior que quedó libre. El conjunto de rayas espectrales debidas a la transición de electrones al nivel K recibe el nombre de serie K, las debidas al paso al nivel L, serie L y así sucesivamente.

Si se aumenta gradualmente la tensión aplicada al tubo de rayos X, las series irán apareciendo sucesivamnte, ya que a medida que aumenta la energía de los electrones que inciden sobre el anticátodo, se irán liberando consecutivamente para las transiciones niveles de energía más bajos. La última que aparece es la serie K.

El esquema general de las transiciones electrónicas de rayos X se da en la fig. 221. Los puntos gruesos indican los niveles iniciales. En el esquema se incluyen las rayas más intensas. Sin embargo, ciertas transiciones se omiten de acuerdo con las reglas de prohibición. Esto se refiere, por ejemplo, a las transiciones con valores iguales del número cuántico secundario.

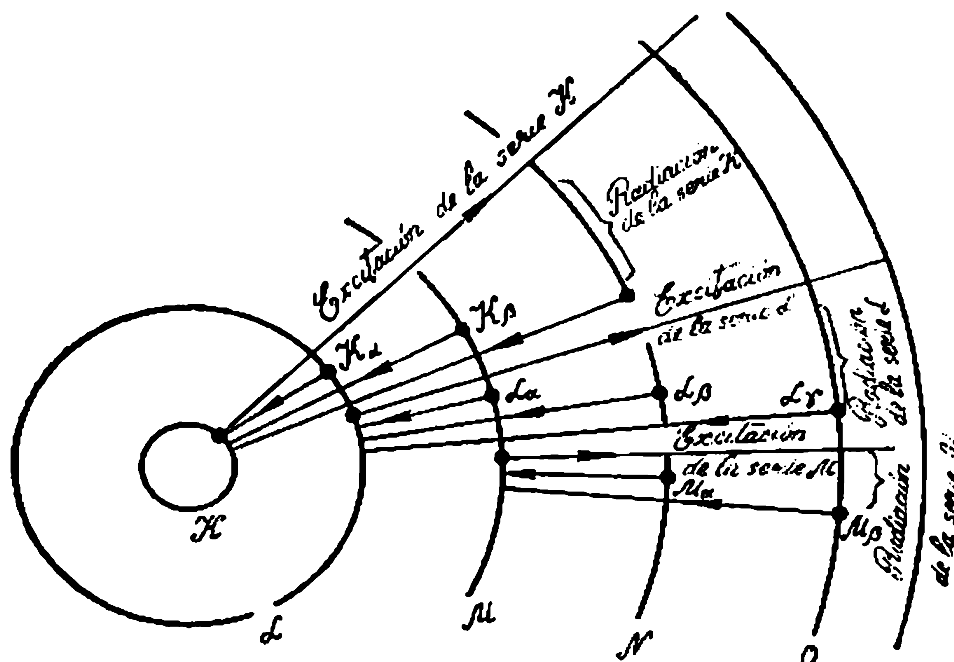


FIG. 221.

Como la estructura de los niveles inferiores ocupados es igual en todos los átomos, las figuras de los espectros de rayos X de diversos átomos se asemejan mucho entre sí. En todos los espectros existen sucesiones típicas de las rayas (desplazadas para los elementos de distinto número atómico según la escala de longitudes de onda), por ejemplo, todos los elementos producen un intenso doblete α, $K\alpha_1$ y $K\alpha_2$, y un doblete β más débil. Con bastante frecuencia estos dobletes suelen no ser resueltos, en cuyo caso se mencionan las rayas α y β de la serie K del elemento dado. Estos dobletes son de naturaleza «espinorial».

La fig. 222 representa el desplazamiento sistemático del espectro característico en la región de ondas cortas a medida que anuenta

el número atómico del elemento que produce el espectro. Esta es una ley descubierta por H. G. J. Moseley. El fundamento físico de esta ley es el aumento sucesivo de la fuerza de interacción del electrón con el núcleo al ir incrementándose la carga del núcleo.

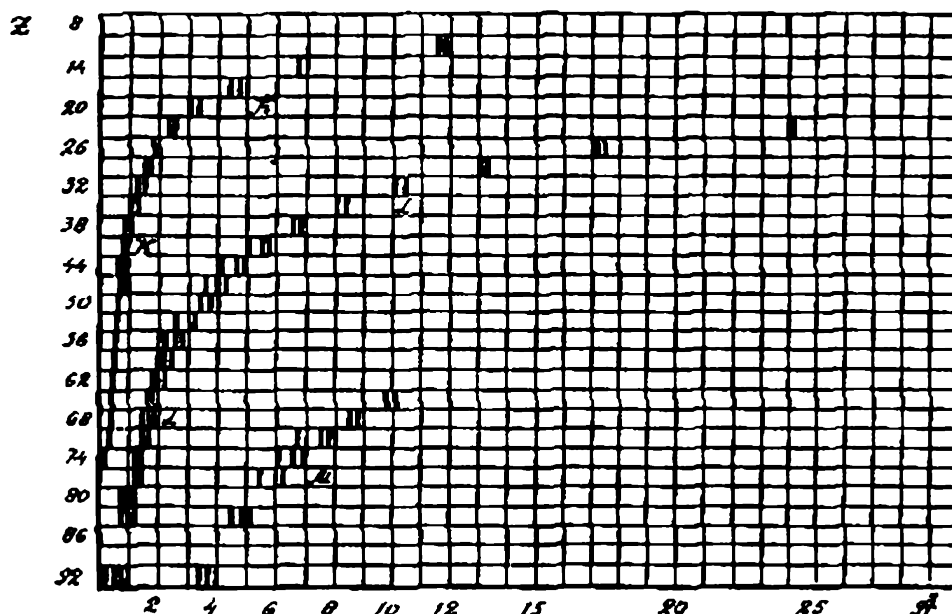


FIG. 222.

La fórmula de esta ley no vamos a darla. El carácter riguroso de la ley del desplazamiento de las rayas se ve perfectamente en la figura.

29

MOLÉCULA

§ 196. Enlace químico

Una molécula es una estructura estable de átomos. Cada átomo de una molécula ocupa en ella una posición estable. El desplazamiento de un átomo en cualquier sentido ocasiona un aumento de la energía potencial de la molécula. La aproximación de un átomo a sus vecinos provoca fuerzas de repulsión, el alejamiento, fuerzas de atracción. Cada átomo de la molécula, y la molécula en su conjunto, se halla en un pozo de potencial.

El carácter de la curva de potencial de cualquier átomo de una molécula es bastante evidente (fig. 223). Como es imposible acercar los átomos hasta una distancia nula, la curva de la energía potencial, en función de la distancia del átomo a sus vecinos, sube con mucha inclinación cuando las distancias son pequeñas. Hacia la parte del aumento de las distancias, la curva, desde la posición de equilibrio (fondo del pozo), va mucho más despacio. Luego son posibles algunas variantes: la energía potencial, a grandes distancias, puede ser menor o mayor que en el fondo del pozo, y este último puede tener un borde bien definido o no tenerlo. La energía de la molécula puede ser mayor y menor que la suma de las energías de los átomos tomados por separado (partes de la molécula). En dependencia de esto, cuando los átomos se unen para formar una molécula puede desprenderse calor o ser absorbido (véase el § 215).

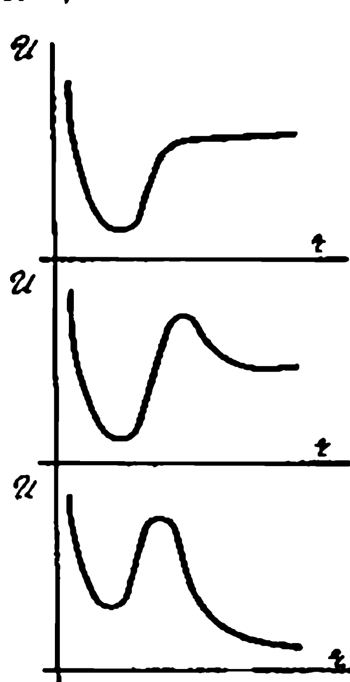


FIG. 223.

El átomo que se halla en el pozo de potencial está ligado a sus vecinos. ¿A qué se debe esta ligadura? ¿Existen acaso distintos tipos de ligaduras? Pueden producirse dos esquemas ideales de enlace químico: *iónico* y *homopolar*. En la inmensa mayoría de los casos que interesan a la química existe uno de estos tipos de ligadura o un caso intermedio en el que coexisten ambos esquemas ideales.

Si un átomo es capaz de cederle a otro uno o varios electrones, entre los iones recién formados se produce una atracción eléctrica. Esta es la ligadura o enlace iónico. Las fuerzas de atracción electrostática se equilibran con la repulsión de las capas electrónicas de los átomos a cierta distancia interatómica característica de este par de átomos.

Para que un átomo le ceda a otro sus electrones hace falta que este proceso sea de por sí conveniente desde el punto de vista energético. En este caso la simple tendencia a pasar a un nivel energético más bajo será la causa de la transmisión del electrón.

El desprendimiento de un electrón de un átomo neutro requiere siempre un gasto de energía, igual, como sabemos (véase la pág. 531), al producto de la carga del electrón por el potencial de ionización. Por consiguiente, la formación de un ion positivo va siempre ligada a un gasto de trabajo. Por el contrario, la formación de un ion negativo, es decir, la unión de un electrón a un átomo neutro, puede ir acompañada de desprendimiento de energía. Aunque esto

sólo se refiere al primer electrón. La unión de un segundo electrón a un átomo monoionizado negativo, debido a la repulsión eléctrica, exige un gasto de trabajo.

Para que la ligadura iónica se efectúe, es necesario que la energía de desprendimiento del electrón, es decir, el trabajo de creación del ion positivo, sea menor que la suma de la energía que se desprende al formarse los iones negativos y la energía de la atracción eléctrica de los iones que se produce.

El menor potencial de ionización lo poseen los metales alcalinos, en los cuales el último electrón comienza a ocupar una nueva capa. En los metales alcalinotérreos hay dos electrones ligados con el resto del átomo más débilmente que los demás. Es evidente que la formación de un ion positivo a partir de un átomo neutro requiere un trabajo mínimo en el caso en que se trate de arrancar los electrones de una capa electrónica que comience a ser ocupada.

Por otra parte resulta que la cantidad máxima de energía se desprende cuando se une un electrón a los átomos de los halógenos, que necesitan dicho electrón para completar una capa. Por esto, en gran número de casos, la ligadura iónica se origina cuando la transmisión de electrones hace que en los iones que se forman se creen las capas electrónicas completas características de los átomos de los gases nobles. De esta forma se explica perfectamente el sentido físico de los pozos de potencial que existen en las moléculas como el $ClNa$ o el Cl_2Mg.

Sin embargo, está claro que esta explicación no puede tener un carácter universal. Esto se deduce evidentemente de hechos como la existencia de moléculas diatómicas de hidrógeno, oxígeno, etc. Es imposible suponer que, al producirse el enlace, uno de los átomos se transforma en ion negativo y el otro en ion positivo. En este caso huelgan los argumentos teóricos. Las propiedades físicas de las moléculas constituidas por iones revelan inmediatamente cuando puede hablarse de ligadura iónica y cuando no. Concretamente, las uniones iónicas se disocian y forman electrólitros. Una clase numerosísima de moléculas orgánicas no siguen este comportamiento. Este hecho ya es suficiente para evidenciar que el modelo iónico es inaplicable a estas sustancias.

¿Cómo puede explicarse entonces el enlace entre los átomos? Habrá que investigar si existe alguna ventaja en energía cuando, por ejemplo, se unen en una molécula dos átomos de hidrógeno.

Esta ventaja existe, y la mecánica cuántica señala las condiciones en que se produce. Como se dijo en la pág. 529, el comportamiento del electrón del átomo de hidrógeno, en rasgos generales, coincide con el comportamiento de un electrón en una caja de potencial. El nivel de energía, en el punto cero, del electrón en la caja de potencial viene determinado por las dimensiones de dicha caja

(véase la pág. 524), siendo tanto mayor cuanto menor sea la dimensión de la caja. De este modo, cualquier ampliación del espacio en que el electrón puede moverse ocasiona una disminución de la energía.

Figurémonos ahora que dos átomos de hidrógeno se ponen en contacto. Cada uno de ellos tiene un electrón. Como el principio de Pauli permite que dos electrones se encuentren en un mismo estado, no hay inconveniente en que se fundan las regiones de existencia de los electrones y en que, de este modo, se aumenten las dimensiones de la caja de potencial. Esto sólo es posible cuando los electrones tienen espines inversos.

Supongamos que a la molécula así formada se aproxima un tercer átomo. Los argumentos antes utilizados ya no sirven. El tercer electrón ya no puede unir su región de existencia a la región en que se mueven los electrones de la molécula de hidrógeno, porque a esto se opone el principio de Pauli, ya que en la molécula de hidrógeno están ocupados los dos puestos disponibles por dos electrones con espines contrarios.

Así, pues, el segundo tipo de ligadura, llamado homopolar, se mantiene por un par de electrones con espines contrarios. Si en el enlace iónico se trataba de la transmisión de electrones de un átomo a otro, aquí se efectuará la ligadura generalizando los electrones, es decir, creando así como un espacio común para su movimiento. El ensanchamiento del espacio en que el electrón puede moverse ocasiona una disminución de la energía y explica, por lo tanto, la formación del pozo de potencial.

La formación de moléculas por la unión de nubes electrónicas de electrones con espines contrarios es el tipo fundamental de ligadura que tiene lugar en las moléculas orgánicas.

Cada átomo es capaz de formar un número limitado de enlaces homopolares, con la particularidad de que en la creación de cada ligadura interviene un par de electrones con espines opuestos, cuyo «espacio vital» tiene la forma de las nubes solapadas de sus funciones de onda.

Como sabemos, los electrones *s* tienen funciones ψ de simetría esférica, pero los electrones *p*, *d* y *f* poseen funciones ψ alargadas en determinadas direcciones. De aquí se deduce que una ligadura homopolar formada por todos los electrones, menos los *s*, será un enlace orientado. Si entre dos átomos se produce un enlace de este tipo, las nubes electrónicas de estos átomos se situarán de un modo perfectamente determinado con relación a la primera línea de enlace. Por consiguiente, las líneas de enlace procedentes de unos mismos átomos sólo pueden formar determinados ángulos entre sí. La mecánica cuántica puede deducir los valores de estos ángulos normales de ligadura para todos los átomos.

Los dos esquemas de ligadura que hemos expuesto son ideales hasta cierto punto. En la mayoría de los casos nos encontraremos con que las propiedades físicas y químicas de las moléculas nos conducen a la necesidad de admitir un mecanismo de enlace intermedio. Si en el enlace iónico un electrón es transferido por un átomo a otro y en el enlace homopolar cada electrón pertenece por igual a los dos átomos enlazados, en los casos intermedios los electrones que efectúan la ligadura pueden permanecer más tiempo juntos a un átomo que junto al otro. Este modelo permite, por ejemplo, la existencia de un enlace iónico en el cual los electrones de enlace pertenecen la mayoría del tiempo al ion negativo, o, por ejemplo, un enlace homopolar en el que los electrones de enlace permanecen casi el mismo tiempo junto a los dos átomos enlazados. Son posibles todos los enlaces intermedios, cualquiera que sea su porcentaje «iónico».

§ 197. *Geometría de las moléculas*

Se ha recopilado un material abundantísimo sobre los valores de las distancias entre los centros de los átomos en las moléculas y en los cristales. La mayor parte de este material ha sido obtenida por los métodos de difracción. Si no se pretende alcanzar una exactitud muy grande, resulta posible representar las moléculas por medio de modelos que dan una idea acerca de la forma y de las dimensiones de aquéllos.

Son simples en particular los modelos de las moléculas del tipo del ClNa, en los cuales los átomos están unidos por enlace iónico. Cada ion puede representarse por medio de una esfera de radio determinado. Una idea acerca de las dimensiones de los iones la da la tabla siguiente:

Ion	Li^+	Na^+	K^+	Cs^+	F^-	Cl^-	Br^-	I^-
Radio iónico, Å	0,60	0,95	1,33	1,69	1,36	1,81	1,95	2,16

Valiéndose de una tabla de este tipo pueden hallarse las distancias entre los centros de los iones en cualquier sal; por ejemplo, la distancia en el ClNa es igual a 0,95+1,81=2,76 Å.

No obstante, ¿qué sentido se le da a la afirmación de que, el ion puede representarse por medio de una esfera? Para justificar esta representación hay que esclarecer hasta qué punto puede acercarse a una molécula, por ejemplo, de ClNa, otro ion de sodio

(o de cloro). Esto puede conocerse, ya que, según demuestra la experiencia, tanto las sales sólidas como las fundidas están constituidas por iones. Resulta que los iones segundo y tercero se acercan al ion dado hasta la misma distancia que el primero. Es más, los iones con cargas de igual signo también pueden acercarse el uno al otro a una distancia igual a la suma de los radios iónicos. En efecto, los iones se comportan como esferas.

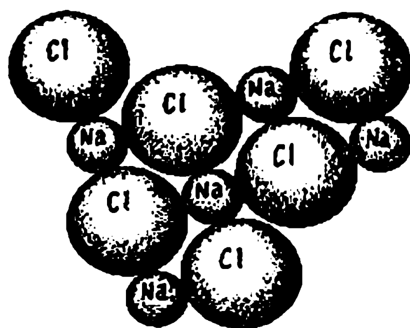


FIG. 224.

De estos hechos de carácter geométrico se saca una importante conclusión referente a las moléculas iónicas. Supongamos que a una molécula se acerca, hasta ponerse en contacto con ella, un grupo de moléculas. Se crea la disposición de iones que muestra la fig. 224. Si las distancias interatómicas son completamente iguales, será imposible decir con cuál de los átomos vecinos de cloro forma la molécula un ion de sodio dado y, viceversa, qué ion de sodio debe considerar como pareja suya el ion de cloro dado. El concepto de moléculas pierde su sentido.

De este modo, la forma en que están dispuestos los centros de los átomos nos lleva a sacar la conclusión siguiente: en el estado condensado (es decir, en estado líquido o sólido) donde los átomos están unidos por enlace iónico, las moléculas, como formaciones individuales, no existen. El concepto de molécula resulta ser inaplicable.

¿Y qué ocurre en la fase gaseosa? Durante la vaporización, del líquido se desprende con mayor facilidad el par formado por iones con cargas de signos distintos, que en su conjunto no es portador de carga eléctrica. Por esto lo primero que hallamos en el vapor son moléculas del tipo ClNa. Pero al mismo tiempo que las moléculas, se evaporan del líquido iones de tipos distintos.

En las moléculas con enlace homopolar (covalente) el problema se plantea de una forma completamente diferente. Analizando las distancias interatómicas que se observan en las moléculas, llegamos a la conclusión de que es posible calcular las distancias entre los centros de los átomos valiéndose de los llamados radios atómicos. Sus valores (en angstrom), para los átomos más frecuentes son:

C—	C=	C≡	H—	O—	O=	O≡
0,771	0,665	0,602	0,30	0,66	0,55	0,50

Los radios atómicos disminuyen a medida que aumenta la multiplicidad del enlace de valencia. Por esta tabla vemos que la distan-

cia entre dos átomos de carbono enlazados, C—C, es de 1,54 Å, la distancia C — H es igual a 1,07 Å y así sucesivamente.

Al crear los modelos de las moléculas poseemos también ciertos conocimientos elementales acerca de los ángulos de valencia. Podemos referirnos a los ángulos de valencia normales, cuyo origen se explica por razones de simetría y está de acuerdo con ciertos razonamientos cualitativos de la mecánica cuántica, como dijimos en el párrafo precedente. Así, los ángulos normales de un átomo de carbono, enlazado por cuatro ángulos, son ángulos tetraédricos de 109°28'; para el átomo aromático del carbono, así como para otros átomos de este mismo elemento enlazados con tres átomos, el ángulo normal de valencia es de 120°. Finalmente, para el átomo de carbono enlazado con dos átomos, el ángulo de valencia característico es de 180°. Los ángulos de valencia normales de los átomos de oxígeno, azufre y nitrógeno, enlazados con dos y, en el caso del nitrógeno, con tres átomos, es de 90°. El átomo de nitrógeno del nitrosilo (NO_2) tiene ángulos de valencia normales iguales a 120°.

En una serie de casos los ángulos de valencia difieren considerablemente de la «norma». En una serie de compuestos cíclicos del tipo del ciclobutano, en vez de ángulos de 109°28', se tienen ángulos de 90°. Las desviaciones considerables de los ángulos de valencia, respecto de sus valores normales, se deben a impedimentos espaciales. Pero antes de explicar esta última circunstancia es necesario detenerse en una tercera característica geométrica de la molécula: el radio intermolecular.

El estudio de la disposición de las moléculas en los cristales ha demostrado que a cada átomo se le puede atribuir su radio intermolecular, es decir, aquel con el cual, en promedio y con suficiente exactitud, las moléculas vecinas estarán en contacto. Así, por ejemplo, el radio intermolecular del hidrógeno es igual a 1,17 Å, el del oxígeno, 1,36 Å, el del nitrógeno, 1,57 Å, etc. Esto no significa, sin embargo, que las distancias entre los átomos de una misma molécula no sujetos a enlace de valencia sean determinadas por estas cifras. La cuestión consiste en que las dimensiones y la forma de las moléculas se determinan por la interacción de las fuerzas que establecen las distancias de equilibrio entre los átomos no sujetos a enlace de valencia y los ángulos de valencia normales. En este caso las fuerzas del enlace entre los átomos son de un orden de magnitudes superiores, por lo que las distancias interatómicas no varían y la configuración de las moléculas se determina por la competencia de la elasticidad del ángulo de valencia con la compresibilidad de la esfera intermolecular del átomo.

Pondremos un ejemplo simple, pero comprensible. El ángulo de valencia en la molécula de agua es igual, como demuestra la experiencia, a 105°. La distancia entre los átomos de hidrógeno es de

1,54 Å. Por consiguiente, tiene lugar una considerable compresión de las esferas intermoleculares de los átomos de hidrógeno, igual a 2·1,17—1,54=0,8 Å. Esta compresión se equilibra con la elasticidad del ángulo de valencia, cuyo valor normal es igual a 90°. Por lo tanto, las fuerzas que comprimen los átomos de hidrógeno en 0,8 Å son iguales a las fuerzas que cambian el ángulo desde 90° hasta 105°. La confirmación de estos sencillos razonamientos la encontramos comparando la estructura de las moléculas de agua con la estructura de las moléculas de ácido sulfúrico. Como la longitud del enlace hidrógeno-azufre es mucho mayor que la del enlace hidrógeno—oxígeno, los átomos de hidrógeno de la molécula de ácido sulfúrico están mucho menos «apretados». La distancia entre los átomos de hidrógeno resulta ser igual a 1,99 Å y el ángulo de valencia, 92°. La compresión de los átomos de hidrógeno en 0,35 Å es equilibrada por una variación del ángulo de sólo 2°. Hechos análogos pueden demostrarse en una enorme cantidad de ejemplos de moléculas orgánicas.

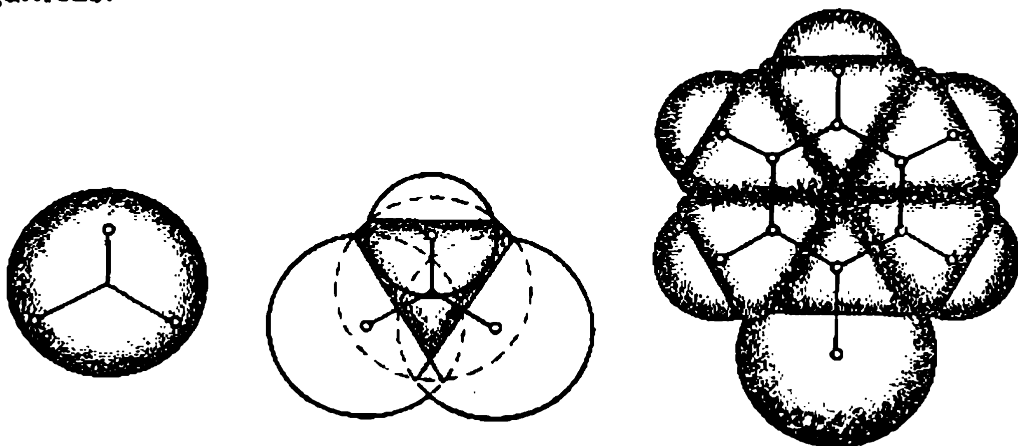


FIG. 225.

La fig. 225 reproduce la construcción del modelo de la molécula de clorobenceno. A la izquierda se ve el átomo de hidrógeno, en el centro, el comienzo de la construcción —grupo

```
  H
  |
  C  —
 / \
C   C
```

— y a la derecha, el modelo de la molécula.

§ 198. *Capa electrónica de la molécula*

El movimiento de los electrones en la molécula, lo mismo que en el átomo, se caracteriza por una función de onda. Como en la molécula hay muchos electrones, la función ψ, hablando en rigor,

deberá ser función de las $3n$ coordenadas de los n electrones. En este caso ψ^2 dará la probabilidad de cualquier distribución de los electrones, es decir, la «densidad electrónica».

Ya hemos hablado de las dificultades que ofrece la resolución de la ecuación de Schrödinger de los átomos con muchos electrones. Está claro que, al pasar a la molécula, las dificultades sólo pueden aumentar. Aquí únicamente son posibles los métodos de cálculo semiempíricos aproximados. Debido a esto adquieren una importancia especial los métodos físicos de determinación de la densidad electrónica. Sin embargo, no es mucho a lo que puede aspirarse aquí.

Por el método del análisis estructural por difracción de rayos X se determina la densidad electrónica media, en tiempo, de la molécula (el valor de la densidad electrónica da la posibilidad de que los electrones se encuentren en un punto dado). Como los átomos oscilan dentro de las moléculas y las moléculas oscilan como un todo único, el cuadro de la capa electrónica resulta borroso. En la fig. 167 (pág. 414) se representa la sección de la densidad electrónica de una molécula de antraceno. La inexactitud del método se aprecia ya por el hecho de que los átomos de hidrógeno de la molécula no se revelan en todos los casos. Esta figura ha sido construida por el mismo procedimiento que se suele utilizar en el levantamiento de mapas geográficos. Las líneas de igual densidad electrónica contornean las cumbres y los valles electrónicos. Cada átomo se determina por un «monte» de densidad electrónica. A lo largo de la línea de enlace, las funciones acampanadas de las densidades de los átomos se superponen y originan un «puente» que une a dichos átomos. Es de lamentar que la exactitud de este método sea demasiado pequeña para poder descubrir las peculiaridades del enlace químico midiendo la altura de este puente. Su altura no se distingue de la suma de las funciones de densidad de dos átomos libres. No obstante, el carácter específico del enlace químico deberá ponerse de manifiesto, probablemente, en un incremento adicional (con respecto a los átomos libres) de la densidad electrónica. Las representaciones de este tipo de la capa electrónica son simplemente una bonita ilustración de la estructura de las moléculas.

Si conociéramos la densidad electrónica con respecto a los núcleos atómicos de la molécula, tendríamos la posibilidad de calcular el momento dipolar de esta última. En efecto, para esto hay que hallar los centros de «gravedad» de las cargas positiva y negativa. Hasta ahora no se ha determinado el momento de dipolo por este procedimiento, a pesar de que comparando los datos proporcionados por la neutronografía (los neutrones se dispersan en los núcleos) y por la difracción de rayos X se podría resolver este problema. Pero el momento dipolar de las moléculas se mide experimentalmente

con seguridad (véase el § 259), y valiéndose de él puede hallarse el centro de «gravedad» de la carga negativa.

Podría pensarse que en las moléculas iónicas puras nos encontramos con el caso límite en que el centro de gravedad de la nube electrónica coincide con el centro del anión. En este caso podríamos predecir, por ejemplo, el momento dipolar del ClK del modo siguiente. Si del potasio se toma un electrón y se le da al cloro, como resultado de esto una carga positiva «excedente» se encuentra separada de una carga negativa «excedente» por la distancia entre los centros del potasio y del cloro, es decir, $1{,}81+1{,}33=3{,}14$ Å. De donde el momento del dipolo será igual a $3{,}14 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-18}=15$ u. CGS. La experiencia da 6,8 u. CGS. Por lo tanto, incluso en un caso tan clásico de enlace iónico, el electrón del potasio no pasa completamente al anión. Sin embargo, los casos extremos inversos se efectúan con toda rigurosidad. Es evidente que las moléculas simétricas, por ejemplo, de H_2, O_2, benceno, etc., no pueden poseer momento dipolar: los centros de gravedad, de la nube electrónica y de los núcleos, coinciden.

Hay que recordar otra propiedad de la nube electrónica: su capacidad para desplazarse con respecto a la parte central constituida por los núcleos. La nube electrónica puede desplazarse con respecto a los núcleos por la acción de un campo eléctrico. En este caso, como los núcleos son mucho más pesados que los electrones, puede considerarse que los núcleos permanecen en su puesto. El desplazamiento de la nube electrónica de una molécula puede caracterizarse por la desviación de su centro de gravedad. Si el número de electrones de la molécula es N, al desplazarse a una distancia x el centro de gravedad de las cargas negativas con respecto al centro de gravedad de las cargas positivas, la molécula adquiere un momento dipolar inducido $p=Nex$. El momento dipolar inducido crece linealmente con el campo, $p=\beta E$. Se acostumbra caracterizar la desviación del centro de gravedad de la nube electrónica por la magnitud de la polarizabilidad de la molécula β. Esta magnitud β tiene dimensión de volumen. Su valor es tanto mayor cuanto mayor es el volumen de la molécula (para más detalles, véase el cap. 35).

§ 199. Niveles energéticos de las moléculas

La variación de la energía del átomo se produce por un procedimiento único: por el cambio del carácter del movimiento del electrón, por el paso del electrón a otro estado cuántico. Este procedimiento de variación de la energía se conserva también en las moléculas. Pero además hay otras posibilidades de variar la energía de la molécula. Los átomos de una molécula pueden oscilar unos

con respecto a otros; una componente de la energía de la molécula es la energía de las oscilaciones. Esta energía también puede tomar únicamente una serie de valores discretos. Por otra parte, la molécula gira como un todo único; la energía de la rotación de la molécula también se cuantifica, y las variaciones del estado de la molécula pueden consistir en variaciones de su energía de rotación. Por lo tanto, el estado energético de una molécula puede caracterizarse indicando el estado de su capa electrónica (nivel electrónico), el estado del movimiento oscilatorio (nivel vibracional) y el estado de rotación (nivel rotacional). Hay que operar pues, con tres tipos de datos, como si dijéramos, con el número de la casa, con el del piso y con el del apartamento.



FIG. 226.

¿Pero qué es lo que desempeña el papel de piso y de apartamento? ¿Qué niveles energéticos están separados por grandes intervalos y cuáles por pequeños? La experiencia y la teoría responden a esta pregunta con el esquema de los niveles representado en la fig. 226. Se muestran dos niveles electrónicos e' y e'' con sus niveles de vibración subordinados, que se distinguen con los números v. A cada nivel de vibración están subordinados a su vez los niveles de rotación, que se indican con los números j.

Está claro que los intervalos entre los niveles de rotación son menores que los que existen entre los de vibración. Las diferencias de energía más grandes son las que hay entre los niveles electrónicos.

Supongamos que la molécula puede tener los niveles electrónicos correspondientes a 100, 200, 300,... unidades de energía, los niveles de vibración correspondientes a 10, 20, 30.... unidades,

y los de rotación correspondientes a 1, 2, 3, ... unidades; en este caso, si la molécula se encuentra en el segundo nivel electrónico, en el primero de vibración y en el tercero de rotación tendrá una energía de 213 unidades.

Así, pues, la energía de una molécula puede darse de la forma *)

$$W = W_{el} + W_{v} + W_{r}.$$

La frecuencia de la luz emitida o absorbida corresponderá siempre a la diferencia de dos niveles, es decir,

$$\nu = \frac{1}{h}(\Delta W_{el} + \Delta W_{v} + \Delta W_{r}).$$

Quisiéramos destacar aquellas transiciones en las cuales sólo varía un «tipo» de energía. En la practica esto sólo es posible en las transiciones de rotación, y el porqué se comprenderá fácilmente.

Comencemos analizando la absorción de las ondas electromagnéticas por un grupo de moléculas. Empecemos por las ondas más largas, es decir, por pequeñas porciones de energía $h\nu$. Hasta que la magnitud del cuanto de energía no se haga igual a la distancia entre los dos niveles más próximos, la molécula no lo absorberá. Aumentando paulatinamente la frecuencia, llegaremos a unos cuantos capaces de elevar la molécula desde un nivel «rotacional» a otro. Esto ocurre, como demuestra la experiencia, en la región de las microondas (extremo de la gama radioeléctrica) o, dicho de otra forma, en la región del espectro infrarrojo lejano. Las longitudes de onda del orden de 0,1—1 mm serán absorbidas por las moléculas. Se produce un espectro de rotación puro.

Si continuamos aumentando la frecuencia daremos la posibilidad de que el espectro de rotación se manifieste mejor, pero fenómenos nuevos sólo se producirán cuando dirijamos a la sustancia una radiación que posea cuantos de energía suficientes para hacer que la molécula pase de un nivel de vibración a otro. No obstante, está claro que nunca obtendremos un espectro de vibración puro, es decir, una serie de transiciones tal, que el número del nivel de rotación se conserve. Al contrario, las transiciones desde un nivel de vibración a otro afectarán a diversos niveles de rotación. Por ejemplo, la transición desde el nivel de vibración del punto cero (el más bajo) hasta el primero, se efectúa por moléculas que están en el cuarto nivel de rotación y pasan al tercero, o que están en el tercero y pasan al segundo, etc. De este modo aparece un espectro de vibración-rotación. Este espectro se observará en la luz infrarroja (3—50 μm). Es indudable que todas las transiciones de un

*) De otra componente de la energía de la molécula, y de la absorción de energía relacionada con ella, se trata en el § 211.

nivel de vibración a otro estarán próximas entre sí y darán en el espectro un grupo de rayas muy próximas. Cuando el poder separador es pequeño, estas rayas se unen en una banda. Cada banda corresponde a una transición vibracional determinada.

Prosiguiendo el aumento de la frecuencia llegamos en fin de cuentas a una nueva región espectral característica de la molécula. Esto ocurre en la parte visible y ultravioleta del espectro, cuando la energía del cuanto se hace suficiente para que la molécula pase de un nivel electrónico a otro. Como es natural, aquí tampoco son posibles las transiciones electrónicas ni electrónico-vibracionales puros. Se producen transiciones electrónico-rotacionales en las cuales el paso energético va acompañado de un cambio de «casa», de «piso» y de «apartamento». Como quiera que la transición de vibración-rotación representa de por sí una banda, el espectro en la región visible será de bandas, es decir, estará constituido por un sistema de bandas.

Pasemos ahora a considerar detalladamente los diversos tipos de espectros moleculares.

§ 200. Espectro de rotación de las moléculas

La rotación libre de las moléculas sólo ocurre en el estado gaseoso. Por esta razón los datos fundamentales acerca de los niveles energéticos de rotación se han obtenido estudiando los espectros de los gases. La investigación de estos espectros por los métodos ópticos es muy difícil. La metódica de la radioscopia, desarrollada en los últimos años, es mucho más apropiada para este fin. Un generador de ondas electromagnéticas envía la emisión a través de un guía de ondas *), una parte del cual está llena del gas que se analiza. Después de pasar por el gas, las ondas electromagnéticas llegan a un receptor en el cual se miden sus intensidades. Estas medidas pueden hacerse para un gran intervalo de frecuencias. La posibilidad de generar por métodos radioeléctricos una estrecha banda de frecuencias es tan grande, que el poder separador de estos métodos resulta ser centenares de millares de veces más elevado (!) que el de los métodos ópticos. Si los métodos ópticos permiten separar rayas que disten 0,1 cm^{-1}, los métodos radioeléctricos dan la posibilidad de resolver rayas que difieran en 10^{-6} cm^{-1} **). Un

*) Un guía de ondas es un tubo metálico, de sección rectangular o circular, por el cual pueden propagarse casi sin pérdidas las ondas centimétricas radioeléctricas.

**) En espectroscopía, junto con la longitud de onda, suelen utilizarse datos expresados en longitudes de onda inversas (número de onda), es decir, por el número de longitudes de onda que caben en la longitud de 1 cm.

poder separador tan grande permite resolver los problemas a que nos referimos más adelante.

El espectro de rotación aparece en virtud de la cuantificación de la energía de rotación de la molécula

$$K_r = \frac{I\omega^2}{2},$$

donde I es el momento de inercia de la molécula. Esta es la forma que tiene la expresión de la energía de rotación de una molécula diatómica, la cual se caracteriza por un solo momento de inercia tomado en relación al eje perpendicular a la línea que une los átomos y que pasa por el centro de inercia. En el caso general, como indicamos a su debido tiempo (pág. 101), la rotación se caracteriza por tres momentos de inercia, con respecto a los tres ejes principales.

Nos detendremos un poco en los espectros de rotación de las moléculas diatómicas.

En primer lugar hay que subrayar que no todas las moléculas, e incluso no todas las moléculas diatómicas, darán espectro de rotación de absorción o de emisión. Como ya explicamos (véase la pág. 338), cada emisor (o absorbedor) de ondas electromagnéticas es una especie de oscilador, es decir, un dipolo elemental. Si el movimiento de los átomos de la molécula o el movimiento de la molécula como un todo no va acompañado de una variación del momento de dipolo, estos movimientos no pueden ocasionar la emisión ni la absorción de ondas electromagnéticas.

El momento dipolar p de la molécula varía periódicamente, durante la emisión o absorción, con la frecuencia correspondiente, oscilando en torno a su valor medio, que coincide con la posición de equilibrio de los átomos. Puede demostrarse que la intensidad de las rayas espectrales es proporcional a la derivada $\left(\frac{dp}{dr}\right)_{r=0}$, es decir, de la rapidez máxima de variación del momento dipolar con la distancia interatómica. Todas las moléculas simétricas cuyos átomos están unidos por enlace homopolar poseen un valor nulo de p constante. Por esto no dan espectros de rotación. A este tipo de moléculas pertenecen, por ejemplo, las moléculas diatómicas de átomos iguales (H^2, O_2, N_2, etc).

Consideremos el espectro de rotación de una molécula polar (es decir, que posea momento dipolar) diatómica. La energía de rotación de la molécula será

$$K_r = \frac{I\omega^2}{2};$$

aquí ω es la velocidad angular de rotación, e I es el momento de inercia de la molécula,

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2$$

(r_1 y r_2 son las distancias hasta el centro de inercia, $r = r_1 + r_2$). El de valor ω se determina partiendo de que el impulso de rotación, igual a $I\omega$, según la regla de la mecánica cuántica (pág. 532) sólo puede tomar la serie de valores discretos

$$\frac{h}{2\pi} \sqrt{j(j+1)},$$

donde $j = 0, 1, 2, \ldots$ es el número cuántico que designa los niveles rotacionales. Por consiguiente, las velocidades angulares de rotación de la molécula sólo pueden tener la serie de valores

$$\omega_j = \frac{h}{2\pi I} \sqrt{j(j+1)},$$

de donde

$$K_r = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{h^2}{8\pi^2 I} [j(j+1)].$$

Comenzando por la energía de rotación nula, la energía de los siguientes niveles aumenta según una ley cuadrática.

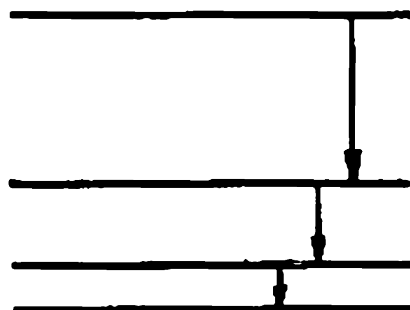


FIG. 227.

Las transiciones energéticas se subordinan a una simple regla de prohibición: sólo son posibles las transiciones entre niveles vecinos (fig. 227).

La frecuencia de la emisión o absorción en el espectro de rotación de una molécula diatómica, en la transición entre los niveles j y $j-1$, será igual a

$$\nu = \frac{hj}{4\pi^2 I} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

En este caso simplísimo, el espectro de rotación constituirá un sistema de rayas equidistantes.

A distintas temperaturas del gas, la energía media de rotación de las moléculas será diferente. De acuerdo con la ley de Boltzmann, la energía más probable $\frac{I\omega^2}{2} = kT$ (dos grados de libertad rotacionales, véase la pág. 205). De aquí es fácil calcular el número del nivel de energía en que la molécula se encuentra más frecuentemente. Por ejemplo, para una molécula de vapor de ácido clorhídrico ($I = 2{,}61 \cdot 10^{-40}$ g·cm²) a las temperaturas de 300, 600 y 1200° K obtenemos respectivamente que $j = 4$, 6 y 8.

Como las transiciones sólo son posibles entre niveles vecinos, está claro que la serie de frecuencias equidistantes se agrupará junto a la raya del valor «medio» de j. La intensidad de las rayas decrecerá a medida que se alejan de este valor de j, ya que cada vez será menor el número de moléculas que se encuentren en los estados energéticos correspondientes.

Los espectros de rotación permiten determinar con enorme exactitud (mucho mayor que con los métodos de difracción) las distancias interatómicas en las moléculas simples. En efecto, si el número de átomos que hay en la molécula no es grande, conociendo el momento de inercia y la masa de los átomos se puede determinar la distancia entre ellos. Para una molécula diatómica

$$r=\sqrt{\frac{I}{m}},\ \text{donde}\ m=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}.$$

El cálculo para la molécula de ácido clorhídrico es:

$$m_H=1{,}67\cdot 10^{-24}\ \text{g},\ m_{Cl}=35\cdot 1{,}67\cdot 10^{-24}\ \text{g}.$$

La distancia entre los átomos de H y de Cl en la molécula de ClH será

$$r=\sqrt{\frac{2{,}61\cdot 10^{-40}\cdot 36\cdot 1{,}67\cdot 10^{-24}}{35\cdot 1{,}67\cdot 10^{-48}}}=1{,}63\cdot 10^{-8}\ \text{cm}.$$

Este valor coincide bien con los datos obtenidos por otros métodos.

§ 201. *Espectro infrarrojo de vibración-rotación*

Este tipo de espectro se observa en la región de longitudes de onda de de 2—3 hasta decenas de micras. Cuando se dice «espectro infrarrojo» se tiene en cuenta el espectro de vibración-rotación, de absorción, de las moléculas. Si la observación se efectúa en sólidos, la rotación de las moléculas no existe y se produce un espectro de vibración puro. En los líquidos la rotación encuentra dificultades y la estructura de rotación de las bandas será borrosa.

MOLÉCULA DIATÓMICA Dejemos a un lado por ahora el problema de la rotación y consideremos los niveles de energía de vibración.

Las oscilaciones de una molécula diatómica pueden representarse por medio del modelo de dos bolas unidas entre sí por un muelle. Este sistema tiene su frecuencia de vibración propia

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

donde k es el coeficiente (rigidez) que define la fuerza del enlace, y m es la masa del átomo, si los átomos de la molécula son iguales, o la masa reducida $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, si sus masas son diferentes (damos al

lector la posibilidad de demostrar esto). La mecánica cuántica llega a la conclusión de que la energía del oscilador deberá representarse por la fórmula

$$\mathcal{E}=\left(v+\frac{1}{2}\right)h\nu.$$

Aquí $1/2\ h\nu$ es la energía del punto cero del oscilador (es decir, la energía de las vibraciones a la temperatura de cero absoluto), y $v=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ es el número cuántico vibracional. En la mecánica cuántica se demuestra, además, que en un oscilador que vibre según una ley armónica, sólo son posibles las transiciones energéticas entre niveles vecinos. Cuando comienzan las vibraciones inarmónicas aparecen transiciones que saltan uno o dos niveles, pero que son considerablemente más débiles que la transición fundamental. Las vibraciones armónicas son aquellas que se producen por la acción de la fuerza recuperadora $-kx$. La energía potencial de esta vibración es $kx^2/2$, es decir, varía según una ley parabólica.

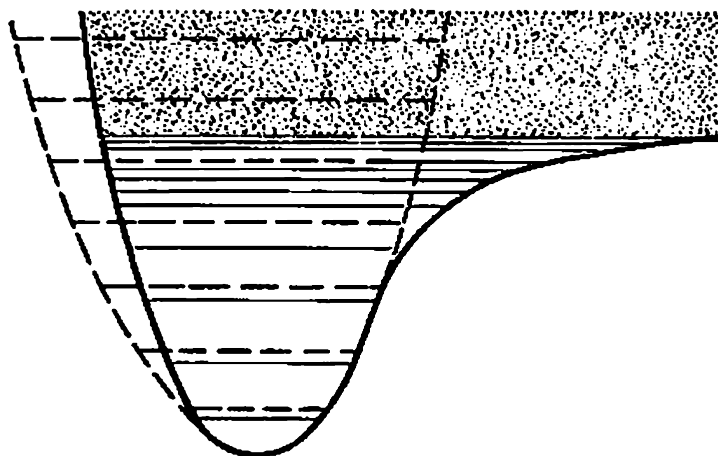


FIG. 228.

En la fig. 228 se ha construido la curva de potencial para una molécula diatómica y en ella se ha inscrito la parábola. Las rayas horizontales son los niveles de energía calculados valiéndose de las fórmulas teóricas. Mientras la energía es pequeña, la curva real difiere poco de la parábola. Podemos esperar que la molécula cumple bien la ley del oscilador armónico mientras la energía de las oscilaciones esté lejos de la energía de ruptura (disociación) de la molécula. En estas condiciones puede considerarse que todos los niveles de vibración son equivalentes, y como sólo se permiten las transiciones entre niveles vecinos, la molécula diatómica, lo mismo que un oscilador ideal, tendrá una sola frecuencia de transición. Si no

existe rotación de la molécula, todo el espectro constará de una raya. En realidad, además de la frecuencia fundamental ν, en el espectro podrán encontrarse «armónicas» con frecuencias 2ν, 3ν, etc. (después se pondrá de manifiesto la aproximación de los niveles y se perderá el paso proporcional de las frecuencias de las armónicas). Pero las armónicas son débiles y en una multitud de casos será correcto hablar de una sola frecuencia de vibración.

La existencia de la rotación de las moléculas transforma esta raya espectral en una banda. Si la molécula oscila y gira al mismo tiempo, su energía estará determinada por dos números cuánticos, v y j:

$$\mathscr{E}=\left(v+\frac{1}{2}\right)h\nu_v+\frac{h^2}{8\pi^2 I}j(j+1).$$

Las diversas transiciones ocasionan ahora la creación de dos grupos (que reciben el nombre de ramas y se designan con las letras R y P) de frecuencias, menores y mayores que la frecuencia de vibración ν_v. Teniendo en cuenta las reglas de prohibición de que hablamos antes, obtenemos la siguiente fórmula de las frecuencias

$$\nu=\nu_v\pm\frac{h}{4\pi^2 I}j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots).$$

En este caso el signo más corresponde a las transiciones de un nivel de rotación más bajo a otro más alto, y el signo menos, a las transiciones en sentido inverso.

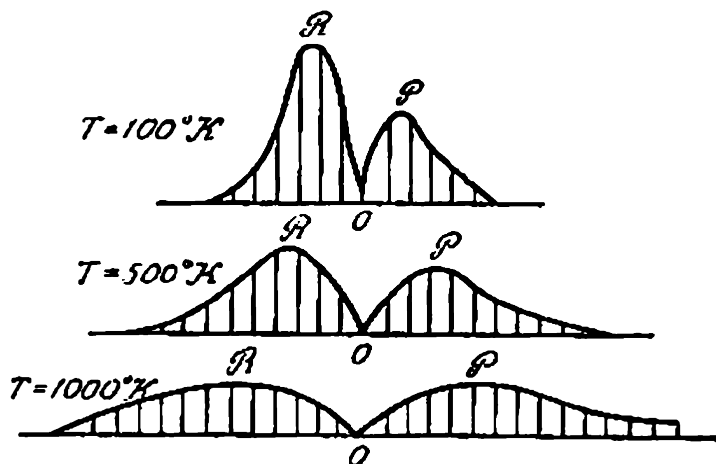


FIG. 229.

Esta fórmula se ilustra con la fig. 229, que representa la banda espectral del ClH. El punto O corresponde al valor ν_v, las rayitas a su derecha y a su izquierda indican las frecuencias que surgen. La altura de estas rayitas es proporcional a la intensidad de estas

rayas espectrales. Cuando la resolución es grande, cada rayo se ve por separado. Si el poder separador es pequeño, las rayas se unen formando una banda. En este caso la variación de la intensidad viene dada por la curva envolvente. La fig. 230 muestra el esquema de las transiciones energéticas que condujo a la creación de esta banda. Advertimos que la transición de vibración pura (de $j'=0$ a $j''=0$) está prohibida y en medio de la banda hay un foso. Después la absorción pasa por un máximo a la izquierda y a la derecha de la frecuencia de vibración. Los máximos de absorción corresponden a aquellos valores de j que se encuentran más frecuentemente a la temperatura dada (por la misma causa que consideramos en el párrafo precedente). Por esta razón, si la temperatura aumenta, la forma de la banda espectral variará como se indica en el esquema.

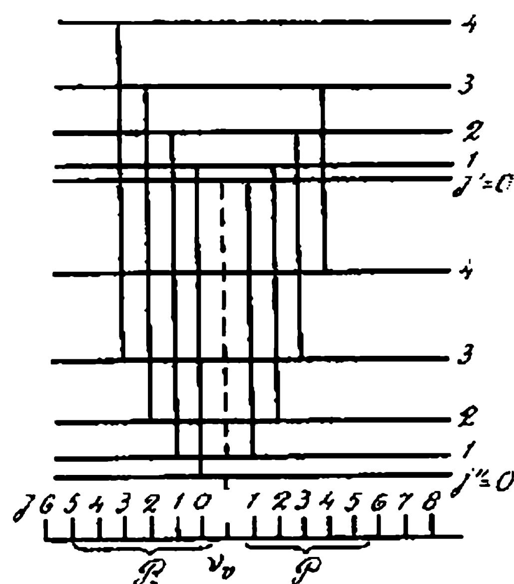


FIG. 230.

VIBRACIONES DE UNA MOLÉCULA POLIATÓMICA. Una molécula poliatómica puede efectuar un gran número de movimientos vibratorios igual al número de grados de libertad de vibración. Este número se calcula del modo siguiente. Una molécula de N átomos posee $3N$ grados de libertad. Tres de ellos corresponden a las coordenadas del centro de inercia de la molécula. El número de grados de libertad rotacionales, en el caso general, también es igual a tres. No obstante, las moléculas lineales sólo poseen dos grados de libertad rotacionales, porque la rotación alrededor de la línea que pasa por los centros de los átomos carece de contenido físico. De este modo, el número de grados de libertad, y junto con él de frecuencias vibracionales, es igual a $3N—6$ ó $3N—5$. Algunas de estas frecuencias pueden no ponerse de manifiesto, si con la vibración correspondiente no varía el momento dipolar de la molécula (del problema de las llamadas vibraciones no activas volveremos a ocuparnos). Como quiera que sea, el número de las frecuencias de vibración y, por lo tanto, el número de bandas en el espectro infrarrojo, está rigurosamente determinado por el número de átomos y por la simetría de la molécula.

Si no existe rotación de las moléculas (cuerpo sólido), el espectro infrarrojo de absorción consta de las rayas que corresponden a las transiciones de vibración. Debido a la intensa absorción (porque el análisis hay que hacerlo forzosamente en capas gruesas), en las

condiciones normales las rayas se unen formando una banda. En los líquidos la rotación de las moléculas es retardada y la estructura rotacional de las bandas, borrosa. Las rayas aisladas que constituyen la banda no se ven ya.

Detengámonos ahora en el problema acerca del sentido físico de las frecuencias de vibraciones de una molécula poliatómica. ¿De qué vibraciones se trata? En el caso de la molécula diatómica la cuestión estaba clara: se trataba de las vibraciones a lo largo de la línea de enlace. Pero, ¿qué magnitudes oscilan según la ley armónica en las moléculas poliatómicas?

Cualquiera que sea la oscilación de la molécula, las desviaciones de los átomos de la posición de equilibrio pueden describirse como desplazamientos a lo largo del enlace y deformaciones de los ángulos de valencia. $3N—6$ coordenadas q_i (en el amplio sentido de la palabra) definen exhaustivamente la configuración instantánea de la molécula que vibra. Si las coordenadas q_i se eligen arbitrariamente, sus valores no cambiarán según la ley de la oscilación más simple.

La ley de la variación con el tiempo de cada q_i vendrá representada por una curva compleja y enredada, aunque periódica. Sin

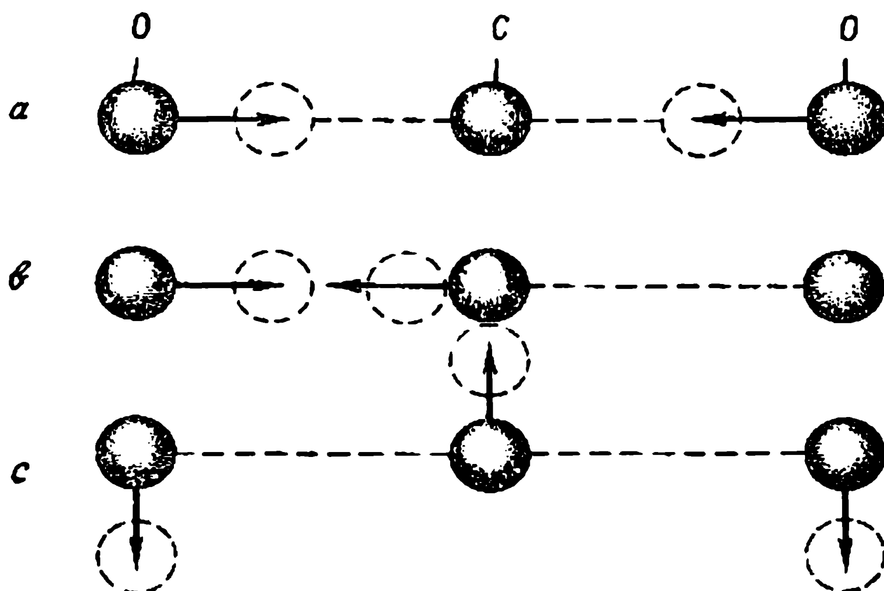


FIG. 231.

embargo, resulta que es posible recurrir a una definición tal de la molécula vibrante, por medio de $(3N—6)$ números Q_i, con la cual estos números Q_i variarán según una ley armónica y oscilarían con las frecuencias ν_i. Estas «coordenadas» Q_i se llaman *normales*, y a ν_i se les da el nombre de frecuencias de las vibraciones normales.

La posibilidad de introducir las coordenadas normales significa que las curvas periódicas de variación de cualesquiera otras coordena-

das q_i pueden descomponerse en un espectro según las frecuencias de las vibraciones normales. Como quiera que abordemos el espectro de vibración, llegaremos siempre a la conclusión de que está constituido por frecuencias de las vibraciones normales.

¿Qué coordenadas son las Q_i? ¿Se obtienen acaso eligiendo de un modo especial el sistema de referencia? No, las coordenadas normales son antetodo combinaciones lineales de los desplazamientos q_i. Por esto, cada coordenada normal describe la oscilación de la molécula en conjunto. Ejemplos de las vibraciones normales de las moléculas de CO_2 y H_2O se dan en las figs. 231 y 232. La oscilación real es de por sí la realización simultánea de todos estos movimientos.

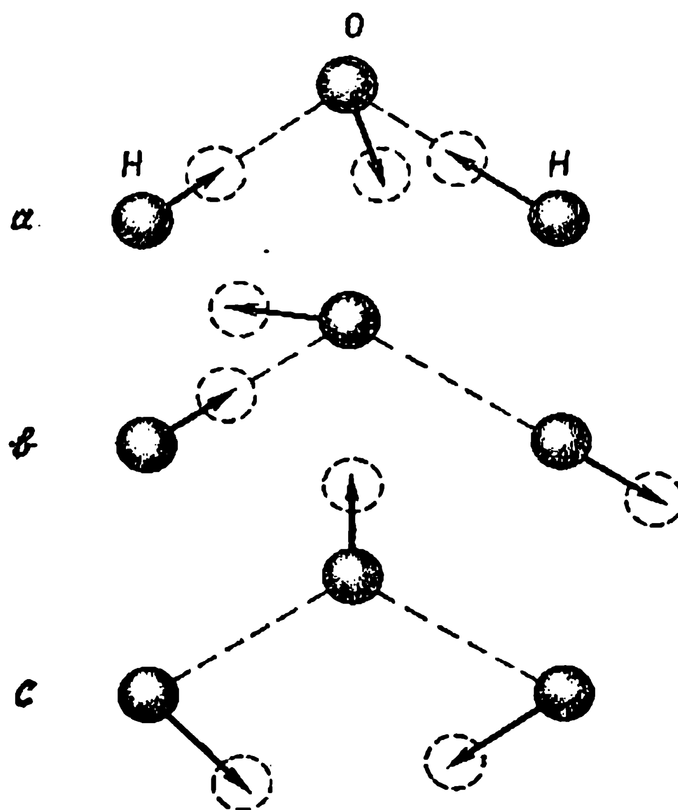


FIG. 232

Por el espectro puede determinarse el conjunto de las frecuencias de las vibraciones normales de la molécula. Estos datos pueden utilizarse para crear una representación clara de las vibraciones de dicha molécula.

Para fines prácticos tienen gran importancia los rasgos característicos de muchas frecuencias de vibración. Un examen especial demuestra que en ciertas vibraciones normales varía principalmente

una distancia interatómica cualquiera o un ángulo de valencia. Es natural que esta frecuencia varía poco en un grupo de uniones afines, siempre que la molécula contenga dicho enlace. Esta circunstancia se aprovecha en química.

La medida de las frecuencias de vibración de las moléculas no sólo se efectúa por medio de los espectros infrarrojos de absorción, sino también por el método de la dispersión de combinación (o espectros de Raman). Como veremos más adelante estos dos métodos se completan el uno al otro eficazmente.

§ 202. Dispersión de combinación de la luz

Se da esta denominación al caso particular de la dispersión de una luz de frecuencia ν por una sustancia, en el cual, además de la intensa dispersión de la luz con la frecuencia invariable ν, aparece una serie de rayas de frecuencias menores y mayores.

La observación se hace generalmente en una dirección que forma ángulo recto con la luz incidente. Para la irradiación se utiliza una lámpara de mercurio cuya luz da un espectro en el que hay varias rayas intensas, la más importante de las cuales es la raya azul de 4358 Å de longitud de onda. La radiación dispersada llega a un espectrógrafo y es registrada en una placa fotográfica. El esquema de este espectro puede verse en la pág. 233. La peculiaridad fundamental del espectro consiste en lo siguiente. Junto a cada raya excitatriz aparece un grupo de rayas mucho más débiles. Estos grupos son idénticos para todas las rayas. Las rayas satélites se encuentran por lo general situadas simétricamente a derecha e izquierda, aunque pueden diferir en intensidad. Este fenómeno fue descubierto independientemente por C. V. Raman, en la India, y por G. S. Landsberg y L. I. Mandelstam en Moscú. El trabajo de Raman fue publicado poco antes *), por lo que los espectros de combinación se llaman también espectros de Raman o efecto de Raman.



FIG. 233.

La explicación de esta figura de difracción se reduce a lo siguiente. El fotón $h\nu$, en lo fundamental, es dispersado por la molécula elásticamente, es decir, sin que varíe su frecuencia. Sin embargo, a la par de esta dispersión puede producirse otra con pérdida parcial de energía, que se gasta en la transición de la molécula de un nivel

*) Raman comunicó telegráficamente su descubrimiento a la revista inglesa «Nature».

de energía a otro. Supongamos que el fotón $h\nu$ perdió la energía necesaria para elevar la molécula desde el nivel de vibración del punto cero hasta el primer nivel. Esta pérdida de energía será igual a $\mathcal{E}_{v=1}-\mathcal{E}_{v=0}=h\nu_v$. Por consiguiente, el fotón dispersado tendrá la energía $h(\nu-\nu_v)$. En el espectro surge una raya «satélite» por la parte de las frecuencias menores.

Las frecuencias $\nu-\nu_v$ se llaman satélites rojas, y las que tienen frecuencias mayores, satélites violetas. La dispersión con frecuencia mayor que ν se produce cuando el fotón incide sobre una molécula excitada. En este caso, a la vez que se produce la dispersión, la molécula salta al nivel más bajo. Esta energía «sobrante» la recoge el fotón. Si la molécula excitada se encontraba en el primer nivel de vibración, el fotón aumentará su energía en $h\nu_v$ y en el espectro de dispersión aparecerá la frecuencia $\nu+\nu_v$.

La validez de este mecanismo de dispersión se confirma perfectamente al explicar la relación entre las intensidades de las rayas rojas y violetas. A la temperatura ambiente la mayoría de las moléculas se hallan en el nivel del punto cero, con la energía $\frac{1}{2}h\nu_v$. En el primer nivel excitado, con la energía $\frac{3}{2}h\nu_v$, se encuentra menos moléculas. De esta circunstancia se deduce ya claramente que la intensidad de las rayas violetas debe ser menor y, más aún, que a bajas temperaturas deben desaparecer prácticamente estas rayas. La relación de las intensidades es proporcional al número de átomos que se encuentran en los estados primero y del punto cero. Según la ley de Boltzmann

$$\frac{N_{v=1}}{N_{v=0}}=\frac{e^{-\frac{3}{2}\frac{h\nu_v}{kT}}}{e^{-\frac{h\nu_v}{2kT}}}=e^{-\frac{h\nu_v}{kT}}.$$

Esta fórmula está en perfecto acuerdo con la experiencia.

Así, pues, las rayas desplazadas del espectro de dispersión de combinación están apartadas en magnitudes iguales (en unidades de energía) a la diferencia de los niveles de energía de la molécula.

Hasta ahora hemos considerado dos niveles de vibración, pero está claro que lo que hemos dicho se refiere a todas las transiciones energéticas: a las rotacionales puras, a las de vibración-rotación y a cualesquiera otras. La raya fundamental de dispersión tendrá como satélites más próximos las rayas correspondientes a las transiciones energéticas menores. El espectro de rotación se encontrará considerablemente más cerca de la raya fundamental que el de vibración-rotación.

Con respecto a los espectros de absorción, las reglas de prohibición para los espectros de dispersión de combinación son las mismas

en que se refiere al número cuántico vibracional, pero distintas para el rotacional. Se permiten aquellas transiciones en que

$$\Delta v = \pm 1 \text{ y } \Delta j = 0, \pm 2.$$

Por lo tanto, la banda vibracional-rotacional constará de una raya de vibración pura, apartada de la raya de excitación en la magnitud ν, y de una serie de rayas, apartadas en las magnitudes $\nu_v - 2\nu_r$ y $\nu_v + 2\nu_r$ de dicha raya de excitación.

Los espectros de dispersión de combinación se obtienen generalmente con líquidos. Las rayas $\nu_v \pm 2\nu_r$ resultan borrosas, y se destaca claramente el sistema de rayas del espectro de vibración puro.

Los espectros de dispersión de combinación tienen una gran ventaja frente al espectro infrarrojo. Ocurre como si trasladásemos las mismas medidas a la región visible. Las frecuencias que se medían directamente en el espectro infrarrojo, se determinan como la diferencia entre la raya fundamental y la de Raman con la misma exactitud aproximadamente.

Al parecer, puede renunciarse al espectro infrarrojo. Sin embargo esto puede hacerse no en todos los casos. En cierto sentido el espectro infrarrojo y el de Raman se completan entre sí.

¿En qué difiere el proceso de emisión de ondas por una molécula del proceso de dispersión? En ambos casos la molécula envía al espacio ondas elementales y, en ambos casos, la molécula se comporta durante la emisión como un dipolo. Pero en el primer caso la molécula es un dipolo en ausencia de campo exterior, mientras que en el segundo la molécula se comporta como un dipolo sometido a la acción del campo de la onda incidente. Por lo tanto, la emisión o absorción se produce cuando la variación del estado de la molécula (vibración, rotación, etc.) va acompañada de una variación del momento dipolar propio p. La dispersión es posible con la condición de que el cambio de estado de la molécula vaya acompañado de variaciones del momento dipolar inducido, es decir, de la variación de la polarizabilidad β. En este caso, como demuestra la teoría, tiene importancia la existencia de esta variación en el instante en que la molécula pasa por la configuración de equilibrio.

En el espectro infrarrojo hay rayas para aquellas frecuencias que corresponden a un movimiento que satisface la condición

$$\left(\frac{dp}{dr}\right)_{r=r_0} \neq 0$$

(r_0 es la distancia de equilibrio). Las rayas de dispersión de combinación surgen para aquellas vibraciones con las que

$$\left(\frac{d\beta}{dr}\right)_{r=r_0} \neq 0.$$

Es muy frecuente que estas condiciones se excluyan la una a la otra. Por esto una vibración puede ser activa en el espectro infrarrojo y pasiva en el de Raman, y viceversa.

La molécula de CO_2 puede servir de ejemplo. De las tres vibraciones de esta molécula, la vibración lineal simétrica deja al momento dipolar de la molécula invariable e igual a cero. Esta oscilación es inactiva en el espectro infrarrojo. En el espectro de dispersión de combinación, por el contrario, sólo esta vibración será activa, y las otras dos estarán ausentes. Para la vibración antisimétrica esto se deduce inmediatamente del siguiente razonamiento. En las dos posiciones extremas, la deformación de la nube electrónica, y junto con ella la polarizabilidad, será la misma. Durante la vibración, la polarizabilidad variará igualmente en los dos semiperíodos y en la posición de equilibrio pasará por un mínimo o un máximo, pero esto significa que $\left(\frac{d\beta}{dr}\right)_{r=r_0}=0$.

No vamos a detenernos en seguir razonando estas regularidades. Han sido ya bien estudiadas y existen tablas que permiten, partiendo de la simetría de la molécula, sacar conclusiones acerca de sus frecuencias de vibración en el espectro infrarrojo y en el de Raman; y, al contrario, los datos acerca del número de rayas permiten formar un juicio sobre la simetría de la molécula.

§ 203. Espectro electrónico de absorción

Consideremos los espectros de absorción al pasar a las regiones visible y ultravioleta. La magnitud del fotón de la luz incidente será del mismo orden que la diferencia entre los niveles electrónicos de la molécula. Se hacen posibles las transiciones electrónicas. Pero, como ya dijimos, las transiciones electrónicas van acompañadas de variaciones de la energía de vibración y de rotación. Por esta razón, a cada transición le corresponderá una banda bastante ancha, con la particularidad de que, en las condiciones ordinarias del experimento, esta banda es continua y no se ve su estructura de «vibración-rotación». En cada banda de la transición electrónica hay una multitud de «bandas» de transiciones vibracionales-rotacionales, siendo posibles cualesquiera variaciones de los números cuánticos vibracionales.

Hallándose en un estado electrónico excitado, la molécula tiene distintas propiedades que cuando se encuentra en el nivel electrónico de punto cero. Varía el sistema de niveles de vibración y de rotación; las frecuencias de vibración, es decir, las diferencias entre los niveles de vibración, serán otras. También cambia la forma de la curva de potencial y, junto con ella, las distancias de equilibrio entre los átomos.

Las curvas de absorción en las regiones visible y ultravioleta son suficientemente características y pueden utilizarse para identificar la sustancia.

La dependencia de la absorción de la luz con respecto al espesor de la capa de sustancia que atraviesa puede escribirse de la forma (véase la pág. 126)

$$I = I_0 e^{-\mu x};$$

donde I_0 es la intensidad del rayo incidente, I es la intensidad del rayo transmitido, x es el espesor de la capa y μ, el coeficiente de absorción de la luz, que tiene diferentes valores para distintas longitudes de onda. Se llama a veces curva de absorción la curva I/I_0 en función de la longitud de onda, pero lo más frecuente es que se entienda por esta denominación la curva de μ en función de λ o de ν.

La ley de la absorción de la luz en las disoluciones se escribe de la forma

$$I = I_0 e^{-kNl} \text{ o } I = I_0 e^{-\varepsilon cl};$$

aquí l es el camino que recorre el rayo en la sustancia, y kN y εc son expresiones del coeficiente de absorción para la disolución. Es natural suponer que el coeficiente de absorción sea proporcional a la

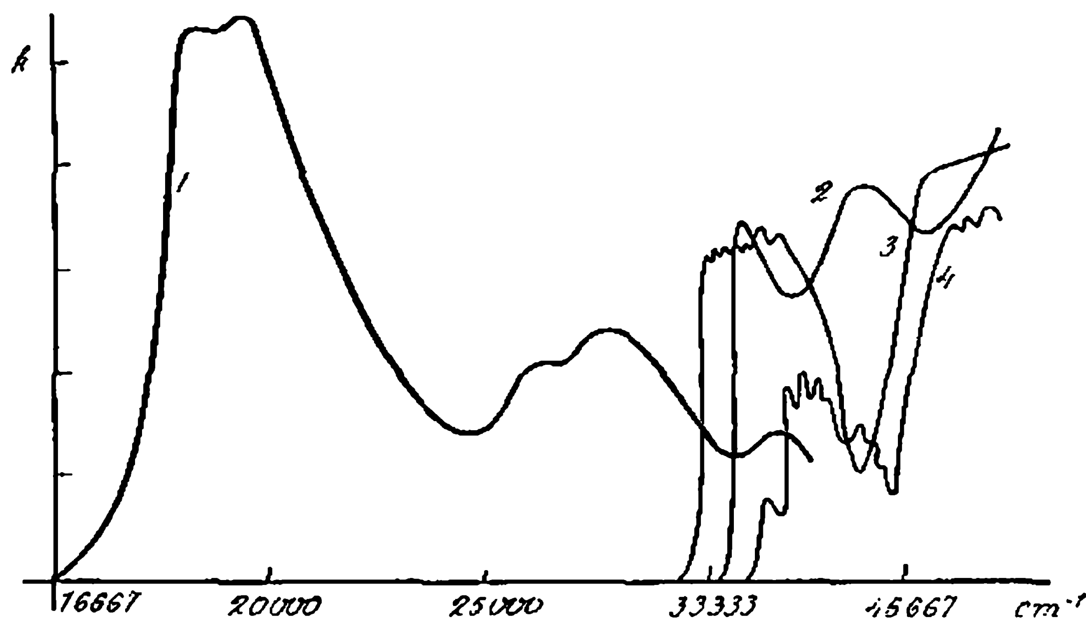


FIG. 234.

concentración de la sustancia, que se expresa por el número de moléculas N que hay en la unidad de volumen, o por el número de moles de sustancia que hay en un litro de solución c. Para una disolu-

ción el término «curva de absorción» se refiere generalmente a las curvas de variación de los coeficientes k o ε en dependencia de λ.

La fig. 234 representa unos ejemplos de curvas de absorción en el espectro visible y ultravioleta *1*. es la curva correspondiente al rojo Congo; *2*, la de la anilina; *3*, la del fenol; y *4*, la del benceno.

§ 204. *Resonancia magnética*)*

Supongamos que en un campo magnético continuo de intensidad H se encuentra una sustancia de partículas con espín s y momento magnético M. La energía potencial de una de estas partículas en el campo es el producto escalar $\mathbf{MH}=M_zH$. Según la ley general de la mecánica cuántica, esta energía sólo puede tomar una serie discreta de valores, de acuerdo con las $2s+1$ orientaciones posibles del espín y del momento magnético en el espacio.

¿Cómo puede descubrirse el sistema de niveles de energía que aparece? Como siempre, por las transiciones energéticas.

Las reglas de selección sólo permiten las transiciones entre niveles vecinos que se diferencien una unidad en el valor de s. Supongamos, por ejemplo, que en un estado

$$M_z=g\mu s,$$

y en otro,

$$M_z=g\mu(s-1).$$

Por consiguiente, la diferencia de energías será

$$\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1=g\mu H.$$

Los niveles de energía serán equidistantes.

A la diferencia de niveles calculada le corresponde una frecuencia del cuanto de energía emitido o absorbido

$$\nu=\frac{g\mu}{h}H.$$

Para el electrón

$$\nu=2,8\cdot 10^6 H,$$

para el protón

$$\nu=3,46\cdot 10^3 H.$$

Como vemos, a cada valor de H le corresponde su frecuencia característica, que se llama *frecuencia de resonancia magnética*. Para el intervalo prácticamente posible de intensidades del campo, estas frecuencias se encuentran en la gama de radiofrecuencias: para los

*) Antes de leer este párrafo y el siguiente conviene echar una ojeada a las págs. 602—603.

núcleos, en la región de las ondas cortas y ultracortas; para los electrones, en la región centimétrica.

La experiencia y los razonamientos teóricos demuestran que es imposible en la práctica registrar la radiación correspondiente a estas frecuencias. Sin embargo, puede observarse eficazmente la absorción resonante de las ondas electromagnéticas de la longitud respectiva. Para esto se coloca la sustancia dentro de una bobina, unida a un generador de alta frecuencia, y esta última se sitúa en un campo magnético continuo. La resonancia se puede «captar» variando la intensidad del campo sin cambiar la frecuencia o, al contrario, cambiando la frecuencia y manteniendo un mismo valor de H. La resonancia magnética posee una agudeza extraordinaria. La anchura del pico de la absorción es una magnitud del orden de 0,1 MHz cuando la frecuencia es de 460 MHz.

La resonancia magnética tiene mucha aplicación como método de investigación de la sustancia. Ofrece gran interés el descubrir tanto la resonancia electrónica como la nuclear. La existencia de electrones con espines no compensados le indica al químico la presencia en la sustancia de los llamados radicales libres y permite hacer deducciones acerca del carácter de los enlaces químicos. Con ayuda de la resonancia nuclear puede determinarse la composición química de la sustancia. No obstante, tiene una gran importancia el siguiente hecho. La resonancia magnética es un efecto tan sensible, que responde al campo «adicional» que crea la capa electrónica del átomo en el campo exterior. Resulta que el carácter de este campo adicional depende de las propiedades del enlace químico del átomo dado con los demás. De este modo las frecuencias de resonancia de un átomo varían ligeramente en dependencia de su enlace químico. Este fenómeno se conoce con el nombre de *desplazamiento químico*.



FIG. 235.

La fig. 235 representa el oscilograma del espectro de absorción de un compuesto químico. Esta es la figura de la resonancia magnética de los núcleos de flúor. En el oscilograma se ven cuatro rayas, una de las cuales es tres veces más alta que las otras tres. En la

molécula, cuya fórmula estructural se da en la figura, hay cuatro átomos de flúor «distintos». La cantidad de átomos de flúor que entran en el grupo CF_3 es tres veces mayor que los otros dos átomos «químicamente distintos». El desplazamiento químico separó las resonancias de los átomos de flúor y dio la posibilidad de establecer la fórmula estructural de este compuesto.

De este modo, el fenómeno de la resonancia nuclear nos da un procedimiento nuevo de análisis químico, que permite determinar no la fórmula química en bruto, es decir, en nuestro ejemplo, la parte común de todos los átomos de flúor con respecto a los de hidrógeno, sino la fórmula química detallada, que da la posibilidad de hallar la parte de los átomos de un mismo tipo que tienen distinto enlace.

§ 205. Resonancia cuadripolar

El esquema de los niveles de energía de las moléculas que hemos considerado antes no es suficientemente detallado. Resulta que cada nivel de rotación posee estructura. Entre la capa electrónica de la molécula y los núcleos atómicos puede existir otra interacción que hasta ahora no hemos tenido en cuenta: el núcleo atómico puede tener momento cuadripolar eléctrico y, en dependencia de la orientación de dicho núcleo con respecto a la capa electrónica de la molécula, puede poseer distinta energía. Los valores de esta energía son bastante pequeños y los niveles de energía correspondientes están subordinados a los niveles rotacionales.

Por lo tanto, para caracterizar a una molécula puede ser necesario indicar, además de su estado electrónico y los niveles de vibración y de rotación, el nivel cuadripolar de energía.

La interacción cuadripolar no siempre existe. Si la hay, las transiciones de rotación que estudiamos antes serán en realidad rotacionales-cuadripolares. Pueden observarse transiciones cuadripolares puras, es decir, transiciones entre niveles cuadripolares separados, y también puede lograrse resolver transiciones rotacionales-cuadripolares. Estos dos problemas se resuelven por los métodos de la radioespectroscopia. Las transiciones cuadripolares puras se encuentran en la región de 1—800 MHz, es decir, en la gama de ondas radioeléctricas cortas. Las transiciones rotacionales-cuadripolares se observan estudiando la absorción de las microondas, o sea, de las ondas milimétricas, en los gases.

Ofrecen especial interés las transiciones cuadripolares puras. Estas transiciones se observan en los sólidos y en algunos líquidos.

A continuación damos la fórmula de la energía de interacción del núcleo atómico con la capa electrónica de la molécula para el caso en que el campo tenga simetría axil (este campo existe en

todas las moléculas lineales):

$$\mathcal{E} = eQq\,\frac{3m^2 - s(s+1)}{4s(2s-1)};$$

Q es aquí el momento cuadripolar, y $q = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ es la segunda derivada del potencial eléctrico a lo largo del eje de simetría del campo. Si los núcleos tienen espín 0 y 1/2 el efecto no se produce. Tampoco ocurre la interacción si la capa electrónica que rodea al núcleo posee simetría esférica.

El número de niveles es limitado. El número de transiciones posibles, tomando en consideración las reglas de prohibición, resulta muy pequeño. Así, por ejemplo, en el caso en que $s = 1$ ó $s = \frac{3}{2}$ aparece una raya, si $s = \frac{5}{2}$, dos rayas, si $s = \frac{7}{2}$, tres rayas.

La figura del espectro cuadripolar de absorción se observa valiéndose de un generador cuya frecuencia se varía continuamente en el intervalo de longitudes de onda que se investiga. El poder separador de los métodos radioespectroscópicos es enorme. Cuando la frecuencia de la raya espectral es del orden de 30 MHz, la anchura de la raya es igual a varios centenares de hertzios.

El momento cuadripolar eléctrico Q del núcleo es una constante del núcleo del átomo que caracteriza la discrepancia de la distribución de la carga eléctrica del núcleo con la simetría esférica. La magnitud Q, en centímetros cuadrados, se determina en la práctica partiendo de la fórmula dada anteriormente, si se conoce $q = \frac{d^2V}{az^2}$ y se han medido las frecuencias cuadripolares. La discrepancia con la simetría esférica de la carga del núcleo se tiene en cuenta en la primera aproximación considerando que el núcleo tiene la forma de un elipsoide de revolución. Si el núcleo está alargado a lo largo del espín, $Q > 0$, y viceversa.

El núcleo elipsoidal tiende a orientarse de una forma perfectamente determinada en el campo de la capa electrónica. El nivel de energía fundamental corresponde a la disposición en que el eje de simetría del campo coincide con el eje del elipsoide. En los estados excitados, el eje del elipsoide nuclear, en virtud del carácter discreto de la energía, puede tener únicamente varias orientaciones privilegiadas con respecto al eje de simetría del campo. Las energías de estos estados cuánticos es la que viene dada por la fórmula antes citada. La onda electromagnética que incide sobre la molécula es absorbida si la magnitud del fotón es la que corresponde a la energía de transición de una orientación del elipsoide nuclear a otra.

Los espectros cuadripolares empezaron a estudiarse hace muy poco tiempo. Estos espectros tienen gran interés para la ciencia

debido a su enorme exactitud en la medición de las frecuencias y a la reacción de la frecuencia cuadripolar a cualquier variación, por pequeña que sea, del campo eléctrico creado no sólo por la molécula en cuya composición entra el núcleo, sino también por las moléculas vecinas.

Baste decir que las frecuencias cuadripolares diferirán considerablemente en las variedades cristalinas de una misma sustancia. De este modo, el núcleo no sólo reacciona a la variación del campo creado por los electrones próximos a él, sino también a las variaciones del cerco electrónico remoto.

Ejemplo. En momento cuadripolar eléctrico del núcleo Cl^{35} es $Q=-0{,}07\times \times 10^{-24}$ cm^2. La resonancia cuadripolar se produce en el Cl_2 cuando la frecuencia $\nu=54{,}47$ MHz. Para el núcleo Cl^{35} el espín $s=3/2$. Esto significa que el número cuántico m toma los valores $3/2$, $1/2$, $-3/2$, $-1/2$. Como la energía de la interacción cuadripolar depende de m^2, al ser absorbido un cuanto $h\nu$ de energía electromagnética sólo es posible una transición: del nivel correspondiente a $|m|=3/2$ al nivel correspondiente a $|m|=1/2$.

La condición de resonancia es

$$h\nu=\mathscr{E}_{1/2}-\mathscr{E}_{3/2}=eqQ\left[\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}{4\cdot\frac{3}{2}\left(2\cdot\frac{3}{2}-1\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}{4\cdot\frac{3}{2}\left(2\cdot\frac{3}{2}-1\right)}\right]=-\frac{eqQ}{2}.$$

Midiendo la frecuencia de resonancia ν y conociendo por otras fuentes la magnitud Q del momento cuadripolar del núcleo Cl^{35}, hallamos el gradiente de la intensidad del campo eléctrico creado por los electrones en el centro del núcleo Cl^{35} de la molécula Cl_2:

$$q=\left|\frac{\partial E}{\partial z}\right|=\frac{2h\nu}{eQ}=\frac{2\cdot 6{,}6\cdot 10^{-27}\cdot 54{,}5\cdot 10^{6}}{4{,}8\cdot 10^{-10}\cdot 0{,}07\cdot 10^{-24}}=2{,}14\cdot 10^{16}\ \text{u. CGS.}$$

§ 206. Láseres de gas

Los láseres o generadores de emisión estimulada son sistemas desequilibrados, con densidad de población inversa en los niveles de energía, que sirven para obtener potentes flujos luminosos.

Las partículas de un gas atómico o molecular, en estado de equilibrio térmico, están distribuidas por niveles de energía de acuerdo con la ley de Boltzmann, es decir, el número de partículas

que se encuentran en el nivel de energía más alto E_2 es $e^{(E_2-E_1)/kT}$ veces menor que el número de partículas más estables, cuya energía es E_1. Normalmente los niveles de energía están ocupados (poblados) de tal forma, que cuanto más elevado sea el nivel, más pobre será en partículas.

Pero esto se refiere a un gas al que no se aplica energía. Si se trata de una descarga en gas, las cosas cambian. La distribución de las partículas por niveles de energía puede ya no sólo no someterse a la ley de Boltzmann, sino que es posible el caso de la inversión, es decir, los niveles superiores pueden estar más poblados que los inferiores. Si aplicando energía (por bombeo) conseguimos esto, resulta posible la construcción del láser.

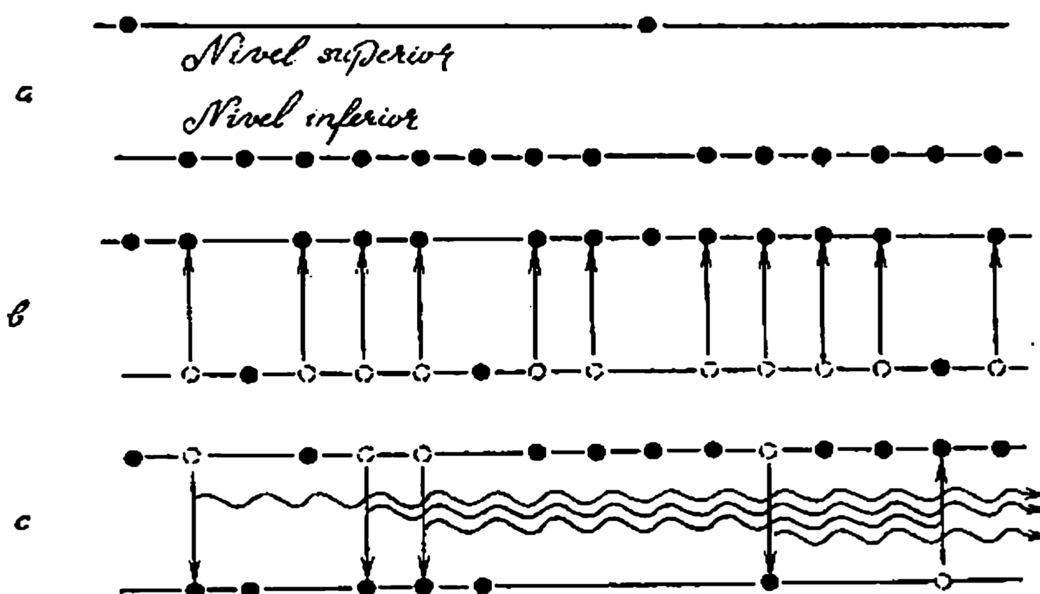
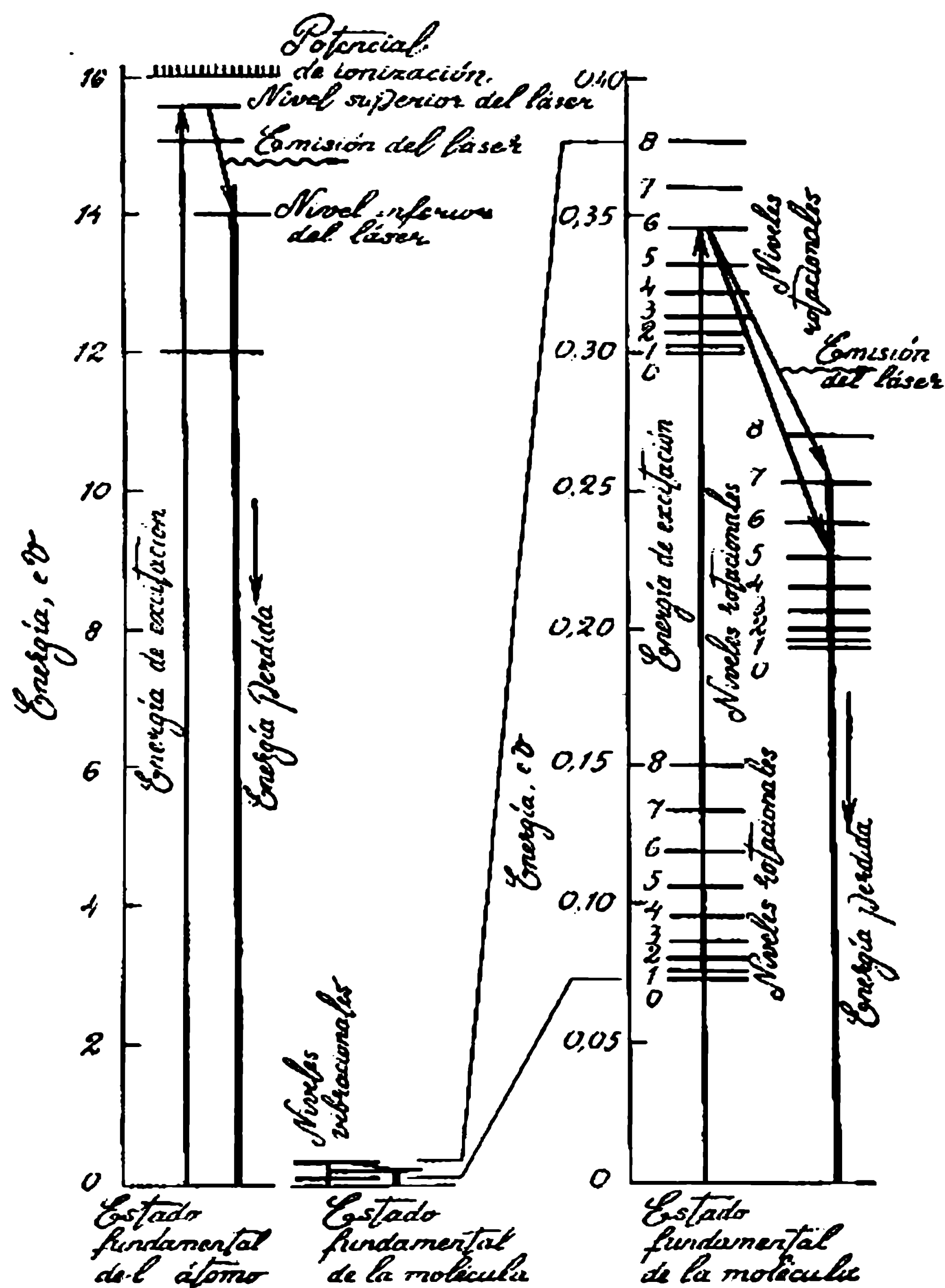


FIG. 236.

Está claro por qué la densidad de población inversa es condición necesaria para la creación del láser. Ante todo no nos interesa la radiación espontánea. Como se indicó antes, la radiación espontánea no es dirigida ni coherente. Nos interesa, pues, la radiación estimulada. Como las probabilidades de que la partícula con que choca el fotón salte hacia arriba o hacia abajo son iguales, el reforzamiento de la emisión estimulada sólo es posible en el caso en que el nivel alto esté más poblado que el bajo.

Esta situación se ilustra en el esquema de la fig. 236. En estado no excitado, las partículas de la sustancia del láser se encuentran fundamentalmente en el nivel más bajo (fig. 236a). Cuando comienza el bombeo se produce la inversión de la densidad de población



Potencial de ionización.
Nivel superior del láser
Emisión del láser
Nivel inferior del láser
16
14
12
10
8
6
4
2
0
Energía, eV
Energía de excitación
Energía perdida
Niveles vibracionales
Estado fundamental del átomo
Estado fundamental de la molécula
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0
Energía, eV
Energía de excitación
Niveles rotacionales
Emisión del láser
Energía perdida

FIG. 236a.

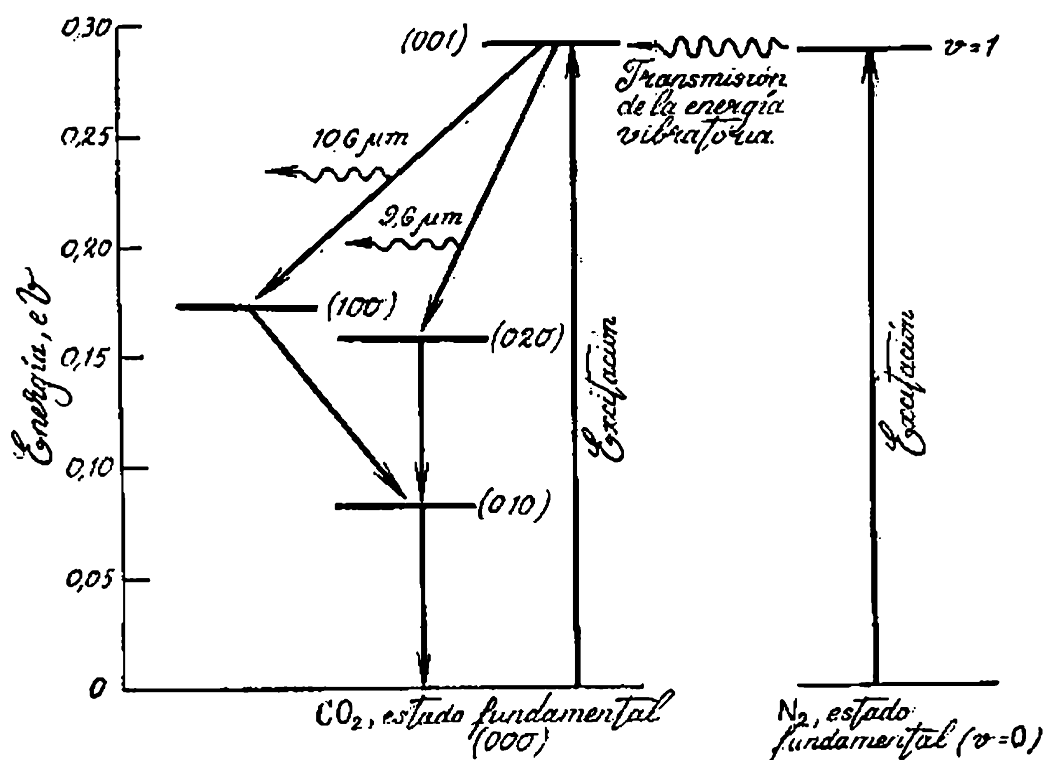


FIG. 236b.

(fig. 236b). Cualquier partícula puede emitir espontáneamente un fotón capaz de estimular la radiación de otras partículas. Esta actividad del fotón continuará hasta que éste sea absorbido por una partícula que se encuentre en el nivel más bajo (fig. 236c).

Puede hacerse un láser que funcione con régimen de impulsos: las partículas se elevan por bombeo al nivel superior y después, en un intervalo de tiempo muy pequeño, toda esta reserva de energía se cede en forma de radiación estimulada.

Los láseres de gas funcionan con régimen continuo. Para esto hay que disponer de un sistema de partículas que posean las siguientes peculiaridades. El bombeo debe hacer que las partículas pasen del estado fundamental al nivel superior del láser. La emisión del láser consiste en el paso de las partículas del nivel superior del láser al nivel inferior. Del nivel inferior del láser, por radiación espontánea, el sistema pasa al estado fundamental.

De esta descripción se deduce claramente que la excitación no debe hacer que las partículas pasen al nivel inferior del láser. Además de esto, el nivel inferior debe desalojarse rápidamente, es decir, la vida en este estado debe durar considerablemente menos que en nivel superior del láser.

La transición de las partículas del nivel inferior del láser al estado fundamental no interviene en la radiación láser. Esta es una pérdida inevitable que sólo puede disminuirse por un procedimiento: eligiendo sistemas en los cuales la diferencia entre las energías de los niveles superior e inferior sea grande comparada con la diferencia entre la energía del nivel inferior y la del estado fundamental.

La razón de la energía del fotón emitido a la energía de excitación es el *rendimiento absoluto máximo* del láser. Como es lógico, este rendimiento es mucho menor que la eficacia práctica, ya que la energía de bombeo se gasta inevitablemente no sólo en elevar las partículas al nivel superior del láser.

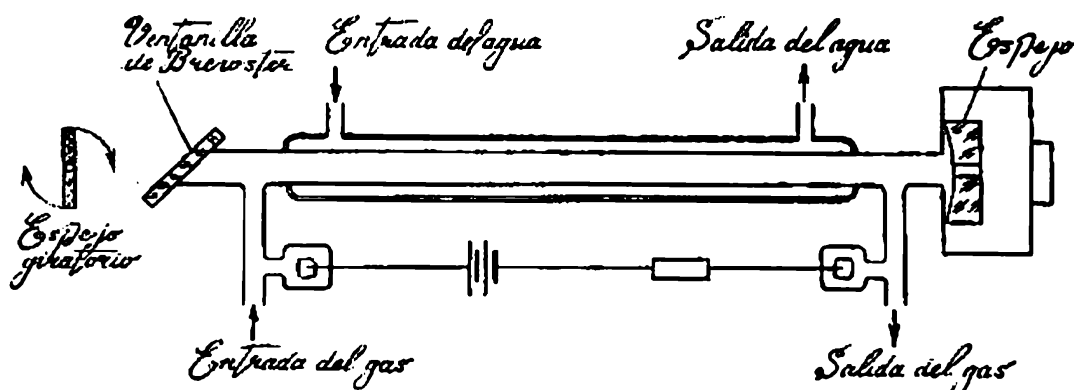


FIG. 236c.

En un mismo gas puede haber varios niveles superiores e inferiores posibles del láser. El establecimiento del régimen más conveniente para la creación de fotones con una energía determinada, es decir, para destacar dos niveles como niveles superior e inferior del láser, se consigue construyendo el láser como una cavidad resonante. Si el aparato es un tubo de descarga en gas con espejos en las bases de la columna, los fotones necesarios se obtienen variando la longitud de la columna por medio de un avance micrométrico. Como las ondas se reflejan varias veces en los espejos, en condiciones favorables sólo se encontrará la luz cuya longitud de onda quepa un número entero de veces en la longitud de la columna.

Los láseres de gas, en que el bombeo de la energía se efectúa por medio de la descarga eléctrica, se han construido para casi todos los elementos. Se han obtenido radiaciones de láser con longitudes de onda desde 0,2 hasta 133 μm.

Han alcanzado gran propagación los láseres cuya sustancia es una mezcla de neón y helio. Lo más frecuente es que creen una luz infrarroja próxima de longitud de onda de 1,13 μm.

Las mezclas de gases se utilizan en los láseres por la razón siguiente. En ciertos casos es más fácil excitar con la descarga en el gas una partícula *A*, que por colisiones transmite la excitación a una pantalla *B*, que excitar directamente la partícula *B*.

Vamos a describir más o menos detalladamente el mecanismo del funcionamiento del láser más potente de los conocidos hasta ahora, es decir, del láser que funciona con anhídrido carbónico.

La idea fundamental de la utilización de los gases moleculares consiste en la posibilidad de elevar considerablemente el rendimiento máximo, empleando como niveles superior e inferior del láser los niveles de vibración del estado electrónico fundamental. La comparación en este sentido de un láser atómico y otra molécula se ilustra en la fig. 236a.

Los tipos de vibraciones de la molécula de CO_2 los hemos estudiado ya (fig. 231). Cualquier estado cuántico se caracteriza por los tres números cuánticos $v_1v_2v_3$; v_1 se refiere a la vibración simétrica (*a*); v_2, a la vibración (*c*); y v_3, a la vibración lineal asimétrica (*b*).

En primer lugar el investigador debe determinar el período de vida de la molécula en los distintos estados. Estos períodos pueden diferir en varios órdenes. Después tiene mucha importancia la probabilidad de transición a uno u otro nivel por la acción de los choques de los electrones.

Resultó que, desde todos los puntos de vista, como nivel superior del láser conviene tomar el nivel 001, y como nivel inferior, el 100 o el 020. Desde estos niveles la molécula pasa al nivel de 010 y luego retorna ya al estado fundamental. El esquema de estas transiciones se muestra en la fig. 236b, donde los niveles de rotación no se señalan para no complicar el dibujo. Como puede verse por el esquema, este láser posee un alto rendimiento máximo, de un 40 y un 45% respectivamente para las radiaciones de 10,6 y 9,6 ηm.

Pero no sólo es grande el rendimiento absoluto, sino también el práctico de este sistema, ya que los electrones de la descarga en el gas hacen que la molécula pase al nivel $00v_3$. Un hecho que resulta muy cómodo es, que las excitaciones a cualquier nivel $00v_3$ son igualmente válidas. Recordaremos a este propósito que los niveles de vibración son equidistantes. Por esto el choque de moléculas en los estados $00v_3$ y 000 da moléculas en los estados $00(v_3-1)$ y 001. Es decir, en fin de cuentas se tienen las moléculas necesarias en el nivel superior del láser.

A pesar de que las excitaciones a cualquiera de los niveles dan una aportación positiva a la acción del láser, los electrones gastan una gran energía en las excitaciones iónicas de las moléculas. La

excitación se hace considerablemente más selectiva si al CO_2 se le añaden moléculas de nitrógeno.

El nitrógeno posee un nivel de vibración en $v=1$ del estado electrónico fundamental, con una energía igual a la energía 001 de la molécula CO_2. Este estado excitado es bastante duradero, y la molécula de nitrógeno baja al nivel cero, en lo fundamental, sólo por un procedimiento, cediendo su energía a la molécula CO_2 que se encuentra en el estado 000 (véase el esquema de la fig. 236b). Los niveles de vibración equidistantes del nitrógeno hacen que sean eficaces todos sus estados vibracionales (del nivel electrónico fundamental).

Los razonamientos semejantes a los que acabamos de hacer no son totalmente rigurosos, porque son muchísimos los factores que determinan la eficacia práctica del láser. No obstante, estos razonamientos muestran la metódica que se sigue en la búsqueda de sustancias para el láser. En definitiva todo lo resuelve la experiencia. Si la liberación del nivel inferior del láser se efectúa muy despacio, es conveniente mezclar otros gases. La búsqueda de estos aditivos, en general, es empírica, y los resultados pueden ser muy importantes. Por ejemplo, cuando la presión del gas es de 1 mm de la columna de mercurio, las moléculas CO_2 en estado puro experimentan aproximadamente 100 colisiones por segundo que liberan el nivel. Las cifras correspondientes en presencia de helio y de agua son respectivamente 4000 y 100 000 colisiones.

Hasta ahora nada hemos dicho de cómo influye en la potencia del láser de CO_2 la estructura rotacional de los niveles de vibración. Si en la radiación del láser intervinieran las transiciones en todos los subniveles rotacionales, la radiación no sería rigurosamente monocromática. El empleo de efecto fino, que pasamos a describir, se consigue hacer que el láser funcione en la transición entre dos subniveles determinados. Generalmente se utiliza el nivel 20 de la rama P de la transición (001) — (100), lo que proporciona un haz de fotones de 10,5915 μm de longitud de onda.

A la temperatura ambiente, la energía cinética media de la molécula de CO_2 es igual a 0,025 eV. La distancia entre los niveles de vibración es mayor que esta magnitud y la distancia entre los niveles de rotación es menor que ella. Por esta razón las transiciones de las moléculas de un nivel rotacional de energía a otro, debido a las colisiones térmicas, son mucho más frecuentes (10 millones por segundo) que las transiciones entre los niveles vibracionales (1000 por segundo). Respectivamente el período de vida del estado de vibración es de 10^{-3} s, mientras que el de rotación es de 10^{-7} s. De este modo dentro de los niveles rotacionales de cada nivel de vibración tiene tiempo de establecerse la distribución de Boltzmann correspondiente al equilibrio térmico.

En estas condiciones basta regular la columna a una transición determinada para conseguir que ésta sea la dominante. En efecto, supongamos que se ha elegido la transición *P* (22), es decir, la transición desde el subnivel rotacional 21 (001) al subnivel 22(100). A medida que se libera el subnivel 21, otras moléculas saltarán de otros subniveles rotacionales al 21 para que la distribución de Boltzmann se conserve. De esta manera la transición puesta en condiciones privilegiadas vence en la competición con las demás transiciones posibles.

Esta peculiaridad del láser CO_2 determina sus grandes ventajas facilitando su alta cromaticidad y permitiendo también, aunque entre límites no muy amplios (9—11 μm), variar la longitud de onda de la radiación estimulada.

La gran duración de la vida en los estados vibracionales da la posibilidad de pasar el láser de CO_2 al régimen de impulsos. Con este fin uno de los dos espejos estacionarios se sustituye por un espejo giratorio. El láser entra en acción cada vez que este último espejo ocupa la posición necesaria con respecto al espejo estacionario.

Si el láser produce una potencia constante de 50 W, con el régimen de impulsos es capaz de dar 50 kW en destellos de 150 ns de duración, con una velocidad de 400 destellos por segundo.

El láser de CO_2 se hace generalmente en forma de tubos de dos metros de largo, a través de los cuales se hace pasar una corriente de gas. El esquema de este láser se muestra en la fig. 236c.

Las posibilidades del láser que hemos descrito lindan con la fantasía. El enfoque de la radiación infrarroja coherente del láser sobre una superficie de 0,001 cm^2 da la intensidad de 10^4 W/cm^2 con régimen constante y 10^9 W/cm^2 con el régimen de impulsos. El estrecho rayo de láser, que es capaz de propagarse a grandes distancias, quema instantáneamente de parte a parte un árbol, y en un segundo pasa a través del acero.

El rayo de láser puede crear campos, del orden de 10^8 V/cm^2, que cambian radicalmente las propiedades de la sustancia. Con el descubrimiento de los láseres surgieron una serie de nuevas direcciones de investigación física y técnica. Ofrece gran interés el estudio de la interacción de la luz de 10—11 μm de longitud de onda con semiconductores que son transparentes para esta región del espectro. De algunas aplicaciones del láser ya hemos hablado en otras páginas de este libro.

Las posibilidades, completamente nuevas, que el empleo de los láseres brindan a las comunicaciones constituyen el objeto de estudio de asignaturas especiales y rebasan el marco de un manual de física.

30

NÚCLEO ATÓMICO

§ 207. *Métodos experimentales de la física nuclear*

El estudio de la estructura del núcleo atómico va ligado indisolublemente al de los fenómenos de desintegración espontánea o inducida de dicho núcleo y de las partículas nucleares. Estudiando los fragmentos de un núcleo atómico destruido y analizando la suerte de estos fragmentos, obtenemos la posibilidad de sacar conclusiones acerca de la estructura del núcleo y de las fuerzas nucleares.

Como es natural, al principio se estudiaron detalladamente los fenómenos de la desintegración espontánea de los núcleos, es decir, los fenómenos radiactivos. Paralelamente a esto comenzaron a estudiarse los rayos cósmicos, que son radiaciones que poseen una fuerza de penetración extraordinaria y que llegan a nosotros procedentes del espacio cósmico. En la interacción con la sustancia, las partículas de la radiación cósmica desempeñan el papel de partículas proyectiles. Durante mucho tiempo la investigación de los rayos cósmicos fue el procedimiento más importante para estudiar la transmutación de las partículas elementales y, hasta cierto punto, para estudiar el núcleo atómico. En la actualidad adquieren cada vez mayor importancia las investigaciones basadas en la destrucción del núcleo atómico por bombardeo con corrientes de partículas creadas en aceleradores.

Los métodos experimentales a que nos vamos a referir ahora pueden utilizarse tanto para estudiar los rayos cósmicos como las partículas que se producen a consecuencia del bombardeo nuclear de tales o cuales blancos.

CÁMARAS DETECTORAS. El primer aparato que dio la posibilidad de ver la trayectoria de una partícula fue la cámara de niebla o cámara de Wilson. Si a través de una cámara que contiene vapor de agua sobresaturado se hace pasar una partícula rápida, que a su paso cree iones, esta partícula dejará tras sí una huella (traza) muy parecida a la que los aviones dejan a veces en la atmósfera. Esta traza está formada por vapor condensado. Los iones, que señalan el paso de la partícula, son centros de condensación del vapor; ésta es la causa de que se produzca la traza visible. La trayectoria de la partícula puede observarse directamente y fotografiarse.

El estado del vapor en la cámara se regula variando el volumen de la cámara por medio de un émbolo. Una expansión adiabática rápida hace que el vapor pase al estado sobresaturado.

Si la cámara de niebla se halla en un campo magnético, por la curvatura de las trayectorias puede determinarse la velocidad de la partícula, si se conoce la relación e/m, o e/m, si se conoce su velocidad (compárese con la fórmula de la pág. 474).

La cámara de Wilson ya ha pasado a la historia. Como la cámara está llena de gas, los choques son poco frecuentes. El tiempo «muerto» de la cámara es muy grande: las fotografías sólo pueden sacarse cada 20 segundos. Finalmente, la vida de la traza es del orden de segundos, lo que puede ocasionar el desplazamiento de las figuras.

En el año 1950 se propuso la cámara de burbujas, que desempeña un gran papel en la física de las partículas elementales. La sustancia contenida en la cámara es un líquido recalentado. La partícula cargada origina iones, y alrededor de los iones se producen burbujas que hacen visible la trayectoria. En esta cámara se pueden obtener 10 fotografías por segundo. El principal inconveniente de la cámara es la imposibilidad de regular su conexión. Por esta razón hay que sacar a veces miles de fotografías, para después elegir una sola, en que se registró el fenómeno objeto de la investigación.

Tienen gran importancia las cámaras de chispas, basadas en el principio iónico. Si a un condensador plano se le aplica una tensión alta, entre sus placas saltará una chispa. Si en el espacio entre las placas hay iones, la chispa saltará cuando la tensión sea menor. De este modo, una partícula ionizadora que pase por entre las placas producirá una chispa.

En la cámara de chispas es la propia partícula la que conecta la alta tensión entre las armaduras del condensador durante una millonésima parte de segundo. Sin embargo, la ventaja en cuanto a la posibilidad de conexión en el instante necesario se ve debilitada por inconvenientes: sólo se ven las partículas cuyas direcciones forman un ángulo no mayor de 45° con las placas, las trazas son muy cortas y no todos los fenómenos secundarios tienen tiempo de manifestarse.

Los investigadores soviéticos propusieron hace poco un nuevo tipo de cámara (la llamada cámara «streamer») que ya ha encontrado gran aplicación. El esquema sinóptico de esta cámara se reproduce en la fig. 237. La partícula que cae entre las placas, que en este caso, a diferencia de la cámara de chispas, se encuentran a gran distancia una de otra, es detectada por un contador. Un dispositivo lógico-electrónico distingue los sucesos primarios y separa aquel que interesa al experimentador. En este instante se le comunica a las placas alta tensión por un corto espacio de tiempo.

Los iones que se generan a lo largo de la trayectoria que recorre la partícula forman rayitas («streamer»), que se fotografían. La trayectoria de la partícula se delinea por estas rayitas. Si la fotografía está sacada a lo largo de la dirección de las rayitas, la trayectoria de la partícula tiene el aspecto de una línea punteada.

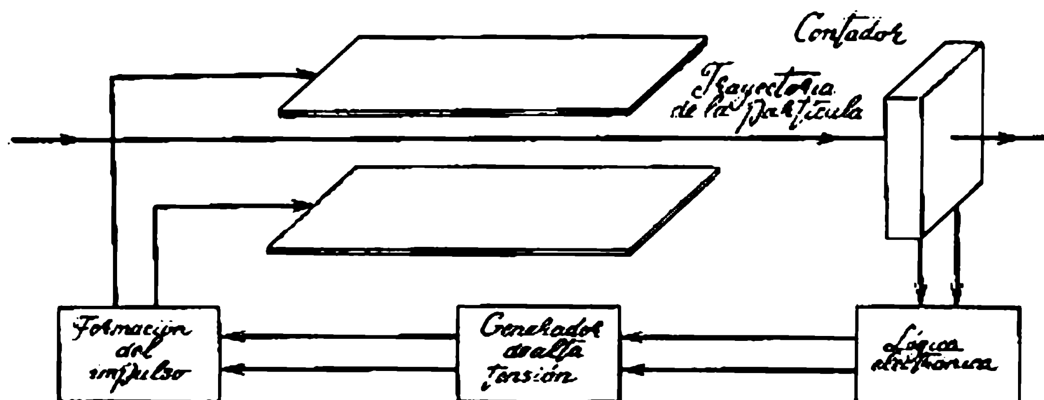


FIG. 237.

Para que esta cámara funcione eficazmente es necesario que exista una buena relación entre la avalancha electrónica que origina el ion primario y los parámetros del impulso de alta tensión. En una mezcla de un 90% de neón y un 10% de helio, siendo la distancia entre las placas igual a 30 cm, se obtienen buenos resultados cuando la tensión es de 600 000 V y la duración del impulso, 10^{-10} s. En este caso el impulso debe aplicarse antes de que transcurran 10^{-6} s de haberse producido el acto primario de ionización. Una cámara de este tipo es una instalación compleja y cara que está ya tan lejos de la cámara de Wilson como un acelerador de partículas moderno de un tubo electrónico.

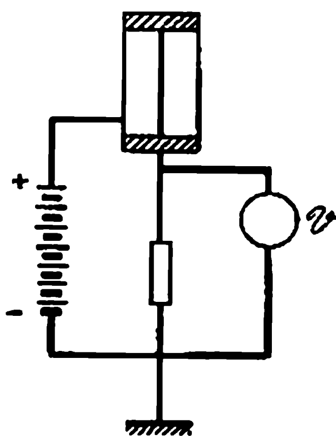


FIG. 237a.

CONTADORES DE IONIZACIÓN Y CÁMARAS DE IONIZACIÓN. Los aparatos de ionización que se utilizan para trabajar con la radiación consisten en la mayoría de los casos en un condensador cilíndrico, lleno de gas; uno de los electrodos es una armadura cilíndrica y el otro, un filamento o punta situado a lo largo del eje del cilindro (fig. 237a). La tensión que se aplica al condensador y la presión del gas que llena el contador deben elegirse especialmente, de acuerdo con el problema que se plantea. En la variante ordinaria de este aparato, llamada *contador de Geiger*, al cilindro y al filamento se aplica la tensión disruptiva. Si a través de la pared o de un extremo

de este contador entra en él una partícula ionizadora, a través del condensador pasará un impulso de corriente, que continuará hasta que los electrones primarios y los electrones e iones creados por ellos en la descarga automantenida lleguen a la armadura positiva del condensador. Este impulso de corriente puede reforzarse por los métodos radiotécnicos ordinarios y el paso de la partícula a través del contador puede registrarse por medio de un chasquido, de un destello luminoso o de un contador numérico.

Este aparato puede contar la cantidad de partículas que entran en él. Para esto sólo es necesario que el impulso de corriente se interrumpa antes del instante en que en el contador penetre la partícula siguiente. Si el régimen de funcionamiento del contador está mal calculado, éste empieza a «ahogarse» y a contar mal. El poder separador del contador de ionización es limitado, pero suficientemente grande: de hasta 10 000 partículas por segundo.

Puede disminuirse la tensión y conseguir un régimen en el cual pase a través del condensador un impulso de corriente proporcional al número de iones formados (contador proporcional). Para esto debe funcionar en la región de descarga en gas mantenida. Los electrones primarios, al moverse en el campo eléctrico del condensador, acumulan energía. Comienza la ionización por choque y se crean nuevos iones y electrones. Los n pares de iones creados por la partícula que entra en el contador, se transforman en kn pares de iones. Como el aparato funciona con régimen de descarga mantenida, el coeficiente de intensificación k será una magnitud constante y los contadores proporcionales no sólo constatan el hecho del paso de la partícula a través de ellos, sino que miden también su poder ionizador.

En los contadores proporcionales, lo mismo que en los de Geiger, la descarga se apaga en cuanto cesa la ionización. El contador de Geiger se diferencia en que, en él, la partícula que llega actúa como si fuera un mecanismo disparador, y el tiempo de ruptura no está en relación con la ionización inicial.

Como los contadores proporcionales reaccionan al poder de ionización de la partícula, su régimen de funcionamiento se puede regular de tal modo, que sólo registren partículas de un tipo determinado.

Si el aparato funciona con régimen de corriente de saturación (lo que puede lograrse disminuyendo la tensión), la corriente que pasa por él será medida de la energía de la radiación absorbida por el volumen del aparato en la unidad de tiempo. En este caso el dispositivo recibe el nombre de *cámara de ionización*. El coeficiente de intensificación k es entonces igual a la unidad. La ventaja de la cámara de ionización es su gran estabilidad en el funcionamiento. Las estructuras de las cámaras de ionización pueden variar muchc.

El relleno de la cámara, los materiales de las paredes y el número y la forma de los electrodos varía en dependencia del objeto que tenga la investigación. Junto a cámaras diminutas, cuyo volumen es del orden de un milímetro cúbico, nos encontramos con cámaras cuyo volumen es de centenares de metros. Por la acción de una fuente continua de ionización, en las cámaras se producen corrientes cuyos límites se hallan entre 10^{-17} y 10^{-7} A.

CONTADORES DE CENTELLEO. El método de contar los destellos de una sustancia fluorescente (centelleo) como medio para determinar el número de partículas elementales fue utilizado la primera vez por E. Rutherford para sus investigaciones clásicas de la estructura del núcleo atómico. Las encarnaciones modernas de esta idea recuerdan poco al modesto aparato de Rutherford.

La partícula provoca un destello luminoso en una sustancia sólida (fósforo *) o luminóforo). Se conoce un número bastante grande de sustancias orgánicas e inorgánicas capaces de transformar la energía de las partículas cargadas y de los fotones en energía luminosa. Muchos fósforos poseen una luminiscencia residual de duración muy pequeña, del orden de milmillonésimas de segundo. Esto da la posibilidad de hacer contadores de centelleo muy rápidos. En una serie de fósforos el rendimiento luminoso es proporcional a la energía de las partículas. Esto permite construir contadores para apreciar la energía de las partículas.

En los contadores modernos los fósforos se combinan con fotomultiplicadores, que tienen fotocátodos ordinarios sensibles a la luz visible. La corriente eléctrica que se crea en el multiplicador, se amplifica y después se envía al dispositivo contador.

Los luminóforos que más se utilizan son los orgánicos: el antraceno, el estilbeno, el terfenilo, etc. Todos estos compuestos químicos pertenecen a la clase de los llamados compuestos aromáticos, formados por hexágonos de átomos de carbono. Para su utilización en calidad de centelleadores hay que tomar estas sustancias en forma de monocristales. Como el cultivo de grandes monocristales es algo difícil, y como los cristales de los compuestos químicos son bastante frágiles, ofrece gran interés el empleo de centelleadores plásticos, es decir, de las llamadas disoluciones sólidas de luminóforos orgánicos en plásticos transparentes, como el poliestireno u otra sustancia superpolímera análoga. De los luminóforos inorgánicos se utilizan haluros de los metales alcalinos, sulfuro de zinc y volframatos de metales alcalinotérreos.

CONTADORES DE CHERENKOV. P. A. Cherenkov demostró ya en el año 1934 que cuando una partícula cargada se mueve rápida-

*) Se da este nombre a un gran grupo de sustancias que, en general, nada tienen de común con el elemento químico llamado fósforo.

mente en un dieléctrico sólido o líquido completamente puro, se produce una luminosidad especial, que difiere esencialmente tanto de la fluorescencia, debida a las transiciones energéticas que tiene lugar en los átomos de la sustancia, como de la de frenado, del tipo del espectro continuo de rayos X. La radiación de Cherenkov se produce cuando la partícula cargada se mueve con velocidad mayor que la velocidad de fase de propagación de la luz en el dieléctrico. La peculiaridad fundamental de esta radiación consiste en que se propaga, según una superficie cónica, hacia adelante, en dirección en que se mueve la partícula. El ángulo del cono se determina por la fórmula

$$\cos\theta = \frac{v}{V},$$

donde θ es el ángulo que forma la generatriz del cono con la dirección en que se mueve la partícula, V es la velocidad de esta última, y v, la velocidad de la luz en el medio. De este modo, para un medio de índice de refracción n dado, existe una velocidad crítica $V=v=$ $=c/n$, por debajo de la cual no se producirá la radiación. A esta velocidad crítica la radiación será paralela a la dirección en que se mueve la partícula. Si la partícula que se mueve a una velocidad muy próxima a la de la luz ($v=c$), el ángulo de radiación será máximo $\theta=\text{arc}\cos(1/n)$. Para el ciclohexano, $n=1{,}437$ y $\theta=46°$.

El espectro de la radiación de Cherenkov, como demuestra la experiencia y la teoría, se encuentra principalmente en la región visible.

La radiación de Cherenkov es un fenómeno parecido a la onda de proa que se forma cuando un barco se mueve en el agua; en este

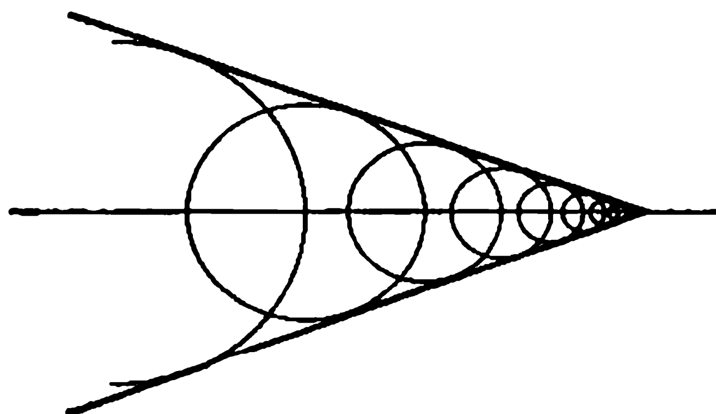


FIG. 237b.

caso la velocidad del barco es mayor que la de la onda en la superficie del agua. La fig. 237b ilustra el origen de esta radiación. La partícula cargada se mueve a lo largo de la línea axil y de camino

el campo electromagnético que sigue a la partícula polariza temporalmente el medio en los puntos de la trayectoria de la partícula. Todos estos puntos se convierten en focos de ondas esféricas. Existe un solo ángulo con el cual estas ondas esféricas coinciden en fase y forman un frente único.

Consideremos dos puntos situados en el camino de la partícula cargada (fig. 237c). Estos puntos han creado sendas ondas

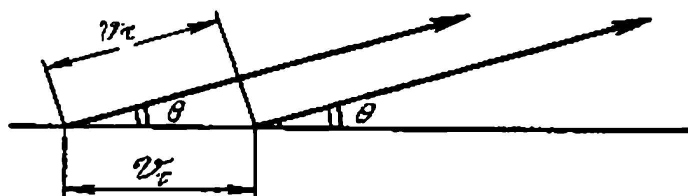


FIG. 237c.

esféricas: una en el instante t y otra en el instante $t+\tau$. Es evidente que τ es el tiempo que tarda la partícula en recorrer la distancia entre dos puntos. Para que las dos ondas se propaguen formando un ángulo θ en una misma fase, es necesario que el tiempo de marcha del primer rayo sea mayor que el tiempo de marcha del segundo en un tiempo τ. El camino recorrido por la partícula en el tiempo τ es igual a $V\tau$. La onda recorrerá en este tiempo una distancia $v\tau$. De aquí se deduce la fórmula citada anteriormente: $\cos\theta = v/V$.

La radiación de Cherenkov se utiliza mucho últimamente como procedimiento para registrar las partículas elementales. Los contadores que se basan en este efecto se llaman *contadores de Cherenkov*. La sustancia luminiscente, lo mismo que en los contadores de centelleo, se une a fotomultiplicadores y amplificadores de la corriente fotoeléctrica. Existen muchos tipos de contadores de Cherenkov.

Estos contadores tienen muchas ventajas. Entre ellas, la gran rapidez con que cuentan y la posibilidad que dan de determinar las cargas de las partículas que se mueven con velocidad muy próxima a la de la luz (no hemos dicho que el rendimiento luminoso depende mucho de la carga de la partícula). Sólo con los contadores de Cherenkov pueden resolverse problemas tan importantes como la determinación directa de la velocidad de una partícula cargada, la dirección en que se mueve una partícula ultrarrápida, etc.

INSTALACIÓN DE LOS CONTADORES. Para estudiar los diversos procesos de transformación e interacción de las partículas elementales no sólo hay que tener la posibilidad de señalar la aparición de la partícula en un punto dado, sino también de analizar la suerte ulterior de esta misma partícula. Estos problemas se resuelven valiéndose de instalaciones especiales de contadores con es-

quema de cómputo generalizado. Por ejemplo, los circuitos eléctricos de dos o más contadores pueden unirse de tal modo que sólo cuenten en el caso en que la descarga en todos los contadores se inicie exactamente al mismo tiempo. Esto puede servir para demostrar el paso de una misma partícula por todos los contadores. Este tipo de conexión de los contadores se llama «montaje en coincidencia».

MÉTODO DE LAS EMULSIONES FOTOGRÁFICAS GRUESAS. Como es sabido, la capa sensible de las placas fotográficas es una película de gelatina en la cual se han introducido microcristales de bromuro de plata. El fundamento del proceso fotográfico es la ionización de estos cristalitos, como resultado de la cual se produce la reducción del bromuro de plata. Este proceso ocurre no sólo por la acción de la luz, sino también por la de las partículas cargadas. Si a través de la emulsión pasa una partícula cargada, en aquella aparece una traza latente, que puede verse si se revela la placa fotográfica. Las trazas en la emulsión fotográfica proporcionan muchos detalles acerca de la partícula que las provocó. Las partículas fuertemente ionizadoras dejan huellas más gruesas. Como la ionización depende de la carga y de la velocidad de las partículas, el solo aspecto de la traza dice ya mucho. Datos muy valiosos proporciona el recorrido de la partícula en la emulsión fotográfica; midiendo la longitud de la traza se puede determinar la energía de la partícula.

La investigación valiéndose de placas forográficas ordinarias, con emulsiones delgadas, es poco apta para los fines de la física nuclear. Estas placas registrarían únicamente aquellas partículas que se mueven rigurosamente a lo largo de la placa.

Los físicos soviéticos L. V. Misovski y A. P. Zhdánov, y varios años después el inglés C. F. Powell, introdujeron en la práctica placas fotográficas cuya emulsión tiene un espesor de cerca de 1 mm (el espesor de las placas ordinarias es cien veces menor). El método fotográfico es valioso por ser intuitivo y porque da la posibilidad de observar la imagen compleja de la transformación que ocurre cuando se produce la ruptura de una partícula cualquiera.

La fig. 238 representa una fotografía característica obtenida por este procedimiento. En los puntos P y S tuvieron lugar transformaciones nucleares.

En la última variante de este método, en calidad de medio en el cual se registran los recorridos de las partículas, se utilizan cámaras de emulsión de volumen considerable.

MÉTODOS DE ANÁLISIS DE LAS OBSERVACIONES. Valiéndose de los aparatos descritos, el investigador tiene la posibilidad de determinar todas las constantes principales de la partícula elemental: su velocidad y energía, su carga eléctrica y su masa; todos estos parámetros pueden ser determinados con una exactitud suficientemente grande. Cuando se dispone de un flujo de partículas, se puede

hallar también el valor del espín de la partícula elemental y de su momento magnético. Esto se consigue mediante el mismo experimento de desintegración del haz en un campo magnético que describimos en la pág. 204.

Conviene recordar que directamente sólo se observan las partículas con carga. Todos los datos acerca de las partículas neutras y de los fotones se obtienen indirectamente estudiando el carácter de la acción de estas partículas invisibles sobre las cargadas. Los datos que se obtienen acerca de las partículas invisibles tienen, no obstante, un alto grado de autenticidad.

Un papel importante en la investigación de todo tipo de transformaciones de partículas lo desempeña la aplicación de las leyes de conservación del impulso y de la energía. Como quiera que operamos con partículas rápidas, al aplicar la ley de conservación de la energía hay que tener en cuenta la posible variación de la masa.

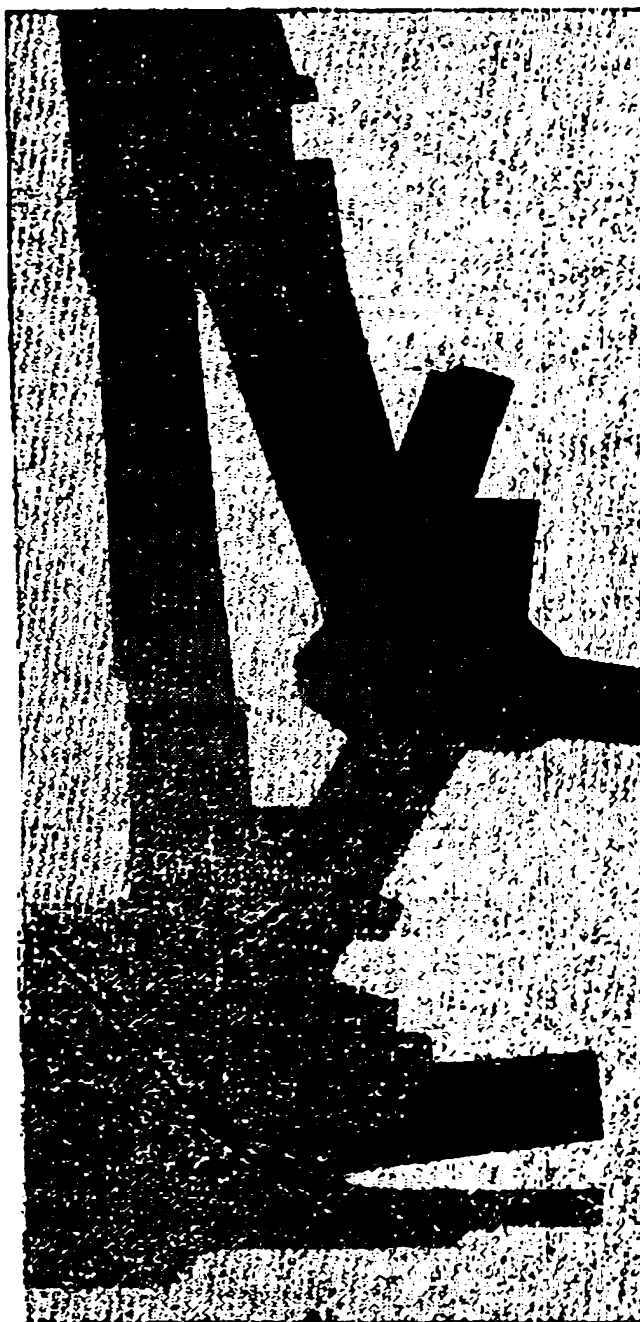


FIG. 238.

Supongamos que en una fotografía se observa la traza en forma de «horquilla» de unas partículas. La primera partícula se transformó en dos: la segunda y la tercera. En este caso deben cumplirse las siguientes relaciones. En primer lugar, el impulso de la primera partícula debe ser igual a la suma vectorial de los impulsos de las partículas que surgen:

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3.$$

Además, entre las energías cinéticas de las partículas debe existir la relación

$$K_1 = K_2 + K_3 + \Delta\mathscr{E},$$

donde $\Delta\mathscr{E} = c^2\Delta m$, y Δm es la diferencia de masas $(m_2 + m_3) - m_1$.

Toda la experiencia de la física nuclear demuestra que las leyes de conservación se cumplen rigurosamente en todas las transformaciones de las partículas elementales. Esto permite utilizar dichas leyes para conocer las propiedades de una partícula neutra que no deje huella en la emulsión fotográfica y que no ionice al gas. Si en una fotografía se ven dos trayectorias divergentes, para el investigador está claro que en el punto a partir del cual se separan las trazas ocurrió la transformación de una partícula neutra. Determinando los impulsos, las energías y las masas de las partículas aparecidas pueden hacerse deducciones seguras acerca de los parámetros de la partícula neutra. Así se descubrió el neutrón, y por estos procedimientos podemos juzgar acerca del neutrino y de los mesones neutros, de los cuales trataremos más adelante.

§ 208. Partículas que entran en la composición del núcleo

Los núcleos atómicos de los elementos están constituidos por protones y neutrones.

Las características fundamentales del protón, como de toda partícula elemental, son: su carga, masa, espín y momento magnético. El protón es portador de una carga eléctrica elemental positiva, es decir, su carga es igual que la del electrón en magnitud, pero inversa por su signo. La masa del protón es igual a $1{,}6725 \cdot 10^{-24}$ g, es decir, 1836 veces mayor que la masa del electrón. El espín del protón es igual a 1/2, y el momento magnético, a $1{,}41 \cdot 10^{-23}$ u. CGS.

La masa del neutrón es un poco mayor que la masa del protón, siendo igual a $1{,}6748 \cdot 10^{-24}$ g. El espín del neutrón también es 1/2. Su momento magnético es antiparalelo al espín e igual a $0{,}966 \cdot 10^{-23}$ u. CGS.

El neutrón no es portador de carga eléctrica y no deja huella en la cámara de Wilson ni en la placa fotográfica. El principal procedimiento de investigar las propiedades del neutrón es el estudio de sus colisiones con otros núcleos. Conociendo la masa y la velocidad del núcleo a que va a parar el neutrón, puede determinarse la velocidad v_n y la masa M_n de este último. En efecto, según las leyes del choque elástico (véase la pág. 71)

$$v_N = \frac{2M_n}{M_n + M_N} v_n,$$

donde M_n y v_n son magnitudes que desconocemos. Analizando las colisiones de los neutrones con diferentes núcleos, puede determinarse M_n, aunque claro está, sin pretender una exactitud especial, ya que hay que suponer que las velocidades iniciales v_n de los neutrones son iguales en las distintas colisiones. El valor exacto de M_n se ha hallado por medio de reacciones nucleares, partiendo de los valores del defecto de masa (véase más adelante).

El espín y el momento magnético de los neutrones fueron determinados directamente haciendo mediciones muy interesantes de un flujo de neutrones que pasaba a través de un hierro imantado. Pero en esta cuestión no nos detendremos.

§ 209. *Masa y energía del núcleo atómico*

La característica del núcleo que define la designación química de un elemento es su número de protones Z. El número del orden del átomo en la tabla de Mendeléiev viene determinado precisamente por el número de protones Z.

En cada veriedad química de átomos pueden existir varios isótopos que difieran entre sí por el número de neutrones que hay en sus núcleos. El isótopo de un elemento dado se caracteriza por el número másico (o de masa) M, que es igual al número total de protones y neutrones que hay en el núcleo atómico *). Por lo tanto, el número de neutrones que hay en el núcleo es igual a $M-Z$.

Los cuerpos químicos simples de origen natural son mezclas de isótopos. La composición isotópica de las sustancias naturales es por lo general invariable y, por lo tanto, característica del elemento químico. Frecuentemente uno de los isótopos predomina claramente en la mezcla. Por ejemplo, el hidrógeno se encuentra en la naturaleza en forma de hidrógeno ordinario H^1 y de deuterio $H^2=D$, el primero, en la cantidad de un 99,98% y el segundo, en la de un 0,02%. El isótopo del oxígeno O^{16} constituye el 99,76% del oxígeno natural. El isótopo principal del uranio U^{238} constituye el 99,28% del uranio natural.

Llamemos M_0 a la masa del isótopo del carbono C^{12}. La magnitud $\frac{1}{12}M_0$ se llama *unidad atómica de masa*. En estas unidades

*) Los núcleos de los diversos isótopos se designan con el símbolo del elemento químico correspondiente. En su parte superior derecha se escribe el número másico. En la inferior izquierda se suele indicar el número de orden Z del elemento, aunque esto no es necesario, ya que el símbolo químico determina de por sí a Z. Así, por ejemplo, los tres isótopos del oxígeno pueden designarse por O^{16}, O^{17}, O^{18} ó ${}_8O^{16}$, ${}_8O^{17}$, ${}_8O^{18}$. En los nucleos atómicos de estos isótopos hay respectivamente 8, 9 y 10 neutrones ($M-Z$).

relativas se suelen expresar los pesos atómicos A de los isótopos y de los elementos.

Por medio de mediciones exactas se ha llegado a establecer que una unidad de masa atómica es igual a la masa de $1{,}6604 \cdot 10^{-24}$ g. El valor absoluto de la masa A (en gramos) de cualquier isótopo se halla por la fórmula

$$M_A = 1{,}6604 \cdot 10^{-24} A.$$

La masa del electrón es 1836 veces menor que la masa del protón. La masa del átomo casi coincide con la de su núcleo. Pero teniendo en cuenta la exactitud con que se mide actualmente, esta diferencia puede ser encontrada en toda una serie de casos, sobre todo en los átomos ligeros, y debe tomarse en consideración. Es evidente que entre la masa M_A del núcleo y la masa M_N del átomo de un elemento A existirá la relación

$$M_N = M_A - Zm.$$

En unidades atómicas de masa $m = 5{,}486 \cdot 10^{-4}$ *). Por consiguiente, la diferencia, entre M_A y M_N es de centésimas y, en los átomos pesados, de milésimas de tanto por ciento.

Los pesos atómicos relativos de los isótopos se aproximan a los números de masa, pero no son iguales a ellos. Por ejemplo, la masa del H^1 es igual a 1,00807, la masa del D^2 es igual a 2,01463, la del Ne^{20} es igual a 19,9972, etc.

Estudiando con atención la tabla de las masas de los isótopos se puede llegar a la siguiente conclusión importante: la masa de los núcleos es menor que la suma de masas de las partículas elementales que los constituyen. Por ejemplo, la masa del neutrón es 1,00888, y la del protón, 1,00807; la masa de dos neutrones y dos protones es igual a 4,0339. Pero la masa del átomo de helio, que está constituido por dos neutrones y dos protones, no es igual a dicha cifra, sino a 4,0038. Es decir, la masa del núcleo de helio es menor que la suma de las masas de las partículas que lo forman en 0,0301 unidades atómicas, cantidad que supera mil veces la exactitud de la medición.

La diferencia entre las masas de las partículas elementales que constituyen el núcleo y la masa de este último es un ejemplo muy importante de *defecto de masa*. A cada núcleo le corresponde un defecto de masa determinado.

Una de las deducciones más importantes de la teoría de la relatividad es el principio de la equivalencia de la masa y la energía (pág. 448). Este principio dice: si un sistema adquiere o pierde una

*) Esta cifra se obtiene dividiendo la masa del electrón, en gramos, por $1{,}6604 \cdot 10^{-24}$ g.

cantidad de energía $\Delta\mathscr{E}$, la masa de este sistema aumenta o disminuye respectivamente en una magnitud $\Delta m = \Delta\mathscr{E}/c^2$. El defecto de masa del núcleo (desde el punto de vista de este principio) tiene una explicación natural: es la medida de la energía de enlace de las partículas nucleares.

Aclararemos lo que significa esta afirmación. En química y en física se entiende por energía de enlace el trabajo que hay que realizar para romper totalmente dicho enlace. Si se consiguiera dividir el núcleo en partículas elementales, como ya dijimos antes, la masa del sistema aumentaría en una cantidad igual al defecto de masa Δm; esto significa, desde el punto de vista de la ley de Einstein, que al núcleo se le comunicó una energía $\Delta\mathscr{E} = c^2\Delta m$, que no es más que la energía de enlace. De aquí hallamos que la variación de la masa en una unidad atómica de masa equivale a la variación de la energía en $1{,}6604\cdot 10^{-24}\cdot 9\cdot 10^{20}$ erg$=1{,}496\cdot 10^{-3}$ erg$=931{,}8$ MeV (1 eV$=1{,}602\cdot 10^{-12}$ erg; 1 MeV$=10^6$ eV). Utilizando estas cifras y conociendo la magnitud del defecto de masa, se puede calcular sin dificultad la energía de enlace de los núcleos atómicos.

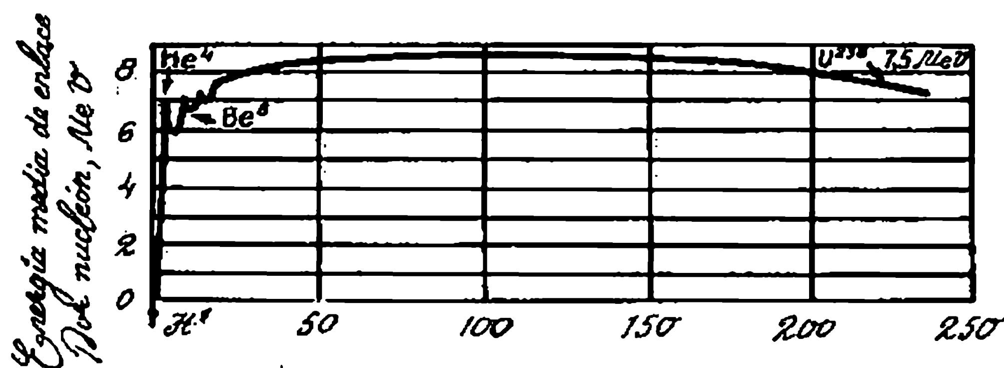


FIG. 239.

La fig. 239 representa la curva de la energía de enlace del núcleo referida al número de partículas que tiene dicho número, es decir, la magnitud $c^2\Delta m/M$. Sobre el eje de abscisas se ha tomado el número de masa. Esta curva demuestra que la energía de enlace por partícula nuclear crece rápidamente al principio, aunque de un modo no completamente regular, después se estabiliza aproximadamente en 8 MeV y, finalmente, decrece un poco para los últimos elementos de la tabla de Mendeléiev. El hecho de la constancia del número 8 MeV se interpreta del modo siguiente. Como la energía de enlace está calculada para una partícula, y no depende del número total de partículas que hay en el núcleo, en éste sólo tiene lugar la interacción entre las partículas más próximas. De aquí se deduce, en particular, la conclusión de que las fuerzas nucleares

sólo actúan cuando las partículas se acercan hasta una proximidad inmediata (véase más adelante).

Resulta ilustrativo comparar la magnitud 8 MeV con las energías del enlace químico de las moléculas. Estas últimas son iguales, por lo general, a varios electrón-voltios por átomo. Por consiguiente, la energía necesaria para desintegrar una molécula en átomos es varios millones de veces menor que la necesaria para desintegrar un átomo.

De las fuerzas nucleares trataremos después. Sin embargo, de los ejemplos que hemos puesto se deduce claramente que estas fuerzas alcanzan valores enormes cuando se produce la ruptura del núcleo. También es evidente que las fuerzas nucleares son fuerzas de un tipo nuevo, ya que son capaces de acoplar partículas cargadas con electricidad de igual signo. Las fuerzas nucleares no pueden reducirse a eléctricas.

§ 210. Espín y momento magnético del núcleo

Los nucleones que forman el núcleo tienen espín y, por lo tanto, momento magnético. El hecho de que el electrón tenga espín no es, pues, una propiedad particular suya. Las partículas elementales pueden poseer espín; la interpretación gráfica de este hecho es tan inútil como perniciosa; ya advertimos al lector que la imagen de la partícula que gira alrededor de su eje es completamente convencional, porque el espín de la partícula carece de interpretación clásica.

El impulso de rotación de una partícula cualquiera, y, por lo tanto, del núcleo atómico, puede representarse por medio de la fórmula

$$\sqrt{s(s+1)} \cdot \frac{h}{2\pi},$$

y la proyección del espín sobre la dirección destacada puede tomar $2s+1$ valores, desde s hasta $-s$. Generalmente se da el nombre de espín, no a la expresión que acabamos de escribir, sino al número s que la determina.

De acuerdo con las leyes de la mecánica cuántica, la diferencia $2s$ entre los valores mayor y menor del espín debe ser igual a un número entero o a cero. Por esto el espín de la partícula puede ser igual a 0, 1/2, 1, 3/2, ...

Los espines del neutrón y del protón, lo mismo que el del electrón, son iguales a 1/2.

Observando la tabla de valores de los espines de diversos núcleos atómicos, descubrimos una serie de regularidades interesantes. En primer lugar, en los núcleos que contienen un número par de protones y un número par de neutrones, el espín del núcleo es nulo

(He, C^{12}, O^{16}). El número de nucleones múltiplo de cuatro desempeña en general un gran papel. En muchos casos (aunque dista mucho de ser en todos) el espín del núcleo atómico puede obtenerse del modo siguiente: se resta de M el número múltiplo de cuatro más próximo a ella, y la diferencia se multiplica por 1/2. Por ejemplo, el espín del Li^6 es $1=2\times\frac{1}{2}$; el del Li^7 es 3/2; el del B^{10}, 1; y el del B^{11}, 3/2.

Hay un hecho bastante evidente que constituye una regla sin excepciones: los núcleos con M par, tienen espín entero o nulo, y los núcleos con M impar, espín múltiplo de 1/2.

Los espines de los núcleos atómicos se determinan por la estructura hiperfina de los espectros ópticos. El desdoblamiento de los niveles energéticos, aunque sea insignificante, se mide con bastante seguridad. Este desdoblamiento se produce porque a distintas orientaciones mutuas del espín del electrón y del espín del núcleo corresponden energías distintas.

El estudio del material acerca de los espines de los núcleos nos lleva a la conclusión de que el principio de Pauli es aplicable a los protones y neutrones del núcleo. Dos partículas idénticas sólo pueden estar en un mismo nivel de energía si sus espines son antiparalelos. Pero como el protón y el neutrón son partículas distintas, en un nivel puede haber dos protones y dos neutrones. En este grupo compacto de espín nulo reconocemos al núcleo del átomo de helio (partícula α).

La existencia de espín denota la existencia de momento magnético. Entre el impulso de rotación L y el momento magnético M debe existir una proporcionalidad directa, pudiendo ser el momento magnético paralelo o antiparalelo al espín.

Si el espín de una partícula (compuesta o simple) es igual a s, su momento magnético puede escribirse de la forma

$$M = g\mu s,$$

donde μ es el magnetón elemental, igual a $\frac{eh}{4\pi mc}$, m es la masa de la partícula, y g es un factor adimensional. Esta igualdad es la generalización de la relación que consideramos en la pág. 541 para el electrón. Para esta partícula $s=1/2$ y g debe suponerse igual a 2, para conseguir que el resultado coincida con la experiencia.

Partículas distintas (no sólo complejas, sino también simples) tienen diferentes valores de g. Así, por ejemplo, el factor g del neutrón es 3,8206, y el del protón, 5,5791.

En el magnetón elemental figura la masa de la partícula. Sin embargo sólo se suelen utilizar dos valores de magnetones: el magnetón de Bohr para las partículas ligeras, y el magnetón nuclear

(calculado para el protón) $\mu_N=(1/1836)\mu_B$ para las partículas pesadas. Los valores del factor g que hemos dado antes están calculados para μ_N.

Hasta ahora no existe una teoría que relacione los factores g y los momentos magnéticos con la estructura del núcleo.

§ 211. *Fuerzas de interacción de los nucleones*

Los datos fundamentales acerca de las fuerzas nucleares pueden obtenerse estudiando la dispersión de las partículas. De los primeros experimentos de dispersión de partículas α realizados por Rutherford se podía deducir ya que el radio de acción de las fuerzas nucleares es muy pequeño. Los experimentos de Rutherford se explicaron cuantitativamente suponiendo que la desviación de las partículas α se debe a la repulsión eléctrica entre partículas con carga de igual signo. En este caso la teoría coincidía con la experiencia incluso cuando la partícula α pasaba casi tocando al núcleo dispersor. Por lo tanto, basta que dos partículas nucleares se encuentren a la más mínima distancia una de otra, para que entre ellas sólo actúen las fuerzas eléctricas y las nucleares no se dejan sentir.

Unos resultados más directos dan los experimentos de dispersión de neutrones por protones. Para esto un haz de neutrones se hace pasar a través de hidrógeno en estado gaseoso. La experiencia demuestra que sólo una pequeña parte de los neutrones se encuentra con núcleos de átomos de hidrógeno. En cuanto a los neutrones dispersados, se distribuyen uniformemente por los ángulos. Este resultado difiere radicalmente de la figura de dispersión de las partículas α, es decir, de la dispersión debida a las interacciones eléctricas, donde la desviación siempre existe, aunque es pequeña cuando la partícula α pasa lejos del núcleo, y grande, cuando su trayectoria está próxima al núcleo dispersor. La figura que se observa en la dispersión de neutrones por protones nos conduce a reconocer que el radio de acción de las fuerzas nucleares es muy pequeño. De este experimento se deduce con seguridad un valor de este radio de acción del orden de $2\cdot 10^{-13}$ cm.

El estudio de la dispersión de los protones por neutrones da este mismo valor del radio de acción. Las experiencias y los cálculos son aquí algo difíciles, ya que hay que «restar» de la dispersión todo lo que depende de la interacción eléctrica pura. Sin embargo, las observaciones llevadas a cabo con altas energías y bajo ángulos grandes dan la posibilidad de hacer estos cálculos. Es de lamentar que no sea posible hacer experimentos directos de dispersión de neutrones por neutrones. No obstante, una serie de hechos indirectos hacen que sea indudable el que, en este caso, las propiedades de

las fuerzas nucleares sigan siendo las mismas. He aquí un ejemplo de este razonamiento: se puede comparar la energía de enlace y el comportamiento en las colisiones del tritio (isótopo del hidrógeno de masa 3) y del isótopo del helio de la misma masa. En el primer caso el núcleo está formado por dos neutrones y un protón, en el segundo, de dos protones y un neutrón. La energía de enlace del helio es mayor exactamente en la magnitud que da la interacción eléctrica entre dos protones. Todas estas experiencias y razonamientos conducen a concluir que las fuerzas nucleares que actúan entre los nucleones son independientes de las cargas eléctricas de las partículas que interaccionan.

Los experimentos de dispersión de nucleones llevan también a la conclusión de que esta interacción tiene carácter de cambio. Este término se utiliza cuando las partículas que se encuentran cambian sus propiedades: la partícula que era protón se transforma en neutrón y viceversa. La necesidad de que esto sea así se deduce del experimento de dispersión, por protones, de un haz de neutrones de energías bastante grandes (decenas de veces mayores que la energía potencial de la interacción de los protones con los neutrones). En este experimento podría esperarse que la mayoría de los neutrones pasara a través del hidrógeno sin dispersarse. Pero en realidad, el haz dispersado hacia adelante está formado por un número igual de neutrones y protones.

El problema de las fuerzas nucleares se complica considerablemente por su dependencia de la disposición de los espines de los núcleos. Las fuerzas nucleares pierden a causa de esto su carácter central (es decir, la fuerza no actúa a lo largo de la línea que une los centros de las partículas).

Sin embargo, promediando esta dependencia pueden caracterizarse las fuerzas nucleares por un potencial de interacción del mismo tipo que el que consideramos para la molécula. En la fig. 240 se muestra esta curva para dos nucleones (denominación común que se da al protón y al neutrón). La energía de interacción se ha tomado en MeV, y la distancia, en fermios (1 fermio $=10^{-13}$ cm). A la distancia de 4 fermios ya no actúan las fuerzas nucleares. Para que pueda compararse con la interacción electrostática, en la figura se ha trazado la curva punteada. Esta curva representa el potencial electrostático de dos cargas de signo contrario iguales a 3,3 veces la carga del electrón. A la distancia de dos fermios las energías de interacción son iguales. Entre estas curvas está claro que no existe analogía.

Las curvas de este tipo se construyen basándose en experimentos con diferentes núcleos. Las ordenadas y las abscisas de los pozos de potencial oscilan entre límites no muy grandes (5—20 eV, un fermio).

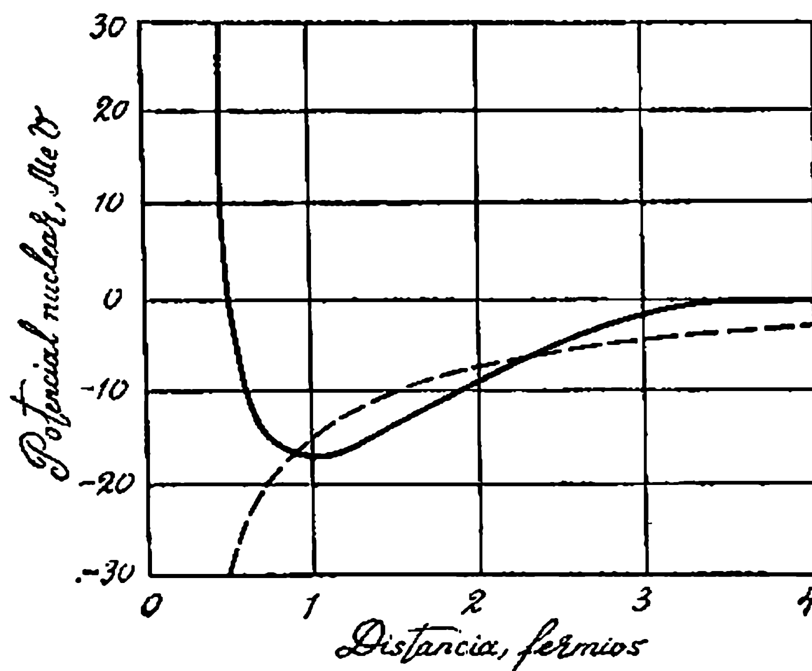


FIG. 240.

§ 212. Los nucleones en el núcleo

Es indudable que los nucleones están muy apretados dentro del núcleo atómico. En razonable acuerdo con una serie de datos experimentales está la siguiente fórmula del «radio» del núcleo:

$$R = k\sqrt[3]{M}.$$

Aquí M es el número másico, y $k = 1{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm. Esta fórmula fue deducida para los núcleos pesados, pero su validez para los núcleos ligeros no ofrece dudas. Si el radio del núcleo es proporcional a la raíz cúbica del número de partículas, su volumen será proporcional a la primera potencia de dicho número. Esta circunstancia hace suponer que, por lo menos en una aproximación burda, los nucleones están empaquetados en el núcleo con densidad uniforme.

Está claro que no podemos construir un modelo geométrico del núcleo atómico y determinar las trayectorias de los nucleones en el núcleo, puesto que los nucleones son de naturaleza ondulatoria.

En cierta aproximación podemos suponer que cada nucleón se mueve en el campo de todos los demás. Este nucleón tendrá un sistema de niveles energéticos que pueden llenarse sucesivamente yendo de los núcleos ligeros a los más pesados. El nivel más bajo, lo mismo que en el caso de los electrones, no debe poseer impulso de rotación. De acuerdo con el principio de Pauli, en este nivel más

bajo pueden alojarse dos neutrones y dos protones, cada pareja con los espines opuestos, es decir, una partícula α. Considerando de un modo análogo los átomos más pesados, también se consigue destacar en los niveles siguientes grupos estables de partículas. El modelo de capas del núcleo resultó ser muy útil para determinar una serie de propiedades de éste y para explicar el grado de difusión de los isótopos.

Estudiando la composición de los núcleos atómicos, empezando por los ligeros y yendo hacia los pesados, notamos que el número de neutrones que hay en el núcleo atómico crece más de prisa que el número de protones, y en un elemento tan estable como el plomo hay 82 protones y 126 neutrones. Este aumento del número de neutrones se explica por la necesidad de equilibrar el aumento continuo de la repulsión eléctrica de los protones.

Está claro que la infracción de la igualdad del número de protones y neutrones en el núcleo lleva consigo no sólo ventajas, sino también inconvenientes. En efecto, si esta igualdad se cumpliera, podríamos llenar los niveles de energía inferiores con el número máximo de partículas, puesto que en cada estado pueden alojarse dos neutrones y dos protones de acuerdo con el principio de Pauli. Pero obrando de este modo aumentaríamos excesivamente la repulsión eléctrica y la energía total no sería la mínima. Es evidente que el caso real representa de por sí una solución de compromiso dictada por estas dos tendencias. Los fenómenos de desintegración β, tan frecuentemente observados en los elementos artificialmente radiactivos, representan la opción, en el sentido indicado, por una situación óptima. Si en un núcleo hay muchos protones o muchos neutrones, se remedia la situación emitiendo un electrón o un positrón.

§ 213. Espectros de los núcleos atómicos

Desde el punto de vista de la mecánica cuántica, cualquier sistema de partículas que interaccionen puede caracterizarse por un conjunto de niveles energéticos. El núcleo atómico puede ocupar el nivel más bajo (como ocurre con los núcleos de todos los elementos estables que se hallan en las condiciones ordinarias de la Tierra), pero por la acción de los choques con otras partículas puede pasar a un nivel excitado. La existencia en el estado excitado es siempre poco duradera, y el núcleo «desciende» cediendo la energía sobrante.

Los núcleos de los átomos de las sustancias radiactivas se encuentran en un estado excitado o pasan a dicho estado después de emitir una partícula α (véase más adelante).

La diferencia de energía entre los niveles de los núcleos es del orden de centenares de miles de electrón-voltios (en vez de unas

unidades de electrón-voltio para los niveles electrónicos del átomo). Por esta causa los núcleos son completamente inertes en las condiciones ordinarias. Las transiciones energéticas con los núcleos se estudian detalladamente bombardeándolos en aceleradores calculados para millones de electrón-voltios.

En la fig. 240a se muestran los sistemas de niveles de energía de los núcleos, el $_5B^{11}$ y el $_6C^{11}$. Estos niveles energéticos son nítidos y se miden con gran exactitud. Los valores de la energía se dan en la figura. Un par de núcleos, con igual número total de nucleones, en el cual el número de neutrones (protones) de uno de ellos sea igual al número de protones (neutrones) del otro, se llama par «especular». Es evidente que, en este caso, la diferencia entre los núcleos se reduce a la energía electrostática, que no es grande. La figura de los niveles de ambos núcleos resulta ser muy próxima, lo que ilustra una vez más la comunidad de la interacción nucleónica.

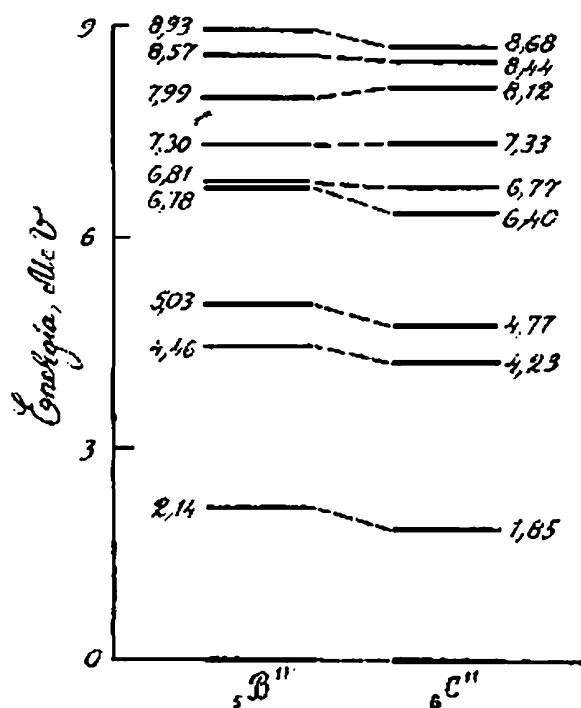


FIG. 240a.

En cada uno de los estados excitados posee el núcleo cierto conjunto de propiedades. A niveles distintos les corresponden, en general, espines y paridades diferentes e isoespines distintos. *Isoespines* (espines isotópicos) son los números con que se designan los niveles en cada multiplete isoespinorial. A este número cuántico nos referiremos más adelante, al tratar de los espectros de los nucleones. *La paridad* es una propiedad de la partícula debida a su simetría helicoidal (véase la pág. 642). Las dos variantes de esta simetría (hélice a la izquierda o hélice a la derecha) se designan por + y —.

Al pasar a un nivel más bajo, el núcleo atómico puede ceder su energía por dos procedimientos. El primero de ellos es el mismo que en el caso de la radiación del átomo es el único posible, es decir, la emisión de un fotón. Como la diferencia de energías E_2—E_1 es muy grande, se producen fotones «duros», que generalmente se llaman rayos γ. Pero también son posibles las transiciones en que se emite el llamado par de leptones. Este par puede estar formado

por un electrón y un antineutrino, o por un positrón y un neutrino (compárese con el § 225).

El cuadro de las transiciones entre los niveles de un núcleo compuesto por 12 nucleones puede verse en la fig. 240b (los números indican los espines de los estados, y los signos, la paridad).

Esta figura representa los niveles de tres núcleos. Pero estos núcleos son tres sólo formalmente. En realidad debemos considerarlos como un sistema único, entre cuyos niveles son posibles las tran-

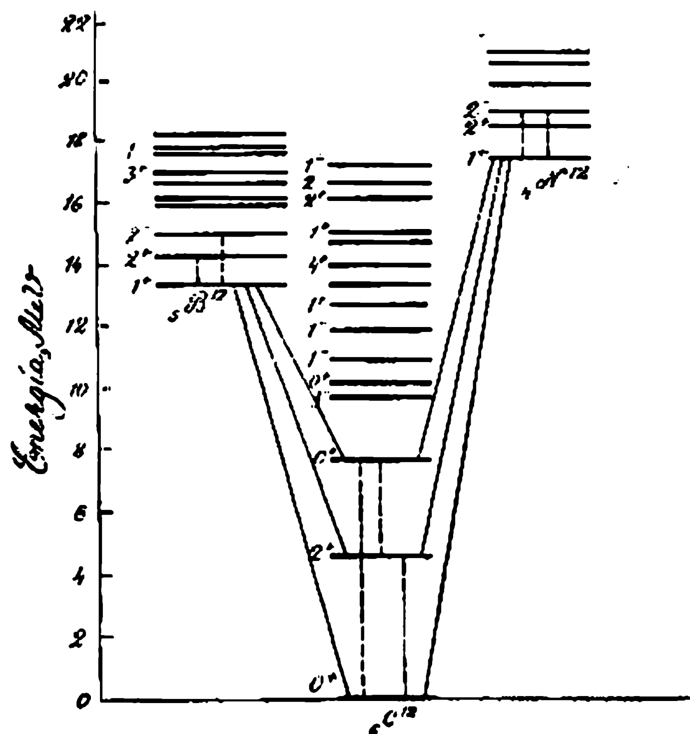


FIG. 240b.

siciones. Las líneas verticales (punteadas) indican las transiciones γ. Las líneas de trazo continuo, las transiciones con emisión de pares de leptones. Las líneas que van de izquierda a derecha hacia abajo corresponden a la expulsión de un electrón y un antineutrino, y las que van de derecha a izquierda hacia abajo, la expulsión de un positrón y un neutrino. Al ser expulsado un par de leptones, de acuerdo con la ley de conservación de la carga, un protón se transforma en neutrón o un neutrón en protón.

La diferencia entre los niveles energéticos, cuando se emite un par de leptones, no debe ser menor que la energía correspondiente a la masa del electrón, es decir, que 0,51 MeV (la masa en reposo del neutrino es nula). El resto, si es que existe, se transforma en energía cinética de los leptones.

§ 214. Neutrino de desintegración beta

La transición energética con expulsión de un par de leptones se llama desintegración β. El descubrimiento del neutrino era un problema experimental difícil que sólo pudo resolverse en el último decenio. Al principio las transiciones semejantes a la representada en la fig. 240b se describían como la transformación (desintegración) de un núcleo (radiactivo) en otro (estable) con expulsión de un electrón. No obstante, mucho antes de que el neutrino fuera descubierto su existencia era ya evidente.

Era difícil o, mejor dicho, imposible dudar de la corrección de las leyes de conservación del impulso de rotación y de la ley de conservación de la energía. En efecto, el neutrón, el protón, el electrón y el positrón tienen espín de 1/2. Como ya hemos dicho, la desintegración β transforma en el núcleo atómico un protón en un neutrón o viceversa. Pero como el número de nucleones que hay en el núcleo permanece invariable, la desintegración β no puede en modo alguno cambiar un espín par por otro impar. Precisamente esto es lo que tendría que ocurrir si en la desintegración β sólo se emitiera un electrón, que se llevaría consigo un espín de 1/2. Admitiendo la existencia del neutrino —partícula que también posee un espín de 1/2—, esta contradicción desaparece y al mismo tiempo se eliminan las dificultades para interpretar el espectro continuo de las partículas β.

Si la desintegración β sólo consistiera en la expulsión de un electrón, este electrón debería poseer una energía perfectamente determinada. Efectivamente, las energías de los niveles inicial y final, es decir, las energías del grupo primario y del nuevo núcleo, son completamente determinadas, por lo tanto, la energía del electrón emitido también debe ser totalmente determinada. Pero en realidad se observa un espectro continuo de electrones que va desde cierta velocidad máxima hasta cero. Este cuadro resulta completamente natural si se considera que durante la desintegración son expulsadas del átomo dos partículas, de acuerdo con la ecuación $n \rightleftarrows p+e+\bar{\nu}$. La energía se distribuye entre el electrón y el neutrino por la ley de la casualidad. El descubrimiento de una partícula neutra, con una masa insignificante (ahora se sabe que la masa del neutrino es menor que 0,002 de la masa del electrón), era un problema extraordinariamente difícil de resolver. Este problema sólo pudo ser resuelto en 1956. Conviene advertir que la partícula que recibió el nombre de neutrino, después, cuando se descubrió la ley de la antisimetría de las partículas elementales, resultó ser el antineutrino y se designó por $\bar{\nu}$ (véanse los §§ 225 y 226). Un gran número de actos de desintegración de neutrones debe ocurrir en un reactor nuclear, donde se forma continuamente un número enorme

de fragmentos nucleares ricos en neutrones. Un flujo de partículas $\bar{\nu}$, si éstas existen, debe salir del reactor. Si un neutrino $\bar{\nu}$ se encuentra con un protón, debe producirse la reacción $\bar{\nu}+p\rightarrow e^{+}+n$, es decir, cuando se encuentra un neutrino con un protón se forman un positrón y un neutrón. Estas reacciones deben observarse en un blanco que contenga gran números de átomos de hidrógeno (es decir, protones) y que esté situado cerca del reactor nuclear. Esta reacción debe producirse con una frecuencia extremadamente pequeña (varias veces en una hora) debido a la enorme capacidad de penetración del neutrino. Pero al mismo tiempo, cerca del reactor tiene lugar un número grandísimo de otras reacciones nucleares. Por esto son evidentes las dificultades que ofrecía el descubrimiento del neutrino.

Estas dificultades pueden salvarse destacando los rasgos específicos de esta reacción. Aparecen un positrón y un neutrón. Sabemos que el positrón se aniquila inmediatamente con un electrón de cualquiera de los átomos del blanco y da dos fotones. En cuanto al neutrón, éste recorre cierto trayecto en el blanco y después es absorbido por los átomos de las impurezas (cadmio) que pueden introducirse especialmente en el blanco. El tiempo medio de frenado hasta su absorción podemos calcularlo; este tiempo es igual a 5 μs. Cuando el cadmio absorbe un neutrón también se produce radiación γ. El problema del investigador consiste en destacar de entre todos estos sucesos, valiéndose de los medios de la técnica moderna de medición, el orden en que se producen los fenómenos: la aparición simultánea de los dos fotones y, al cabo de 5 μs, el impulso más fuerte de la radiación γ. En efecto este problema fue resuelto eficazmente y, de este modo, se demostró la existencia del neutrino.

§ 215. Leyes comunes de las transformaciones químicas y nucleares

Vamos a detenernos ahora en ciertas consideraciones energéticas generales aplicables tanto a las reacciones químicas como a las transformaciones de los núcleos atómicos o de otras partículas.

La transformación de las partículas sólo puede producirse cuando éstas se aproximan hasta ponerse en contacto. Como para que ocurra la transformación las partículas deben traer consigo cierta energía cinética, el término «choque» está completamente justificado. No todos los encuentros de partículas ocasionan transformaciones. El mecanismo de las transformaciones tanto químicas como nucleares es muy difícil de estudiar. Como las observaciones directas son imposibles, hay que limitarse a suposiciones cuya corrección puede comprobarse por las consecuencias.

En el caso de las transformaciones químicas debe desempeñar un papel importante la disposición mutua de las moléculas al chocar. Para que se produzca la reacción es necesario que las moléculas se acerquen la una a la otra en una posición conveniente para que los átomos se reagrupen.

Para cada transformación que se realice en gran escala (como suele ocurrir en las reacciones químicas y nucleares, donde se encuentran millares de millones de moléculas o de núcleos en un pequeño intervalo de tiempo), puede, en principio, indicarse el número A que, en términos aproximados, caracteriza la fracción del número total de encuentros de partículas en que la situación es «propicia» para la transformación.

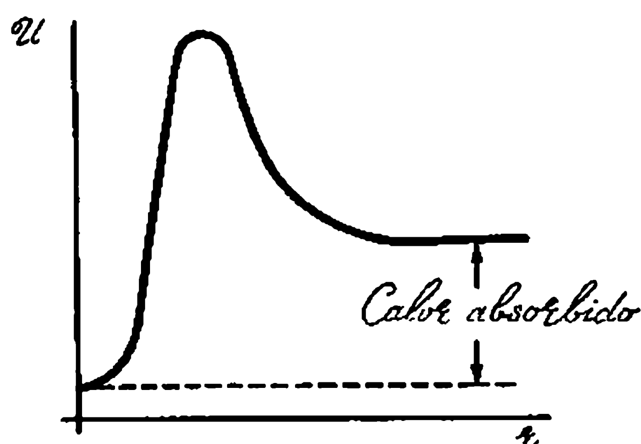


FIG. 241.

Sin embargo, la condición de que exista una orientación apropiada no es la única para la transformación. Como quiera que la partícula existe establemente y, por consiguiente, posee el mínimo de energía potencial, durante el choque hay que comunicarle cierta energía, suficiente para elevar la molécula hasta el borde del pozo de potencial en que se halla. Esta energía mínima necesaria recibe el nombre de *energía de activación*. En la fig. 241 se representa la curva de energía potencial. La partícula tiene una existencia estable cuando $r=0$, donde r es cierto parámetro. Para que se produzca la reacción hay que comunicarle la energía de activación $\mathscr{E}$; en el caso representado en la figura, la reacción se desarrolla con desprendimiento de calor.

En los choques entre moléculas o entre núcleos (en condiciones análogas) podemos aplicar la ley de Boltzmann y suponer que el número de encuentros conducentes a la transformación es proporcional a $e^{-\mathscr{E}/kT}$, donde $\mathscr{E}$ es la energía de activación.

Es evidente que la velocidad de transformación puede representarse en forma del producto $Ae^{-\mathscr{E}/kT}$, en el cual el primer factor tiene en cuenta las condiciones «geométricas» del encuentro, y el segundo, las energéticas.

De ordinario se considera especialmente las dos partículas que chocan en el instante en que la energía potencial se halla en el máximo. Este complejo activado (como se dice en química) o núcleo compuesto (como se dice cuando se estudian las transformaciones nucleares) sólo existe unos cortos instantes. El sistema formado

puede volver a «caer» en el pozo de potencial, pero también puede «saltar» el borde. En este último caso se produce la transformación y aparece un nuevo sistema que posee una nueva energía potencial.

Tanto en las transformaciones químicas como en las nucleares, el sistema que se forma puede ser una nueva partícula (reacción de adición); pero puede ocurrir también que se formen dos nuevas partículas de las dos viejas.

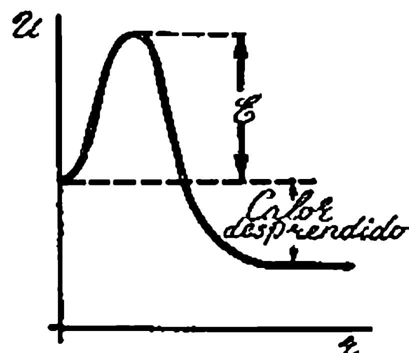


FIG. 242

Si la energía potencial de las partículas recién formadas es mayor que la energía potencial de las partículas iniciales (la profundidad del cráter del volcán es mayor que la altura de la montaña), la transformación se desarrolla con absorción de energía. El calor absorbido será igual a la diferencia entre la energía de activación y la energía de los productos de la reacción (fig. 242). Si la energía de las partículas recién formadas es menor que la energía de las partículas iniciales, el gasto de una pequeña cantidad de energía en la activación ocasiona el desprendimiento de una gran cantidad de energía.

Tanto en química como en física nuclear nos encontramos con transformaciones de ambos tipos. Las reacciones que se desarrollan con desprendimiento de calor se llaman *exotérmicas*, y las que lo hacen con absorción de calor, *endotérmicas*.

Con frecuencia las transformaciones (tanto químicas como nucleares) van acompañadas de radiación. No obstante, por regla general, el efecto energético principal de la reacción consiste en la transformación de la energía potencial de la disposición de los átomos en la molécula (o de los nucleones en el núcleo) en energía cinética de las partículas. Por esto, en términos aproximados, las transformaciones en que se desprende calor son aquellas en las cuales se encuentran dos partículas lentas y se separan otras dos rápidas. Está claro que la reacción recíproca tiene lugar en las reacciones endotérmicas.

La fórmula de la velocidad de la transformación, en la cual la temperatura figura en el exponente, hace comprensible la extraordinaria sensibilidad de las transformaciones químicas a las variaciones de la temperatura. Cuanto más alta es la temperatura, tanto más fuertes son los choques de las partículas que se encuentran. El papel de la temperatura en las transformaciones químicas es bien conocido. En las transformaciones nucleares, debido a los enormes valores que tiene la energía de enlace, el papel de las variaciones de la temperatura no salta a la vista. En efecto, la energía

de activación de los núcleos atómicos es en esencial una magnitud del orden de varios MeV. Pero la elevación de la temperatura en 3000° aumenta la energía del núcleo atómico solamente en 0,4 eV.

Las transformaciones nucleares sólo pueden acelerarse elevando la temperatura, no en miles, sino en millones de grados (véase más adelante).

§ 216. *Radiactividad*

La desintegración radiactiva es la reacción nuclear más simple. Consiste en la expulsión de una partícula α por el núcleo atómico.

Como la partícula α está compuesta por dos protones y dos neutrones, su símbolo es ${}_2He^4$ y el esquema de la desintegración α puede escribirse de la forma siguiente:



$${}_Z El^M = {}_{Z-2}El^{M-4} + {}_2He^4,$$

donde El es el símbolo de cualquier elemento químico. Esta desintegración nuclear, lo mismo que otras reacciones nucleares que estudiaremos en la pág. 619, cumple la ley de conservación de la carga (la suma de los subíndices del segundo miembro de la igualdad debe ser igual a Z) y la ley de conservación del número de masa (suma de los dos índices).

Tanto el núcleo inicial como el final pueden hallarse en estado excitado. Por esto la desintegración α puede ir acompañada de transiciones energéticas, tanto en emisión de fotones como en formación de pares de leptones.

Por motivos históricos la desintegración β se estudia en las mismas condiciones que otras reacciones nucleares. Si olvidamos el neutrino (que para la química no tiene importancia), puede decirse que la desintegración β consiste en la expulsión por el núcleo de un electrón negativo ordinario β^- o de una partícula positiva β^+ (positón o positrón). Recordamos que tanto sus masas como las magnitudes de sus cargas son iguales. La expulsión por el núcleo de una partícula ligera con carga eléctrica da lugar a que, dentro del núcleo, se transforme un protón en neutrón o un neutrón en protón. Esta transformación asegura la conservación de la carga eléctrica al efectuarse la desintegración.

El esquema de la desintegración β se escribe así:



$${}_Z El^M = {}_{Z+1}El^M + \beta_{-1}; \quad {}_Z El^M = {}_{Z-1}El^M + \beta_{+1}.$$

De este modo, en la desintegración β^- un neutrón del núcleo se transforma en protón (porque el número de protones aumentó); la transformación inversa ocurre en la desintegración β^+.

En la desintegración β^- también pueden emitirse rayos γ. La radiactividad α sólo se observa en los elementos pesados (a par-

tir del bismuto); la radiactividad β^- se da con más frecuencia que la β^+.

Si la sustancia radiactiva puede encontrarse en la naturaleza se dice que su *radiactividad es natural*, y si se obtiene por medio de reacciones nucleares, se dice que su *radiactividad es artificial*.

Si al desintegrarse los núcleos de un elemento radiactivo se forma otro elemento, y de este segundo elemento se forma un tercero, etc., la sucesión de dichos elementos se *llama serie, familia o cadena radiactiva*. Se conocen cuatro series radiactivas que comienzan respectivamente por los elementos U^{238}, Th^{232}, U^{235} y U^{233}*).

La desintegración radiactiva se desarrolla según la ley

$$N = N_0 e^{-\lambda t};$$

aquí N_0 es el número de núcleos que hay en el instante inicial $t=0$, y N es el número de núcleos (no desintegrados) que quedan en el instante t; λ se llama *constante de desintegración radiactiva* y es constante para cada elemento dado.

No es difícil comprender que el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la cantidad de átomos existente es

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}.$$

El tiempo T se llama *período de semidesintegración*, *semiperíodo*, *vida mitad* o simplemente *período* del elemento radiactivo.

Los semiperíodos de los elementos progenitores de las familias radiactivas naturales oscilan entre los límites de 10^8—10^{10} años. Por otra parte, los períodos de los productos intermedios de la desintegración, así como de los elementos radiactivos artificiales, pueden ser del orden de fracciones insignificantes de segundo.

Está claro que la cantidad de sustancia radiactiva hubiera podido expresarse en gramos, pero resulta más fácil y cómodo caracterizar esta masa por su actividad, es decir, por el número de los actos de desintegración que se producen en un segundo. La unidad de medida de origen histórico es curie o curio, 1 Ci$=3{,}7\cdot10^{10}$ desintegraciones por segundo. Para la práctica de laboratorio esta unidad es demasiado grande, por lo que se utiliza fracuentemente su milésima parte, el milicurie o milicurio (m Ci). También se suele utilizar la unidad llamada rutherford, 1 Rd$=10^6$ desintegraciones por segundo. Por consiguiente, 1 m Ci$=37$ Rd.

Si el período T se conoce, no es difícil calcular la radiactividad inicial de la sustancia. La parte de la sustancia que se desintegra

*) El U^{233} tiene antecesores entre los elementos transuránicos.

en 1 s es igual a

$$1-\frac{N}{N_0}=1-e^{-\lambda},$$

o, como λ es un número pequeño,

$$1-\frac{N}{N_0}\approx\lambda=\frac{0,693}{T}.$$

Si se trata de m gramos de una sustancia de peso atómico A, su actividad se halla por la fórmula

$$\frac{0,693}{T}\cdot\frac{m}{A\cdot 1,66\cdot 10^{-24}}\ \frac{\text{desintegraciones}}{\text{s}}.$$

Se admite que en cien días de funcionamiento de un reactor nuclear (véase más adelante) se forma en él una cantidad de productos radiactivos igual a 1 Ci por 1 W. La cantidad de productos de desintegración es igual aproximadamente a 500 g por 500 000 kW, es decir, 10^{-6} g por 1 W. Tomemos como 100 el peso atómico medio de los productos de fisión; en este caso, aplicando la fórmula antes escrita, hallamos que el período medio de semidesintegración de los productos radiactivos es igual a 10^5 s, es decir, de cerca de un día.

Para definir las propiedades de una sustancia radiactiva no basta indicar su semiperíodo y su actividad. Es necesario señalar también si dicha sustancia irradia rayos α o β y si la desintegración va acompañada de radiación γ. Para que la característica sea aún más exacta se necesitan datos acerca de la energía de las partículas expulsadas por el núcleo y de la radiación que se desprende. Las propiedades de las partículas α que emiten los distintos materiales radiactivos oscilan en un grado insignificante. Sus velocidades iniciales se encuentran entre los límites 15 000—20 000 km/s; el número de pares de iones que forma la partícula α en el aire se halla entre los límites de $(1\div2)\cdot10^5$. Las energías de las partículas β expulsadas durante la desintegración están distribuidas continuamente entre los límites de cero a centenares o millares de kiloelectrón-voltios. La energía de los rayos γ también es diferente en las diversas sustancias radioactivas, pero el orden de magnitud de esta energía es el mismo para todos los elementos.

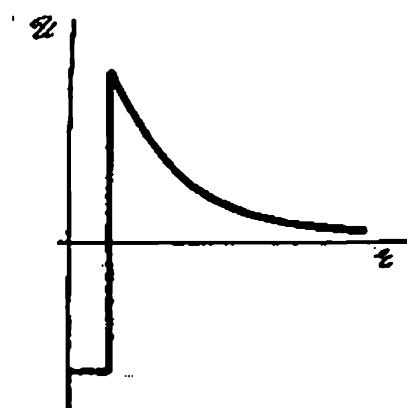


FIG. 243.

La desintegración alfa es de por sí la infiltración de una partícula alfa a través de la barrera de potencial, seguida de la repulsión electrostática. La forma de la curva de potencial del núcleo se representa en la fig. 243. En ella hay un pozo de potencial, una ba-

rrera y, después de ésta, un descenso de energía potencial electrostática según una ley hiperbólica. Para uno de los elementos radiactivos se demostró, haciendo experimentos de dispersión de partículas α por núcleos de dicho elemento, que la altura de la barrera de potencial es en todo caso mayor que 9 MeV. Sin embargo, partículas que sólo tienen una energía de 4 MeV se escapan del núcleo en virtud del efecto túnel.

Esta circunstancia hace comprensibles las enormes variaciones que existen en la duración del semiperíodo de los diversos elementos radiactivos. Basta un cambio insignificante de la diferencia entre la energía de la partícula α en el núcleo y la altura de la barrera de potencial, para que la probabilidad de infiltración de dicha partícula aumente bruscamente (véase la fórmula de la pág. 644).

Los efectos de desintegración α y β pueden ponerse sin dificultad de acuerdo con la fórmula de desintegración con el tiempo: $N = N_0 e^{-\lambda t}$. Efectivamente, la desintegración de cada núcleo es un suceso independiente que no se refleja en modo alguno en el comportamiento de los demás núcleos. Todos los átomos tienen las mismas probabilidades de desintegración. Supongamos que al cabo de un tiempo t se desintegraron la mitad de los átomos. Pero la mitad restante se halla en las mismas condiciones que el conjunto inicial de átomos y, por lo tanto, la mitad de la mitad restante tardará el mismo tiempo en desintegrarse. El hecho de que la desintegración de cada átomo por separado sea independiente del comportamiento de sus vecinos nos conduce a afirmar que: en un intervalo de tiempo dado Δt se desintegrará siempre la misma fracción de la cantidad existente de átomos $\Delta N/N$.

Esta afirmación se escribe de la forma

$$\frac{\Delta N}{N} = -\lambda \Delta t,$$

que después de integrarse da la ley exponencial de la desintegración.

Conviene recordar que la frecuencia con que solemos encontrarnos en el caso de física con la ley exponencial se debe a que dicha ley es la expresión matemática de una disminución según la difundida regla siguiente: cuando las variaciones del argumento son iguales, la función disminuye en fracciones iguales de su magnitud.

§ 217. *Reacciones nucleares*

Los datos experimentales acerca de las reacciones nucleares son bastante importantes. El número de reacciones nucleares estudiadas llega a varios millares.

En la actualidad se conocen los siguientes tipos de reacciones (sin mencionar la desintegración radiactiva, que puede considerarse como una reacción de descomposición nuclear): la reacción provocada por captura, que consiste en la unión de dos partículas que chocan; la reacción de cambio, que consiste en la captura de una partícula y la expulsión de otra; y la reacción de fisión del núcleo por la acción de la energía que recibe éste en una u otra forma. Las reacciones nucleares debidas a la acción de los rayos γ duros se llaman *fotonucleares*.

Por medio de las reacciones nucleares pueden obtenerse tanto isótopos naturales estables de los elementos como isótopos radiactivos inestables que no se encuentran en la naturaleza. Entre los últimos se han logrado sintetizar elementos que carecen por completo de isótopos estables (como por ejemplo, el elemento cuyo número de orden es el 43, es decir, el tecnecio), así como elementos transuránicos.

Se han estudiado con especial atención las reacciones producidas por el bombardeo de los núcleos de los diversos elementos con partículas α, protones y neutrones.

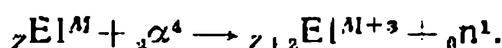
Cuando una partícula α choca con un núcleo, lo más corriente es que se produzcan reacciones de dos tipos: el primero consiste en la captura de la partícula α y la expulsión de un protón (p); el segundo, en la captura de la partícula α y la expulsión de un neutrón (n). Estas reacciones se representan por los símbolos (α, p) y (α, n).

La ecuación de la reacción (α, p) tiene la forma



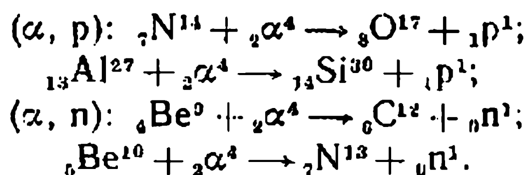
$${}_{Z}\mathrm{El}^{M} + {}_{2}\alpha^{4} \longrightarrow {}_{Z+1}\mathrm{El}^{M+3} + {}_{1}\mathrm{p}^{1}.$$

Y la de la reacción (α, n),



$${}_{Z}\mathrm{El}^{M} + {}_{2}\alpha^{4} \longrightarrow {}_{Z+2}\mathrm{El}^{M+3} + {}_{0}\mathrm{n}^{1}.$$

He aquí unos ejemplos de reacciones provocadas por partículas α:



$$(\alpha,\ \mathrm{p}):\ {}_{7}\mathrm{N}^{14} + {}_{2}\alpha^{4} \longrightarrow {}_{8}\mathrm{O}^{17} + {}_{1}\mathrm{p}^{1};$$
$${}_{13}\mathrm{Al}^{27} + {}_{2}\alpha^{4} \longrightarrow {}_{14}\mathrm{Si}^{30} + {}_{1}\mathrm{p}^{1};$$
$$(\alpha,\ \mathrm{n}):\ {}_{4}\mathrm{Be}^{9} + {}_{2}\alpha^{4} \longrightarrow {}_{6}\mathrm{C}^{12} + {}_{0}\mathrm{n}^{1};$$
$${}_{5}\mathrm{Be}^{10} + {}_{2}\alpha^{4} \longrightarrow {}_{7}\mathrm{N}^{13} + {}_{0}\mathrm{n}^{1}.$$

La primera de estas reacciones (α, n) tiene gran importancia práctica: la mezcla de radio (fuente de partículas α) con berilio se utiliza como fuente de neutrones.

En las colisiones con protones se consigue efectuar una amplia clase de reacciones; a ellas pertenecen las reacciones (p, α), es decir, las de captura de un protón seguida de la expulsión de una partí-

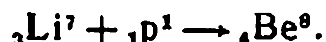
cula α, por ejemplo,



$$_{9}Fe^{19} + {}_{1}p^{1} \longrightarrow {}_{8}O^{16} + {}_{2}He^{4},$$

así como las reacciones con expulsión de neutrones (p, n).

Se conocen reacciones provocadas por captura que no van acompañadas de expulsión de una partícula. El exceso de energía se desprende en este caso en forma de rayos γ; por esto dichas reacciones se designan por (p, γ), por ejemplo,



$$_{3}Li^{7} + {}_{1}p^{1} \longrightarrow {}_{4}Be^{8}.$$

Se han estudiado extensamente las reacciones con deuterones (D). Se observan reacciones (D, p) y (D, n). Cuando se bombardea con deuterones de hidrógeno pesado (es decir, también deuterones) se observa una reacción en que se forma el isótopo del hidrógeno llamado tritio:



$$_{1}D^{2} + {}_{1}D^{2} \longrightarrow {}_{1}H^{3} + {}_{1}p^{1}.$$

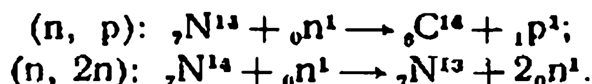
Pero esta reacción se desarrolla parcialmente según el esquema (D, n):



$$_{1}D^{2} + {}_{1}D^{2} \longrightarrow {}_{2}He^{3} + {}_{0}n^{1}.$$

Las reacciones con deuterones desempeñan un papel muy importante en la técnica nuclear, debido a que se desarrolla intensamente dentro del reactor nuclear. Se producen reacciones (n, α); (n, p); (n, 2n) y (n, γ). Además, por la acción de los neutrones se produce también la reacción de fisión de los nucleos pesados (véase más adelante).

El nitrógeno produce en los neutrones radiaciones de dos tipos:



$$\text{(n, p)}: \; {}_{7}N^{14} + {}_{0}n^{1} \longrightarrow {}_{6}C^{14} + {}_{1}p^{1};$$
$$\text{(n, 2n)}: \; {}_{7}N^{14} + {}_{0}n^{1} \longrightarrow {}_{7}N^{13} + 2\,{}_{0}n^{1}.$$

La primera de estas reacciones da un isótopo del carbono de período largo (de más de 5000 años) que desempeña un gran papel en las investigaciones bioquímicas.

Casi todos los isótopos son capaces de capturar un neutrón (reacción (n, γ)) y formar de este modo otro isótopo del mismo elemento cuya masa será mayor en una unidad. Por lo general se producen isótopos radiactivos que poseen radiactividad β.

Lo mismo que en la química de las moléculas, en la química nuclear pueden desarrollarse las reacciones por vía exotérmica y por vía endotérmica. La magnitud y el signo del efecto térmico de la reacción puede determinarse valiéndose de la ley de la equivalencia de la masa y la energía.

Si de unos núcleos cuyas masas sean M_1 y M_2 se forman núcleos de masa M_3 y M_4,

$$M_1 + M_2 = M_3 + M_4 + \Delta m.$$

Si $\Delta m > 0$, es decir, si los núcleos producto de la reacción tienen una masa menor que los núcleos iniciales, la reacción será exotérmica. Cuando $\Delta m < 0$ la reacción es endotérmica. La energía desprendida o absorbida durante la reacción se calcula por la fórmula $\mathcal{E} = c^2 \Delta m$. Los resultados de este cálculo coinciden siempre exactamente con los de las medidas efectuadas.

Los valores de los efectos térmicos de la mayoría de las reacciones nucleares son del orden de megaelectrón-voltios (calculados para el par de núcleos que reacciona). Esto es millones de veces mayor que las correspondientes magnitudes de las reacciones químicas.

Ejemplo de cálculo:



$${}_4Be^9 + {}_1p^1 \longrightarrow {}_3Li^6 + {}_2\alpha^4.$$

De las tablas de consulta tomamos los valores de las masas: $m_{Be} = 9{,}01464$; $m_p = 1{,}00807$; $m_{Li} = 6{,}01671$; $m_\alpha = 4{,}00372$. De donde $\Delta m = 0{,}00227$, es decir, $\Delta m > 0$, por consiguiente, la reacción es exotérmica. Y como la unidad de peso atómico corresponde a 931,8 MeV, la magnitud del efecto térmico será igual a $0{,}00227 \cdot 931{,}8 = 2{,}12$ MeV o, aproximadamente, $8 \cdot 10^{-14}$ cal (1 MeV $= 3{,}827 \cdot 10^{-14}$ cal).

§ 217 a. *Reacciones de fisión de núcleos pesados*

Los núcleos de los átomos más pesados que los núcleos de los átomos de estaño son capaces de dividirse en dos partes de masas aproximadamente iguales. Para que la fisión tenga lugar hay que comunicarle al núcleo una energía de activación considerable, que disminuye a medida que aumenta el número de masa del isótopo. Para los núcleos de uranio, torio y paladio esta energía es aproximadamente igual a 5 MeV. La reacción de fisión de estos núcleos es exotérmica; la energía que se desprende es considerablemente mayor que la energía de activación. La fisión puede ser provocada por protones, deuterones, partículas α y radiación γ. No obstante, tiene una importancia particular la fisión producida por el impacto de un neutrón en un núcleo pesado.

Consideremos la fisión del isótopo 235 del uranio provocada por la acción de los neutrones. Por la captura de un neutrón se forma un isótopo cuya masa es mayor en una unidad:



$${}_{92}U^{235} + {}_0n^1 \longrightarrow {}_{92}U^{236}.$$

La fisión se produce si la energía de activación de la fisión del U^{236} es menor que la energía aportada por el neutrón. El neutrón capturado aporta al núcleo una energía igual a la de la ligadura más la energía cinética de su movimiento. En el caso del U^{235}, la energía

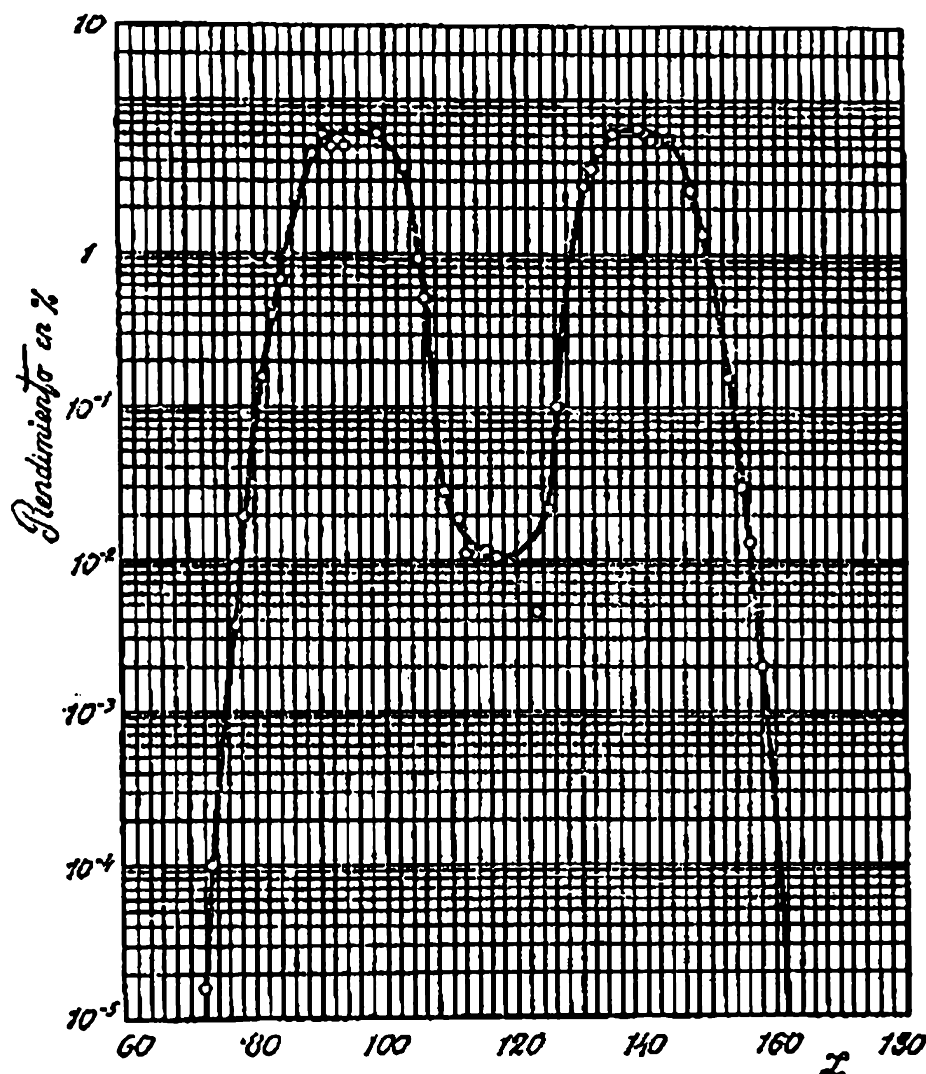


FIG. 244.

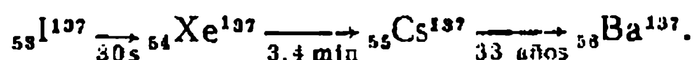
aportada por un neutrón, incluso si se mueve a velocidad térmica, es suficiente para que se produzca la fisión.

Para escindir los núcleos de U^{238} hace falta una gran energía, por esto el núcleo de este isótopo sólo se fisiona por la acción de neutrones rápidos.

La fisión de los núcleos de U^{235} origina dos fragmentos distintos. El núcleo se escinde arbitrariamente dando productos primarios diferentes. La curva del rendimiento de los fragmentos de fisión del uranio 235 en función de sus masas se da en la fig. 244. Como puede verse, el caso menos probable es el de la escisión en dos partes iguales. Lo más frecuente es que las masas de los fragmentos se relacionen entre sí como 2 es a 3, por ejemplo, Sr^{95} y Xe^{139}. Estos núcleos poseen energías enormes: el ligero, del orden de 100 MeV, y el pesado, de cerca de 65 MeV. La diversidad de los productos de

fisión se explica no sólo por las distintas variantes de desintegración del núcleo en partes, sino también porque los núcleos-fragmentos radiactivos que aparecen originan al desintegrarse otra serie de productos.

Los núcleos producto de la fisión poseen una cantidad excesivamente grande de neutrones. Por esto, los núcleos radiactivos sufren una cadena de transformaciones hasta pasar a un estado estable normal. Por ejemplo,



$$_{53}I^{137} \xrightarrow[30\,s]{} {}_{54}Xe^{137} \xrightarrow[3,4\,\text{min}]{} {}_{55}Cs^{137} \xrightarrow[33\,\text{años}]{} {}_{56}Ba^{137}.$$

Debajo de las flechas se indican los períodos. Está claro que, por su período, el producto práctico de esta cadena de transformaciones es el Cs^{137}.

Entre los productos de fisión más importantes del uranio 235, además del Cs^{137}, puede mencionarse el estroncio 90 (véase más adelante).

La fisión del uranio 235 va acompañada del desprendimiento de una enorme energía: 1 g de uranio de la misma energía que puede obtenerse quemando 2,5 t de carbón, es decir, 22 000 kW-h. La principal parte de esta energía se desprende en forma de energía cinética de los fragmentos de fisión; aproximadamente un 10% de la energía corresponde a la radiación.

§ 217b. Reacción en cadena

La reacción que ocurre con el uranio 235 se conoce detalladamente. El uranio 235 es el único isótopo natural que permite realizar desprendimientos de energía en cantidades industriales.

Como para la reacción de fisión se necesitan neutrones, y el gas neutrónico no existe en la naturaleza, el desprendimiento de energía en grandes cantidades sólo puede efectuarse con una condición: que se produzca una reacción en cadena durante la cual se creen continuamente nuevos electrones. Así precisamente se lleva a cabo la fisión de los núcleos de uranio 235. En cada escisión se liberan varios neutrones, con la particularidad de que el número de neutrones expulsados puede ser diverso. En promedio, a cada fisión corresponden 2,5 neutrones. Si los neutrones que se forman al escindirse un núcleo son capaces de provocar la fisión de otros átomos de uranio, la reacción en cadena se produce.

Pero como los neutrones tienen un recorrido libre bastante grande, los que se forman al escindirse un núcleo de uranio 235 tienen muchas posibilidades de abandonar la sustancia sin producir la fisión de otros núcleos. Hay que tener en cuenta además, que no todo en-

cuentro de un neutrón con un núcleo de uranio 235 provoca la fisión.

El desarrollo de la reacción en cadena depende del factor de multiplicación neutrónica. Teóricamente puede calcularse el valor de este factor K_0 para el caso de un sistema de dimensiones infinitas. Para hacer este cálculo hay que tener datos acerca de la multiplicación del número de neutrones a expensas de la fisión por neutrones lentos y rápidos, así como de las probabilidades de que los neutrones sean capturados por núcleos de sustancias no escindibles.

El valor del factor K_0, mayor que la unidad, indica cuantas veces será más numerosa la siguiente generación de neutrones que la que le precede.

Pero el reactor tiene unas dimensiones finitas. Por lo tanto, el factor de multiplicación neutrónica en el reactor deberá escribirse en este caso de la forma $K=K_0(1-p)$, siendo p la probabilidad de que el neutrón se escape del reactor. Para que el reactor comience a funcionar es necesario que el factor K sea mayor que la unidad. Durante el funcionamiento del reactor, el factor de multiplicación K debe ser exactamente igual a la unidad.

Las dimensiones del sistema que contienen al combustible nuclear se llaman *críticas* si el factor de multiplicación neutrónica en dicho sistema es igual a la unidad.

El factor de multiplicación puede regularse basándose en los razonamientos siguientes. La probabilidad de que un neutrón se encuentre con otro núcleo antes de escaparse de la sustancia se puede aumentar reuniendo una cantidad mayor de combustible nuclear. También es necesario reducir al mínimo el número de núcleos atómicos con capacidad de absorber neutrones y, por lo tanto, de excluirlos de la reacción. La probabilidad de la captura puede aumentarse retardando (moderando) los neutrones. Al escindirse un núcleo salen despedidos de él neutrones rápidos, mientras que el núcleo del uranio 235 captura mejor los lentos, es decir, los llamados neutrones térmicos.

La peculiaridad del uranio 235 consiste en que su núcleo se escinde tanto por la acción de los neutrones rápidos (aunque en este caso la probabilidad sea menor) como por la acción de los neutrones lentos. Si los núcleos de una sustancia sólo se escinden por la acción de los neutrones rápidos, con esta sustancia es imposible efectuar una reacción en cadena, porque un neutrón que salga del núcleo escindido y que después experimente cierta retardación, aunque sea insignificante, debida a uno o dos choques casuales que no provoquen la fisión, quedará eliminado ya de la reacción en cadena.

En la actualidad se consideran combustibles nucleares, en primer lugar, aquellas sustancias que permiten realizar la reacción en cadena con neutrones lentos. Entre estas sustancias figura un

solo isótopo natural del uranio, el U^{235}, y dos elementos artificiales: el plutonio 239, que se obtiene del uranio 238, y el uranio 233, que se obtiene del torio 232.

Para que empiece la reacción en cadena sólo hace falta reunir en un espacio limitado una cantidad de combustible nuclear que sea mayor que cierto mínimo. Por el primer neutrón no hay que preocuparse: en virtud de la reacción cósmica siempre hay en la atmósfera una cantidad insignificante de neutrones. También debe tenerse en cuenta que, debido al fenómeno de la fisión espontánea (es decir, que se produce por la acción de las fuerzas internas de un modo espontáneo), descubierto por los investigadores soviéticos G. N. Flióroy y K. A. Petrzhak, la fisión del uranio 235 puede producirse algunas veces sin la captura del neutrón. Finalmente, puede utilizarse como fuente de neutrones una mezcla de radio-berilio.

§ 217c. Principios en que se basa el funcionamiento de un reactor nuclear

Si dentro de un volumen determinado de combustible nuclear comienza una reacción en cadena y esta reacción no se controla, el resultado será una explosión, porque el número de neutrones, y junto con él la cantidad de energía que se desprenda en cada instante, será mayor. La cantidad de energía desprendida durante unas fracciones insignificantes de segundo será tan grande, que se producirá la explosión.

Para que la energía se desprenda constantemente o, por lo menos, en cantidad regulable, hay que crear una instalación que permita controlar el factor de multiplicación neutrónico. Estas instalaciones se llaman *reactores, calderas* o *pilas nucleares.* En ellas debe existir la posibilidad de iniciar la reacción en cadena con un factor de multiplicación mayor que la unidad en una cantidad insignificante. En este caso la concentración de neutrones dentro del reactor, y al mismo tiempo la potencia de éste, comenzarán a aumentar. Una vez conseguida la potencia que se desee hay que tener la posibilidad de hacer exactamente igual a la unidad el factor de multiplicación. Después de esto la reacción pasa a ser automantenida, es decir, el número de neutrones y la energía desprendida en la unidad de tiempo serán constantes.

Todo reactor debe construirse de manera que los neutrones que se desprenden en la fisión se aprovechen con la mayor eficacia posible. Sin embargo, el aprovechamiento eficaz de los neutrones no quiere decir que se utilicen exclusivamente para escindir los núcleos y desprender energía. En el reactor pueden introducirse sustancias cuyos núcleos pueden absorber neutrones. Valiéndose de la reacción

con neutrones puede obtenerse una gran cantidad de isótopos radiactivos artificiales necesarios y, lo que es muy importante, combustible nuclear artificial. Por lo tanto, un reactor nuclear no es sólo una instalación para producir energía, sino también para obtener isótopos artificiales.

Los neutrones de fisión poseen una velocidad de decenas de miles de kilómetros por segundo. La velocidad térmica de los neutrones es del orden de 1 km/s (0,025 eV). Los más eficaces, en el sentido de la fisión, son los neutrones térmicos lentos.

Tienen grandes ventajas los reactores nucleares que funcionan con la mezcla natural o enriquecida de uranio 235 y uranio 238.

El uranio 238 tiene la propiedad de absorber los neutrones por resonancia. La absorción es muy intensa, por ejemplo, cuando la energía es de 7 eV. Si el reactor se carga con la mezcla de estos isótopos, es absolutamente necesario moderar los neutrones hasta una energía menor que la indicada.

De lo expuesto se deduce que los elementos fundamentales de cualquier reactor son: el combustible, el moderador de neutrones, el absorbente de neutrones (necesario para regular el factor de multiplicación) y el blindaje, para proteger al personal del flujo de neutrones y de la radiación γ que se desprende durante las transformaciones que ocurren en los reactores.

Existe ya una gran cantidad de reactores nucleares en explotación y de proyectos de instalaciones de este tipo. Estos reactores pueden diferenciarse unos de otros en muchos aspectos: 1) en el material mediante el cual se introduce el combustible (combustible nuclear puro, combustible enriquecido, uranio natural en forma de metal o de compuestos químicos; 2) en la disposición del combustible (red espacial, red de barras, distribución homogénea del combustible en disolución o en mezcla); 3) en el moderador (agua pesada o ligera, grafito, berilio); 4) en el tipo de refrigeración (agua, gas, sodio líquido o sin refrigeración). Los reactores se pueden proyectar para cualquier potencia, comenzando desde fracciones de kilovatio y hasta centenares de miles de kilovatios. En dependencia del tipo y de la cantidad de moderador, los reactores pueden funcionar con neutrones lentos (térmicos) o con neutrones rápidos.

El control de los reactores es totalmente automático. Este control se realiza por medio de detectores de neutrones colocados en las paredes del reactor y capaces de medir flujos neutrónicos entre los límites de 1 a $5\cdot10^{10}$ neutrones/(cm$^2\cdot$s). En estos detectores se utiliza como material sensible a los neutrones el boro 10 o el uranio 235, que se funde sobre los electrodos de la cámara de ionización, o el gas —fluoruro de boro (BF_3)— que llena dicha cámara. En el primer caso la cámara se llena de argón, nitrógeno, helio o aire a dos atmósferas de presión.

Tiene extraordinaria importancia el funcionamiento de todo tipo de amplificadores de la corriente de ionización en los mecanismos de relé que transmiten las indicaciones del detector neutrónico a los aparatos que gobiernan el movimiento de las barras de control y de las de seguridad.

Durante el funcionamiento del reactor debe cambiar, evidentemente, la posición de las barras de control. Esto se explica, porque, a medida que se van acumulando los productos de la desintegración, la cantidad de sustancia que absorbe neutrones aumenta. Estas sustancias «venenosas» pueden ser en algunos casos evacuadas automáticamente de la caldera (por ejemplo, si son productos gaseosos). No obstante, el avance paulatino de las barras de control es condición necesaria para mantener la densidad de neutrones a un nivel invariable. Al cabo de cierto tiempo, del orden de 5—20 meses, el «envenenamiento» del reactor se hace tan considerable que es imposible que siga funcionando. Hay que limpiar la caldera de los productos de la desintegración y volverla a cargar de combustible fresco. Entre los productos de fisión que absorben intensamente neutrones figuran el rutenio 103, el xenón 131 y 135, el neodimio 143, el samario 149 y 151, el europio 151, 152 y 155 y el gadolinio 155.

Está claro que la variación del factor de multiplicación se debe a la formación de combustible artificial.

Si en el reactor, además de combustible nuclear, hay cierta cantidad de uranio 238 o de torio, este reactor a la vez que desprende calor produce combustible nuclear artificial (plutonio del uranio 238 y uranio 233 del torio).

Un reactor se llama *reproductor o generador* si la cantidad de materia físil que hay en él aumenta o, por lo menos, permanece invariable. El reactor reproductor sólo puede llevarse a cabo con aquellas materias físiles y en aquellas condiciones que hacen que el número medio de neutrones emitidos en cada fisión sea mayor que dos. Para crear las condiciones necesarias para la reproducción del combustible hay que calcular el reactor de manera que el número de átomos que se escindan por segundo sea por lo menos igual al de átomos de uranio 238 (torio) que se transforman por segundo en plutonio (uranio 233).

Para transformar el calor que se desprende en energía eléctrica se procede del mismo modo que en las centrales termoeléctricas que funcionan con carbón. Pero la toma del calor hay que hacerla en varias etapas. En los reactores proyectados en EE.UU. para un millón de kilovatios se propone hacer pasar por el reactor un flujo de sodio líquido, después, en el intercambiador de calor, este flujo cederá el calor a un segundo ciclo de sodio, del cual tomará a su vez el calor, en otro intercambiador, el vapor de agua que moverá la turbina.

§ 217d. Productos radiactivos artificiales

La cantidad más considerable de productos radiactivos se obtiene en los reactores nucleares. Dirigir este proceso, en el sentido de obtener productos deseables, no podemos, y cada hora de funcionamiento de un reactor reporta una cantidad determinada de productos de fisión de los núcleos atómicos. Entre los productos de fisión «indispensables» con período suficientemente grande para su utilización práctica figuran el Kr^{85}, Sr^{89}, Sr^{90}, I^{129}, I^{131}, Xe^{133}, Cs^{137}, Ba^{140} y algunos otros.

Los productos radiactivos de fisión se utilizan en la actualidad en trabajos de investigación científica, en la técnica de control de los procesos de producción y de la calidad de ésta, con fines curativos y en otros casos.

Una rama interesante de aplicación de los isótopos radiactivos es la radiografía. En la defectoscopia de los metales se sustituyen los aparatos de rayos X por el cobalto 60 y el cesio 137.

Para obtener un isótopo determinado existen dos posibilidades: utilizar un reactor nuclear y emplear el bombardeo nuclear valiéndose de aceleradores de partículas.

Colocando cualquier sustancia en un reactor, la sometemos a la acción de los neutrones. Las reacciones con neutrones son las que se efectúan con mayor facilidad y permiten obtener isótopos radiactivos de casi todos los elementos químicos. Por esto los reactores nucleares desempeñan el papel fundamental en la producción de isótopos radiactivos.

Los isótopos radiactivos se forman en el reactor por captura de neutrones o por arranque de protones o (menos frecuentemente) de partículas α de los núcleos bombardeados por los neutrones.

Conviene señalar que un reactor nuclear no puede producir un surtido tan variado de isótopos como un ciclotrón. Esto es comprensible, ya que, en el reactor, las condiciones de bombardeo de los núcleos atómicos están limitadas por un tipo de partículas (neutrones) y por un intervalo de energías. Pero los reactores también tienen inconvenientes cuando se trata de obtener grandes cantidades de un isótopo, por ejemplo, de C^{14}. La materia prima que se utiliza para obtener el C^{14} absorbe intensamente los neutrones y por esto no se puede introducir en el reactor grandes cantidades. He aquí por qué los aceleradores de partículas ocupan un puesto independiente determinado en la producción de isótopos radiactivos.

La productividad de un acelerador se determina por la energía y la cantidad de núcleos que salen lanzados de él en la unidad de tiempo. Esta cantidad no es difícil de calcular partiendo de los datos acerca de la corriente iónica media, cuya intensidad es igual

a 10^{-11} A. Conociendo la carga del ion, hallamos fácilmente que en 1 s da el ciclotrón 10^{8} núcleos, es decir, $2\cdot10^{-16}$ g de deuterio.

Si se conocen estos datos, para calcular la velocidad con que, por la acción del haz de núcleos, se formará tal o cual sustancia radiactiva, hay que conocer además la «sección eficaz» de la reacción. Esta magnitud se mide en centímetros cuadrados, se designa por σ y posee el sentido siguiente. Si S es el área de la muestra que se bombardea, σ/S será la probabilidad de que el núcleo-proyectil choque con el núcleo-blanco y se produzca la reacción correspondiente. El valor de σ es, por su orden de magnitud, aproximadamente igual a 10^{-24} cm^2.

En ciertos núcleos tiene lugar un aumento brusco de la absorción cuando los neutrones tienen determinadas velocidades. Por ejemplo, el cadmio absorbe intensamente los neutrones lentos cuya energía es de 0,18 eV: la sección eficaz de esta reacción es del orden de $7000\cdot10^{-24}$ cm^2.

La sección eficaz depende considerablemente de la energía de la partícula incidente. Si la curva de la sección eficaz en función de la energía de la partícula incidente tiene un pico agudo, se dice que existe sección eficaz de resonancia.

Los elementos radiactivos que se obtienen en los reactores, lo mismo que los que se obtienen en los ciclotrones, se utilizan mucho como indicadores (de aquí la denominación de «átomos marcadores o trazadores») en casi todas las ramas de la ciencia y de la técnica.

Entre los isótopos más utilizados se pueden mencionar los siguientes. El cobalto 60, con radiactividad β^- y período de 5,2 años; su intensa radiación γ lo hace muy útil para fines radiográficos y de irradiación. El carbono C^{14} radiactivo, con período de 6360 años; se emplea mucho en la química biológica, en la geoquímica y en el estudio de la cinética de las reacciones químicas. También se utilizan mucho el P^{32} y el S^{35}, cuyos períodos respectivos son de 14,3 días y de 87 días. Estos dos isótopos poseen radiactividad β^-. Se aplican ampliamente en la agricultura para estudiar la asimilación de los abonos por las plantas.

§ 218. Reacciones termonucleares

Los cálculos teóricos demuestran que los núcleos atómicos de casi todos los elementos pueden ser en principio fuentes de energía. Resulta que todo núcleo más pesado que el de la plata posee más energía que las partes en que se puede dividir. Todos los núcleos pesados liberan energía al fisionarse. Cuanto más pesado es el núcleo, mayor es la cantidad de energía liberada. Por esto el uranio es un combustible atómico extremadamente «apto».

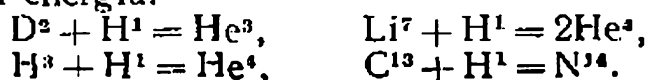
Sin embargo, los núcleos ligeros también pueden servir de fuentes de energía. La teoría demuestra que el núcleo resultante de la unión de dos núcleos ligeros tendrá menos energía que las partículas iniciales. Por consiguiente, cuando se funden dos átomos ligeros se libera energía. En este caso también se libera tanta más energía cuanto más nos alejamos de la mitad de la tabla de Mendeléiev. La energía máxima puede obtenerse fundiendo átomos de hidrógeno.

¿En qué condiciones puede efectuarse la reacción de fusión de núcleos ligeros? El bombardeo nuclear no puede dar un resultado eficaz a causa del intenso frenado que sufre en la sustancia la partícula cargada. La única posibilidad es elevar la temperatura. Es fácil calcular las temperaturas que hay que comunicar a los núcleos atómicos para que puedan aproximarse entre sí, hasta ponerse en contacto, venciendo la repulsión eléctrica.

En el centro del Sol, según los cálculos de los astrónomos, existe una temperatura de 20 millones de grados. Sabiendo que a un grado de libertad le corresponde una energía de $1/2\ kT$, hallamos la energía cinética media que tendrá la partícula a esta temperatura inimaginable. La energía sólo será igual a 3000 eV. Calculemos ahora, por la fórmula de la energía potencial de la interacción eléctrica $U=q^2/r$, a qué distancia conseguirán acercarse entre sí dos protones. Esta distancia resulta ser igual a $5\cdot 10^{-11}$ cm. Como sabemos, el radio del núcleo es considerablemente menor. No obstante, las reacciones termonucleares, es decir, las reacciones que se desarrollan a alta temperatura, son posibles en las entrañas del Sol. El cálculo realizado teniendo en cuenta el efecto túnel y el hecho de que en todo gas, incluido el gas de partículas nucleares, existen partículas cuyas velocidades son considerablemente mayores que la media, demuestra que al cabo de un año un átomo de cada millón consigue tomar parte en la reacción de fusión de los núcleos. Este pequeño porcentaje resulta ser suficiente para asegurar la actividad del Sol.

En las condiciones de la Tierra ya se han producido varias veces estas altas temperaturas en las pruebas de las bombas de hidrógeno. Temperaturas de decenas de millones de grados se producen en las explosiones de las bombas de uranio. Si en la zona de una explosión de este tipo se sitúa una sustancia cuyos núcleos sean capaces de unirse liberando energía, se producirá una reacción termonuclear cuya energía será muchas veces mayor que la de la bomba de uranio, la cual desempeñará en este caso el papel de fulminante.

He aquí unos ejemplos de reacciones fáciles de realizar y que liberan mucha energía:



$$D^2+H^1=He^3, \qquad Li^7+H^1=2He^4,$$
$$H^3+H^1=He^4, \qquad C^{13}+H^1=N^{14}.$$

Las reacciones termonucleares sólo pueden producirse a aquellas temperaturas que dan a los núcleos una velocidad suficiente para salvar con cierta probabilidad la barrera de potencial coulombiana.

Las que más interés ofrecen son las reacciones en el deuterio y en la mezcla de deutrió y tritio, en cuyo caso la energía necesaria es la menor. La temperatura necesaria para obtener un neutrón por segundo en un gramo de deuterio (por la reacción $_1D^2+{}_1D^2=$ $={}_2He^3+{}_0n^1$) es igual a 200 000° C. Si el gas está muy enrarecido, para conseguir este mismo fin se necesita una temperatura aún mayor, del orden de 500 000° C. A esta temperatura el deuterio (u otra sustancia) constituye un plasma de núcleos y electrones. Para hacer que el deuterio entre en este estado, la energía necesaria no es muy grande, sino del orden de varios kilovatios-hora. Pero la dificultad no consiste en comunicarle la energía al deuterio, sino en el aislamiento térmico del plasma, es decir, en que los núcleos de deuterio conserven durante largo tiempo la energía cinética correspondiente (véase el § 178*a*).

31

PARTÍCULAS ELEMENTALES

§ 219. «Partícula elemental»

El problema acerca de la estructura de los cuerpos es uno de los que pueden considerarse resueltos. Los cuerpos están constituidos por electrones y núcleos, los núcleos, de protones y neutrones. Por lo tanto, con bastante certeza y exactitud puede asegurarse que los cuerpos están formados por tres tipos de partículas: electrones, protones y neutrones. Probablemente sería justo conservar el término «partículas elementales» sólo para estas partículas.

Los problemas relacionados con las propiedades de los cuerpos de naturaleza viva y del reino mineral se reducen a las leyes de la interacción de los electrones y los núcleos. Nosotros conocemos estas leyes de la naturaleza, y todos los fenómenos físicos pueden explicarse por ellas, es decir, el comportamiento de los cuerpos puede predecirse. Si las predicciones cuantitativas no resultan, esto significa solamente que, debido al gran número de factores que influyen, el fenómeno no se somete a definición matemática.

La rama de la física relacionada con la explicación de las propiedades de los cuerpos por medio de la interacción de los electrones, protones y neutrones se aparta marcadamente de la rama llamada física de las partículas elementales.

El estudio de las colisiones entre partículas en los rayos cósmicos y en los aceleradores condujo al descubrimiento de unas 200 partículas que se distinguen por su carga, masa y otras propiedades. Pero a diferencia de los electrones y de los núcleos, las partículas elementales de este tipo poseen un período de vida corto y capacidad de experimentar una cadena de transformaciones compleja.

Entendemos que es erróneo considerar desde un mismo punto de vista todas las partículas. Sería más conveniente considerar estas partículas, a excepción de las tres esenciales, como estados excitados del nucleón (denominación común del protón y del neutrón que ya hemos utilizado). Para estos estados se ha aceptado el término «barión». Muchas partículas y pares de partículas son análogas a los fotones de luz; son la expresión material de la energía que se libera cuando el sistema retorna del estado excitado al fundamental. Ya vimos en el § 213 que la radiación del núcleo puede tener no sólo la forma de un fotón, sino también la de un par electrón — antineutrino. Más adelante veremos que los nucleones excitados pasan al estado fundamental por gran número de otros procedimientos, a saber: emitiendo un fotón, un par electrón — neutrino, un par muón — neutrino, un pión o un kaón.

Hay que pensar que el término «partícula elemental», en el sentido en que se aplica hasta ahora, es anticuado. Sin embargo lo conservaremos sin temor a equivocaciones. Al adjetivo «elemental» hace ya mucho tiempo que no se le da el sentido estricto de esta palabra.

Una serie de ideas generales tocantes a la interacción de las partículas se expone en los primeros párrafos de este capítulo. Una vez conocidas, estudiaremos la forma del espectro bariónico y daremos a conocer sucintamente el interesante esquema de los «quarks», o «cuarques», que ayuda a describir con elegancia los espectros de los bariones y de los mesones.

§ 220. Interacción de los electrones rápidos

Si los electrones se mueven lentamente, las fuerzas de interacción se determinan por la disposición de las cargas en el instante en que se calcula la interacción. Por esto para los electrones lentos no desempeña ningún papel el hecho de que exista el campo electromagnético; no tiene importancia que la transmisión de la interacción se haga a través del campo.

Pero cuando se trata de partículas rápidas la cuestión se plantea de otro modo. En este caso hay que tomar en consideración el retraso de la interacción debido a que la velocidad de propagación del campo electromagnético es finita. La interacción en el instante t

estará determinada por la disposición de las cargas en el instante $t-r/c$. Ahora no puede dejar de considerarse el campo ¿Cómo puede tenerse en cuenta la naturaleza cuántica del campo si se conserva el esquema de interacción partícula — campo — partícula? De este problema se ocupa la electrodinámica cuántica, que es una rama de la física teórica que aún está lejos de ser perfecta. La experiencia nos obliga a suponer, cuando estudiamos la interacción entre las partículas rápidas, que esta acción consiste en la transmisión de un cuanto de energía de la partícula al campo y de la ulterior transmisión de este cuanto a la segunda partícula.

Si la magnitud del cuanto de energía es $\mathscr{E}$ y el tiempo que tarda el cuanto en ser transmitido de una partícula a otra es τ, según el principio de incertidumbre (véase la pág. 521)

$$\mathscr{E}\tau \sim h.$$

Si las partículas están cerca una de otra, τ será pequeña y las partículas podrán intercambiar cuantos $h\nu$ de frecuencias pequeñas y grandes. A medida que aumenta la distancia entre las partículas, τ crece y el intercambio de energía se hace posible únicamente por medio de cuantos pequeños Partiendo de razonamientos de este tipo, la teoría permite deducir la fórmula de las fuerzas de interacción entre las partículas.

Muchos autores utilizan la siguiente terminología figurada al describir la interacción cuántica de las partículas a través del campo. Para transmitir al campo un cuanto de energía $\mathscr{E}$, la partícula «presta» esta energía por un corto plazo T. El principio de incertidumbre regula la dependencia del plazo del empréstito con respecto a la cantidad de energía prestada. Resulta algo así como si la ley de conservación de la energía se «infrigiera» durante el tiempo T, es decir, mientras dura el empréstito. El principio de indeterminación indica durante qué tiempo puede «infrigirse» la ley de conservación de la energía para que esta «infracción» carezca de sentido físico.

Este punto de vista puede seguir desarrollándose, pero conduce a la siguiente dificultad. No existe limitación en la absorción y emisión de fotones y, por esto, durante el intercambio de fotones, se producen variaciones infinitamente grandes de los valores de la energía de las partículas.

Es interesante que este estado de cosas se presenta cualquiera que sea la manera de valorar la energía intrínseca del electrón o de otra partícula con carga. Como vimos en la pág. 259, posee energía infinita la partícula puntual. Por otra parte, no puede considerarse que la partícula tenga unas dimensiones finitas. En efecto, desde el punto de vista de la teoría de la relatividad, que no admite la existencia de cuerpos absolutamente rígidos (a través de los cuales

la interacción se transmitiría instantáneamente), no puede haber una partícula absolutamente rígida de dimensiones finitas. Pero si consideramos que el electrón es una partícula deformable, se plantea el problema de la estructura del electrón. La solución de este problema no se ha encontrado aún.

La peculiaridad de la nueva teoría consiste en que puede conducir a una serie de nuevos resultados bastante interesantes, a pesar del carácter contradictorio de su fundamento y de la ausencia en ella de armonía lógica.

§ 221. Teoría mesónica de la interacción de los nucleones

En el párrafo precedente dijimos que la interacción de las partículas con carga eléctrica se efectúa por mediación del campo electromagnético y de un modo cuántico. Una partícula eléctrica cede al campo electromagnético un cuanto de energía, el cual es transmitido por el campo a la otra partícula. Suponiendo que las fuerzas nucleares posean campo, y que este campo también tendrá carácter cuántico, la interacción de los nucleones se puede describir del modo siguiente: cada nucleón está rodeado de un campo; un nucleón cede un cuanto de energía a este campo, y el campo devuelve dicho cuanto a otro nucleón.

La investigación teórica acerca de la posibilidad de esta explicación fue emprendida por Hideki Yukawa. Resultó que la teoría puede construirse si se admite que el campo, a través del cual interaccionan los nucleones, posee cuantos cuya masa en reposo sea distinta de cero. La interacción de los nucleones se redujo de este modo a un intercambio de partículas poseedoras de cierta masa $m_0 \neq 0$. Por causas que explicaremos más adelante, esta partícula recibió el nombre de *mesón*. El mesón es el cuanto del campo mesónico que rodea a los nucleones.

Detengámonos en algunas conclusiones de la teoría. En primer lugar, intentaremos valorar el radio de acción de las fuerzas nucleares.

La energía del mesón que transmiten los nucleones durante una interacción no puede ser menor que m_0c^2, donde m_0 es la masa en reposo del mesón. El tiempo que dura la transmisión del mesón deberá ser, en orden de magnitud, no mayor que h/m_0c^2 (basándose en la relación $\mathscr{E}\tau \sim h$, donde $\mathscr{E}$ es la cantidad de energía transmitida y τ el tiempo invertido en esta transmisión). Como el mesón se mueve con una velocidad que no puede ser mayor que c, la distancia a que pueden transmitirse los mesones no supera a h/m_0c. Esta magnitud constante debe caracterizar al radio de acción de las fuerzas nucleares.

A esta conclusión llegó Yukawa. Teniendo en cuenta el radio de acción de las fuerzas nucleares entonces conocido, Yukawa dedujo que la teoría coincide con la experiencia si la masa en reposo del mesón m_0 es 200—300 veces mayor que la de la masa del electrón.

La teoría expuesta admite que pueden existir, con resultado análogo, mesones neutros, eléctricamente negativos y positivos, lo que permite interpretar fácilmente, dentro del marco de dicha teoría, cualquier interacción entre nucleones. Llamando π al mesón de Yukawa y conviniendo en designar con un índice el signo del mesón, podemos escribir la interacción entre dos neutrones o dos protones como procesos de intercambio de un mesón neutro,

$$p \rightleftarrows p+\pi^0, \quad n \rightleftarrows n+\pi^0.$$

La interacción de intercambio de un protón y un neutrón requiere un mesón negativo o positivo de acuerdo con las ecuaciones

$$p \rightleftarrows n+\pi^+, \quad n \rightleftarrows p+\pi^-.$$

La teoría de Yukawa fue creada antes de que se descubrieran los mesones. En la actualidad, las fórmulas que hemos escrito responden a fenómenos que se observan en la práctica.

§ 222. Mesones

El nombre de «mesones» (del griego μέτος, medio o intermedio) subraya que se trata de una partícula de masa intermedia entre la del electrón y la del protón. Las experiencias demuestran que existen varios tipos de mesones. Los mesones (con carga eléctrica) fueron observados por vez primera en los rayos cósmicos. Ahora los mesones se producen en los aceleradores: aparecen en las colisiones entre nucleones.

Sin embargo nosotros no consideramos que todos estos diversos mesones desempeñan un mismo papel en las interacciones entre nucleones. El mesón de Yukawa es el mesón π o pión. Como ya indicamos antes, existen piones positivos, negativos y neutros. Según las últimas mediciones, la masa del pión es igual a 273 m_e (m_e es la masa del electrón).

En los rayos cósmicos se descubrieron primeramente los mesones μ, muones (positivos y negativos), cuya masa es igual a 207 m_e. Y sólo al cabo de 10 años de haber sido descubiertos los muones se demostró que éstos son productos de la desintegración de los piones. La causa de que los investigadores vieran fácilmente los muones y no distinguieran al pión, está en la diferencia de sus períodos de vida. Si la vida media de un muón es aproximadamente igual a 10^{-6} s, la vida media del pión viene expresada por números cien veces menores, del orden de 10^{-8} s.

Esta transformación puede demostrarse por medio de las fotografías. En muchas de ellas pueden hallarse casos de retardación de un pión (esta retardación se conoce fácilmente por el aspecto de la traza de la partícula: ésta se hace más gruesa a medida que la velocidad va siendo menor, ya que la partícula lenta origina más iones en el camino que recorre) que terminan cuando la partícula se para. En este caso, en el punto en que se detuvo la partícula comienza una nueva traza. El cálculo demuestra que la nueva partícula posee una energía bastante grande, lo cual puede explicarse únicamente suponiendo que una parte de la energía en reposo del pión se transforma en energía cinética. La ley de la conservación del impulso impone que en la transformación del pión en muón se origine simultáneamente una partícula neutra de masa muy pequeña. Aquí nos volvemos a encontrar con un neutrino, pero éste es ya otro neutrino. Con estas investigaciones se logró demostrar que los piones se transforman en fotones o en un par de leptones según el esquema

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad \pi^+ \longrightarrow \bar{\nu}_e + e^+, \quad \pi^- \longrightarrow e^- + \nu_e,$$
$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

Por lo tanto existen dos tipos de neutrino y dos tipos de antineutrino.

La masa en reposo del pión es de cerca de 150 MeV. Esto quiere decir que el pión se puede producir en un bombardeo nuclear con proyectiles cuyas energías sean mayores que esta cifra. En realidad se necesita una energía mayor de 300 MeV. El bombardeo nuclear con partículas de esta energía va acompañado de la aparición de un gran número de mesones.

Es extraordinariamente difícil demostrar que aparecen piones neutros, ya que su período de vida resultó ser igual a 10^{-15} s. Estas partículas tienen tiempo de recorrer durante su vida una milésima de milímetro.

No vamos a enumerar otros mesones que se descubren en número cada vez mayor a medida que van aumentando las posibilidades de los aceleradores. Los piones se pueden considerar como el estado fundamental de toda la familia de los mesones, que estudiaremos después de conocer el espectro de los bariones.

§ 223. Teoría relativista del electrón

Con anterioridad (§ 180), al estudiar la ecuación de Schrödinger, no utilizamos las relaciones de la teoría de la relatividad, suponiendo tácitamente que la velocidad de las partículas era pequeña comparada con la velocidad de la luz.

Pero cuando se estudian electrones de grandes energías, del orden de millones de electrón-voltios, es absolutamente imposible prescindir de estas correcciones. Electrones con velocidades tan altas se encuentran en la emisión radiactiva, en los tubos de rayos X que funcionan con tensiones de millones de voltios, en los betatrones, etc.

Si queremos definir los electrones que tienen estas velocidades por una función de onda correcta, hay que tener en cuenta la relación, entre la energía y el impulso, que da la teoría de la relatividad.

Si la masa en reposo se da, entre la enegía del cuerpo y su velocidad, así como entre el impulso y la velocidad, existe una dependencia directa. Por lo tanto, la energía puede relacionarse también con el impulso. Elevando al cuadrado las expresiones

$$\frac{\mathcal{E}}{c}=\frac{m_0c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad p=\frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

y restando la segunda de la primera, se obtiene que

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2}=p^2+m_0^2c^2.$$

La relación entre la energía y el impulso viene expresada por la ecuación

$$\mathcal{E}=\pm c\sqrt{p^2+m_0^2c^2}$$

(véase la fig. 245). Cuando $p=0$, $\mathcal{E}=\pm m_0c^2$, las dos ramas de la curva representada en la figura cortan sobre el eje segmentos iguales a la energía en reposo de las partículas.

Durante mucho tiempo no se prestó atención a la segunda rama —negativa— de esta curva. Parecía imposible que existieran partículas que se comportaran de acuerdo con las leyes de la rama negativa. En efecto, una partícula que posea energía en reposo negativa y cuya energía disminuya al aumentar su impulso, debe comportarse de un modo muy extraño. Se parecerá a una partícula de masa negativa, lo que significa que, cuando una fuerza actúe sobre un «electrón» de este tipo, la aceleración que reciba la partícula estará dirigida en sentido contrario al de la acción de la fuerza. Si intentamos atraer esta partícula, se alejará. Figurémonos que hay dos electrones próximos entre sí; uno ordinario y otro singular, que se comporta según la ley de la curva inferior. Entre estas partículas debe existir repulsión. El electrón normal se alejará del singular. Pero el «electrón» singular, por la acción de la fuerza repulsiva,

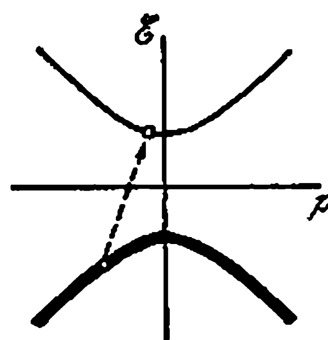


FIG. 245.

será atraído, y, por consiguiente, se acercará al electrón ordinario. Se produce un movimiento acelerado conjunto de este par de partículas, con la particularidad de que el aumento de la energía cinética positiva del electrón ordinario estará compensado por el aumento de la energía negativa de la partícula singular.

¿Qué partícula es ésta, si es que existe? En primer lugar, conviene responder que, desde el punto de vista de la mecánica cuántica, no se trata de otra partícula. La rama negativa de la curva energía — impulso debe interpretarse como el nivel eléctrico más bajo de una misma partícula, es decir, del electrón. Además de los niveles ordinarios de energía, el electrón puede hallarse en niveles de energía negativa. La transición de un nivel más alto a un nivel más bajo debe efectuarse, lo mismo que en otros casos, emitiendo energía.

Claro que, en esta transición, la emisión no puede limitarse a un fotón. Esto se comprende por la siguiente razón. Al pasar el electrón del estado $\mathscr{E}_1$, p_1, de la curva superior, al estado $\mathscr{E}_2$, p_2, de la curva inferior, se desprende una cantidad de energía igual a

$$\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2=c\left(\sqrt{p_1^2+m_0^2c^2}+\sqrt{p_2^2+m_0^2c^2}\right),$$

es decir, mayor en todo caso que $c\,(p_1+p_2)$. Si en este caso la energía se transmite a un fotón, deberá ser $\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2=h\nu$, y $p_1+p_2=h\nu/c$, es decir, la variación del impulso del fotón ($\boldsymbol{p}_1$ antiparalelo a $\boldsymbol{p}_2$) es igual a $h\nu/c$. Pero $\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2$ no es igual a $c\,(p_1+p_2)$, sino mayor que esta cantidad. Es imposible satisfacer simultáneamente las leyes de conservación de la energía y del impulso en el caso de ser emitido un solo fotón, pero esto puede conseguirse siempre si se desprenden dos fotones.

A nosotros no nos extraña el hecho de que el estado inferior corresponda a una energía negativa, y de que la partícula con $\mathscr{E}<0$ se comporte de un modo muy raro. La dificultad está en otra circunstancia: en el nivel inferior (en virtud de que se extiende a todos los valores de los impulsos) hay tantos puestos como se quiera. ¿Por qué no pasan todos los electrones normales a este estado? La dificultad con que tropezamos consiste en que el cuadro que acabamos de esbozar prevé la existencia única de los electrones «singulares». Los electrones ordinarios deberían existir solamente durante cortos instantes, lo mismo que los átomos excitados.

§ 224. Generación y aniquilación de pares de partículas

La teoría relativista del electrón fue creada por Paul Dirac en 1928. La descripción que en esta teoría se da del electrón difiere esencialmente de la que se da en la de Schrödinger. El comporta-

miento del electrón se define ya, no por una función de onda, sino por cuatro. La existencia del espín del electrón no se deduce de la teoría de Schrödinger. Por el contrario, dicho espín es una consecuencia necesaria de la teoría de Dirac. Los éxitos de esta teoría en la descripción de muchos fenómenos demuestran que sus ideas fundamentales son correctas. Nos detendremos solamente en la interpretación que da esta teoría a la contradicción de que hablamos en el párrafo anterior. ¿Cómo puede explicarse la existencia de multitud de electrones ordinarios? ¿Como explicar el que los electrones no «deseen» pasar al nivel más bajo de energía negativa?

El principio de Pauli no permite que un electrón pase a un nivel más bajo si dicho nivel está ocupado por dos electrones con espines opuestos. Apliquemos este principio al problema que nos interesa. Obtendremos la solución si suponemos que todos los estados de energía negativa están ocupados. ¿Significa esto que todo el espacio está ocupado completamente por electrones en estado de energía negativa? Esta conclusión parece inevitable. La teoría de Dirac condujo a una nueva idea acerca del vacío. El vacío adquiere en esta teoría propiedades físicas. Está ocupado por electrones en estados de energía negativa, siendo esta ocupación ilimitada, puesto que la disminución de la energía que tiende al infinito negativo no tiene límite.

Veamos ahora qué fenómenos es capaz de explicar y predecir esta teoría.

Si todos los estados de energía negativa están ocupados, su existencia sólo se logra descubrir cuando un electrón, después de recibir una porción considerable de energía, mayor en todo caso que $2m_0c^2$, pasa desde el nivel inferior de energía negativa al nivel superior. Este proceso puede ocurrir gastando dos fotones. También es posible otra variante: un fotón que pase junto al núcleo de un átomo pesado (que posee un campo eléctrico intenso) puede gastar su energía en elevar un electrón del nivel negativo al positivo. El papel del núcleo atómico consiste, en este caso, en dar el impulso necesario.

En ambos casos se «genera» un electrón. Pero al mismo tiempo que aparece el electrón se origina un «hueco» en los estados de energía negativa. La salida del electrón, es decir, de una carga negativa, hace que el hueco reciba una carga positiva de igual magnitud. Por otra parte, la falta de una partícula de energía negativa significa que la energía ha aumentado. Por consiguiente, la energía del hueco será tanto más elevada cuanto mayor sea el impulso. Llegamos a la conclusión de que los «huecos» deben comportarse lo mismo que si fueran electrones con carga positiva y energía positiva. A excepción del signo de la carga, el comportamiento del electrón positivo (positrón o positón) no debe diferir en nada del

comportamiento y de las leyes del movimiento del electrón ordinario.

El positrón y el electrón se «generan», formando pareja, a expensas de la energía de los fotones. También es posible el proceso inverso, o sea, la aniquilación, que consiste en la transformación de un electrón y un positón en dos fotones, o en uno solo si la aniquilación ocurre cerca de un núcleo atómico pesado.

Se comprende por qué los positones no viven mucho; son atraídos por los electrones, y al encontrarse con ellos desaparecen. Pero, ¿por qué no desaparecen los electrones? Por la sencilla razón de que hay exceso de ellos.

¿Puede ocurrir que existan sistemas en los cuales haya exceso de positones y en qué, por lo tanto, los electrones sean inestables? Esta suposición no encierra ningún absurdo.

La generación de pares y su aniquilación son procesos que se observan perfectamente y en número ilimitado en los laboratorios. Si a través de una hoja metálica delgada pasan rayos γ de energía mayor que 1 MeV, es fácil observar cómo de dicha hoja se desprenden electrones que en el campo magnético se desvían en sentidos opuestos. Siguiendo al positrón (de los medios para observar las partículas cargadas se trata en el § 207). descubrimos que en cierto instante desaparece. Se ha producido su unión con un electrón. Valiéndose de modernos contadores de fotones, puede demostrarse con todo rigor que, en este mismo instante, desde este punto parten en sentidos opuestos dos fotones cuyas energías son del orden de $Mc^2/2$ eV cada una.

§ 225. Partículas y antipartículas

No había ningún motivo para suponer que la existencia del positón o, como será mejor llamarle ahora, antielectrón, es una peculiaridad de las partículas pequeñas. A pesar de una serie de particularidades específicas, la teoría de la interacción entre los nucleones se desarrolla en las mismas direcciones que la teoría de la interacción de los electrones. En la mayoría de los trabajos teóricos se supone que los nucleones deben describirse por ecuaciones completamente semejantes a las ecuaciones de Dirac para los electrones. Si esto es así, es de esperar que en los nucleones existan antipartículas que se encuentren en la misma interacción con el protón y el neutrón que el positón se halla con el electrón. La experiencia demuestra que, efectivamente, así ocurre en el caso del protón. Poco después se descubrió también el antineutrón, que se diferencia del neutrón por la dirección del momento magnético (en el neutrón el momento magnético y el vector impulso de rotación son antiparalelos, mientras que en el antineutrón son paralelos).



FIG. 246.

El descubrimiento del antiprotón demuestra que es correcta la idea general de la ligazón indisoluble del campo con las partículas. Lo mismo que el par positón — electrón, el par protón — antiprotón puede surgir mediante la transición de un nucleón del estado de energía negativa al estado de energía positiva. Para

este fin se necesita una energía no menor que 2 Mc^2. Esta es una energía enorme, 1840 veces mayor que la necesaria para crear un par electrón — positrón. Fueron necesarios aceleradores de millones de electrón-voltios para poder descubrir el antiprotón.

Cuando un protón y un antiprotón se encuentran, se aniquilan. Como los nucleones transmiten la energía por medio del campo mesónico, al aniquilarse, su masa y energía originan cuantos de este campo, es decir, mesones.

No cabe duda que este proceso será estudiado detalladamente durante los próximos años.

La fig. 246 reproduce la fotografía de la aniquilación de un protón y un antiprotón. El proceso fue observado en una cámara de burbujas llena de propano líquido. El esquema del proceso se representa en el ángulo superior izquierdo de la figura.

Los razonamientos acerca de la necesidad de la existencia de las antipartículas se aplican también al neutrino. Su imagen «especular» se llama antineutrino. La diferencia entre las partículas que forman este doblete es la misma que hay entre el neutrón y el antineutrón.

En forma de doblete se encuentran también los muones y otras partículas elementales que no vamos a mencionar.

Los muones representan de por sí un triplete. Los hay de tres tipos: con carga más, con carga menos y con carga igual a cero. A diferencia del neutrón y del neutrino, el muón neutro carece de espín y no puede tener antipartícula (puede decirse que coincide con su antipartícula). Otra partícula que no tiene imagen «reflejada» es el fotón.

§ 226. *Asimetría de las partículas elementales*

La interacción de los nucleones se efectúa emitiendo y absorbiendo muones. Esta es la interacción más fuerte de las partículas elementales (su duración es de 10^{-23} s) responsable de las fuerzas que enlazan los nucleones en el núcleo atómico. La interacción electromagnética, que se reduce al intercambio de fotones, dura 10^{-21} s; las fuerzas electromagnéticas son, aproximadamente, cien veces más débiles que las nucleares. Estos dos tipos de interacciones se ha convenido denominar *fuertes*, en contraposición a la interacción *débil*, que tiene lugar en aquellas transformaciones de partículas en que interviene el neutrino. A estas últimas pertenece la transmutación del neutrón en protón, con emisión y absorción de un neutrino y de un electrón (la desintegración β, a la que nos referimos antes), y la desintegración de los mesones π y μ, que se desarrolla según los esquemas

$$\pi \longrightarrow \mu + \nu, \qquad \mu \longrightarrow e + \nu + \bar{\nu}.$$

La duración de la interacción débil es del orden de 10^{-9} s, y las fuerzas de interacción que intervienen en estos procesos son, aproximadamente, 10^{-14} veces más débiles que las nucleares. Está claro que la valoración de las fuerzas de interacción por el tiempo que dura el proceso debe hacerse en igualdad de las demás condiciones.

Ultimamente se han conocido hechos extraordinariamente interesantes relativos a las interacciones débiles. Se ha descubierto que los procesos débiles se efectúan asimétricamente con respecto a la rotación «a la derecha» y «a la izquierda». Así, por ejemplo, se demostró que en la desintegración β de los núcleos de los átomos de cobalto, polarizados a temperaturas bajas por medio de un campo magnético (la polarización de las partículas consiste en orientar su momento magnético y su espín a lo largo de una dirección determinada), la distribución angular de los electrones es asimétrica en las direcciones «hacia adelante» y «hacia atrás». Estos mismos hechos se descubrieron en la desintegración de los mesones μ con respecto a la dirección de su movimiento.

La teoría de este fenómeno fue propuesta por T. D. Lee y C. N. Yang y por el científico soviético L. D. Landau. Los fenómenos a que nos referimos pueden explicarse de dos formas: por la asimetría intrínseca de las partículas o por la asimetría del espacio. La esencia de la primera explicación, a la cual nos limitaremos, consiste en suponer que las partículas elementales, por sus propiedades de simetría, son semejantes a una hélice. Partículas asimétricas de este tipo son bien conocidas en física; a ellas pertenecen las antípodas ópticas dextrógiras y levógiras de las moléculas, de las cuales se trató detalladamente en la pág. 438. Se comprende que una partícula elemental asimétrica, orientada con su eje a lo largo de una dirección determinada, será polar, cosa que la experiencia atestigua.

Para explicar la asimetría que se observa en el experimento con el haz de muones, puede utilizarse la hipótesis de Landau, en la que él relaciona la asimetría de la partícula con su carga. Como dijimos en el párrafo precedente, todas las partículas, menos el fotón, se encuentran en la naturaleza en forma de pares de carga. Landau supuso que si una partícula cualquiera posee la simetría de una hélice dextrógira, su antipartícula tendrá la simetría de una hélice levógira. La imagen reflejada en un espejo de una mano derecha, es una mano izquierda, y la de una hélice dextrógira, una hélice levógira. De acuerdo con la hipótesis expuesta, la imagen reflejada (especular) de una partícula representará de por sí a su antipartícula.

¿Qué tiene que ver esto con el experimento del haz de muones? Puede demostrarse que las partículas exentas de masa deben orien-

tarse con su espín en el sentido del movimiento. La masa del neutrino es evidentemente nula. Por lo tanto, todos los neutrinos están «polarizados longitudinalmente». La diferencia entre el neutrino y el antineutrino se reduce a lo siguiente: el espín del neutrino tiene la dirección del movimiento, mientras que el del antineutrino tiene el sentido opuesto. Los muones se obtienen por desintegración de los piones. Pero el espín del pión es nulo, por lo tanto, el espín del muón debe ser paralelo al del neutrino, es decir, los muones estarán en este haz polarizados longitudinalmente, lo que hace que sea comprensible la asimetría de la distribución de los electrones en la ulterior desintegración de los muones.

De las partículas que poseen en su movimiento simetría helicoidal dextrógira y levógira se dice que son partículas de distinta paridad y se designan por (+) y (—).

§ 226a. Espectro bariónico

Al chocar con otras partículas, los nucleones se excitan y pasan a un gran número de estados cuánticos distintos. El nucleón en estado excitado se llama barión.

Nuestra idea acerca del sistema de niveles bariónicos y de las transiciones entre ellos se muestra en el esquema de la fig. 246a, propuesto por el físico americano Víctor Weisskopf. Las rayas horizontales gruesas indican los niveles energéticos del barión descubiertos experimentalmente. La escala de energías se da a la izquierda. Para los niveles de energía de los núcleos atómicos que consideramos en el párrafo anterior fue necesaria una escala centenares de miles de veces mayor que la empleada para los átomos.

Al pasar al espectro de los bariones tenemos todavía que aumentar la escala mil veces más. Vemos que la diferencia de energía entre los niveles se mide ya en unidades GeV (gigaelectrón-voltio). Esta escala muestra ya de por sí el sentido que tiene el constante incremento de las potencias de los aceleradores de partículas: la ejecución de este esquema fue posible gracias a los últimos trabajos realizados en reactores que comunican a las partículas-proyectiles energías suficientes para excitar al barión.

Toda la figura debe entenderse como el espectro de una partícula cuyo estado fundamental (nucleón) es un doblete. La diferencia entre las componentes de este doblete —protón y neutrón—, igual a 1,2 MeV, no se ve en la escala del dibujo que analizamos.

Para mayor claridad, los niveles del barión están divididos en columnas, que difieren en los valores de dos números cuánticos, el de espín isotópico I y el de extrañeza S.

Como acabamos de decir, la diferencia de cargas desplaza el nivel en una magnitud inapreciable en la escala de la figura. La

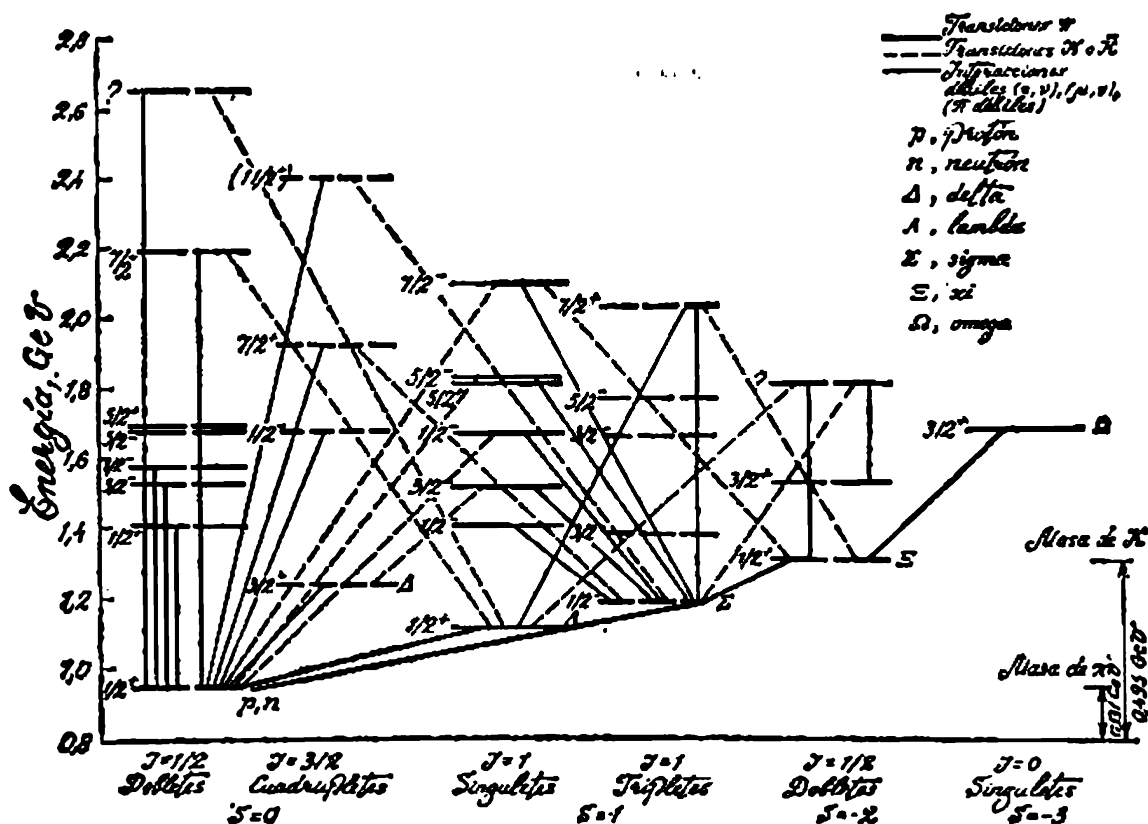


FIG. 246a.

experiencia demuestra que algunos estados se encuentran en una sola variedad de carga, es decir, son singuletes. En la tercera columna por la izquierda (y también en la última) se representan los niveles de singulete. El nivel de singulete más bajo del barión se llama partícula lambda. La partícula Λ es eléctricamente neutra.

Sobre el nivel doblete fundamental protón-neutrónico (primera columna por la izquierda) se han reunido otros dobletes. En la segunda columna por la izquierda se representan los cuadrupletes. El nivel más bajo de esta familia —la partícula delta (Δ)— se encuentra con cuatro variantes de carga Δ^-, Δ^0, Δ^+, y Δ^{++}. La cuarta columna es de tripletes, y la quinta y la sexta, de dobletes y singuletes respectivamente.

A los estados con una misma multiplicidad se les atribuye un número de espín isotópico I (término desafortunado en extremo, ya que este número cuántico nada tiene que ver con el espín de rotación). Este número se elige de tal modo, que $2I+1$ sea igual a la multiplicidad.

Los niveles también están divididos en columnas de acuerdo con el número cuántico de extrañeza S. La extrañeza $S=Y-A$, donde

A es el número bariónico. Para la tabla que estudiamos $A=+1$. Todos los antibariones tienen $A=-1$, y los mesones, $A=0$.

El número bariónico de los núcleos atómicos es igual al número de núcleos. El valor de Y es igual al doble de la carga media del multiplete:

primera columna $Y=2\cdot\frac{1}{2}(0+1)$, $S=0$;

segunda columna $Y=2\cdot\frac{1}{4}(-1+1+0+2)$, $S=0$;

tercera columna $Y=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 0$, $S=-1$;

cuarta columna $Y=2\cdot\frac{1}{3}(-1+0+1)$, $S=-1$;

quinta columna $Y=2\cdot\frac{1}{2}(-1+0)$, $S=-2$;

sexta columna $Y=2\cdot(-1)$, $S=-3$.

Los niveles energéticos de una misma columna (con los mismos números S e I) difieren en los valores de los espines y de la paridad.

Consideremos ahora las transiciones entre niveles. En la figura se indican las transiciones π (líneas de trazo continuo), las transiciones K (líneas de trazos) y las transiciones con expulsión de un par de leptones (líneas de trazo continuo grueso). La emisión de fotones no se señala en la figura. Los fotones se desprenden de ordinario en las transiciones piónicas, si no se produce variación de carga. Las transiciones son posibles desde cada término de un multiplete hasta cada término de otro multiplete; para no complicar el dibujo, sólo se da una línea.

Las transiciones piónicas sólo son posibles entre niveles con valores iguales de S. Precisamente este extraño comportamiento de los bariones sirvió de fundamento para introducir el número S.

Si a todos los piones se les atribuye una extrañeza igual a cero, y en el caso de los kaones se supone $S=+1$ para K^+ y K^0, y $S=-1$ para $\overline{K}^0$ y $\overline{K}^-$ (el trazo sobre el símbolo significa que es una antipartícula), se cumplirá la ley de conservación de la extrañeza.

Si el espín isotópico del pión es igual a 1, y el del kaón es igual a 1/2, en las transiciones se conserva también el número de espín isotópico.

A pesar de que en este esquema se consideran los mesones como cuantos peculiares de radiación, resulta conveniente estudiar toda la familia de los mesones como estado de excitación del pión. Hay que recordar sin embargo que existe una diferencia esencial entre el pión y el nucleón. El pión es inestable y se transforma en fotones

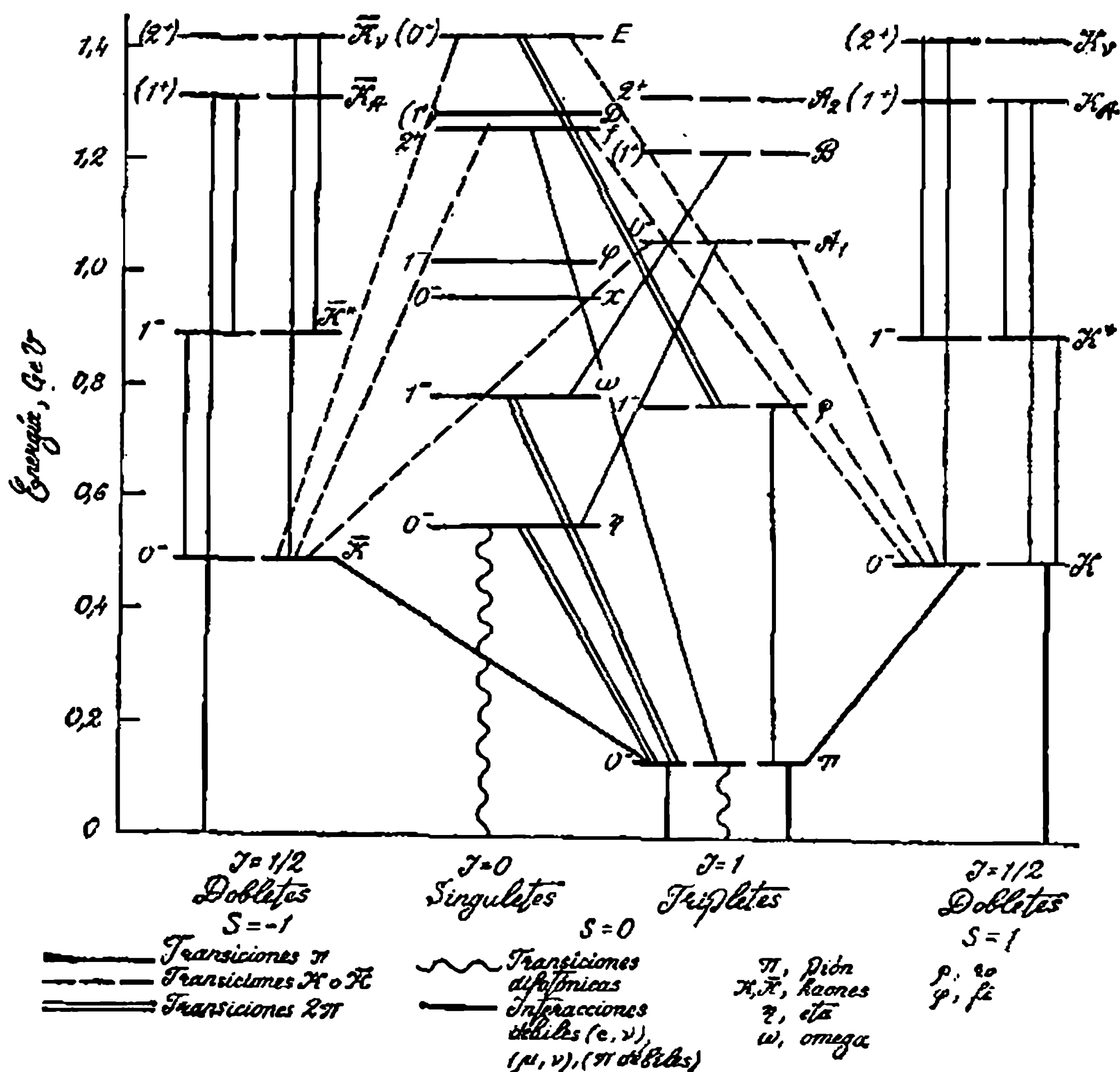


FIG. 246b.

o en pares de leptones: el π° se transforma en 10^{-16} s en fotones, y los mesones π con carga se transforman al cabo de 10^{-8} s en pares de leptones.

El esquema del espectro mesónico se representa en la fig. 246b. Este esquema se consigue organizar siguiendo el mismo principio que en el espectro bariónico. No obstante, este esquema no es tan bonito como el anterior. Vemos que los kaones y los mesones eta son capaces de desaparecer sin pasar por el estado de piones.

Los muones, como es natural, no figuran en este esquema, ya que son términos del par de leptones.

§ 226b. Quarks

Los espectros del átomo y del núcleo atómico se explican por la dinámica y la interacción de sus partes componentes, o sea, de los electrones y el núcleo, en el caso del átomo, y del protón y el neutrón, en el caso del núcleo atómico.

Puede pensarse que con esto mismo se explican los espectros de los bariones y de los mesones. Si se consiguiera demostrar que los nucleones y los mesones están constituidos por partículas más elementales, y si fuera posible explicar por medio de la interacción de estas partículas más elementales el sistema de niveles del barión y del mesón, la física de las partículas elementales adquiriría la perfección de la mecánica cuántica.

Pero, por ahora, este problema dista mucho de estar resuelto. Sin embargo, no hace mucho fue propuesto un esquema sencillo de la estructura de los bariones y de los mesones que describe tan acertadamente los niveles de energía que se observan, que es difícil considerar casual este acierto. Aún no existen confirmaciones experimentales de la hipótesis a que nos referimos. Es posible que se consigan en el futuro valiéndose de nuevos aceleradores que superen en potencia a los que existen, o que la hipótesis resulte ser infundada.

Pero aunque no existan confirmaciones experimentales, el esquema de los quarks seguirá siendo útil como método de clasificación de los niveles de energía de los bariones y de los mesones. Para explicar los espectros se introducen tres tipos de quarks: p (carga $+2/3$, extrañeza 0), n (carga $-1/3$, extrañeza 0) y λ (carga $-1/3$ y extrañeza -1). También son necesarias las antipartículas correspondientes, que se obtienen cambiando los signos de S y de la carga por los contrarios. El espín de cada quark es igual a $1/2$.

Los espectros de los bariones y de los mesones reproducidos en las dos figuras anteriores se explican de un modo no preconcebido. Para esto hay que suponer que el barión está formado por tres quarks, y el mesón, de dos (quark+antiquark). No es difícil comprobar que los valores correctos de la extrañeza, de la carga y del espín se obtienen inmediatamente si

$$\text{el neutrón} = 2n + p \quad \uparrow\uparrow\downarrow$$
$$\text{el protón} = 2p + n \quad \uparrow\uparrow\downarrow$$
$$\Delta^- = 3n \quad \uparrow\uparrow\uparrow$$
$$\Delta^0 = p + 2n \quad \uparrow\uparrow\uparrow$$
$$\Delta^+ = 2p + n \quad \uparrow\uparrow\uparrow$$
$$\Delta^{++} = 3p \quad \uparrow\uparrow\uparrow$$
$$\Lambda = p + \lambda + n \quad \uparrow\uparrow\downarrow$$

Los piones hay que construirlos de pares $p+\bar{n}\uparrow\downarrow$ (π^+), $p+p^-$ o $n+\bar{n}\uparrow\downarrow$ (π^0) y $n+p$ (π^-), etc. Valiéndose de este esquema se define bien no sólo la estructura, sino también las transiciones entre niveles.

Está claro que la introducción de los quarks, inculso si resulta acertada, resuelve solamente una parte de los problemas de la física de las partículas «elementales». En esta rama del saber, en conjunto, no se ha conseguido aún la armonía y la claridad que caracteriza a otras partes de la física.

32

ESTRUCTURA ATÓMICA DE LOS CUERPOS

§ 227. Sustancia policristalina y monocristales

El crecimiento de los cristales en una masa fundida o en una disolución comienza por regla general a partir de un número bastante grande de centros. Si no se toman medidas especiales, la cristalización conduce no a la formación de un monocristal, sino de una sustancia policristalina. Observada al microscopio (fig. 247), parece que esta sustancia está constituida por granos aislados. Cada grano es un cristal que ha tomado una forma irregular casual debido a que su crecimiento se vio dificultado por los cristales vecinos. La mayoría de los cuerpos que nos rodean, sobre todo los metales y las piedras, son sustancias policristalinas.

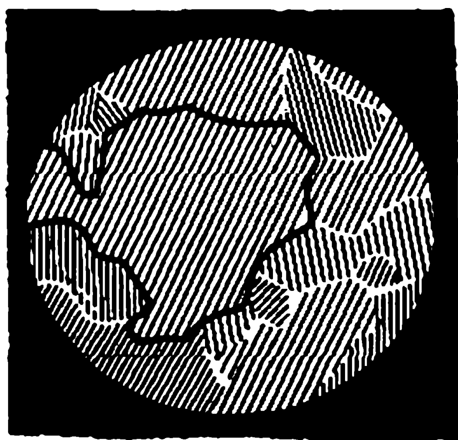


FIG. 247.

Los límites entre los granos se revelan fácilmente si la superficie del cuerpo se ataca con una solución apropiada. Esto se explica porque la mayoría de las impurezas que hay en la sustancia se concentran en las fronteras entre los granos. La capa intercristalina difiere del «cuerpo» del grano no sólo porque en ella hay átomos extraños, sino también porque posee propiedades peculiares y por que sus átomos se encuentran en un orden alterado (transitorio). La estructura particular de las juntas de los granos se ve muy bien si se observa con un microscopio electrónico: tienen la forma

de «caminitos» lisos peculiares. Las dimensiones ordinarias de los granos en los metales y en las piedras es de 10^{-4}—10^{-5} cm.

En la naturaleza puede hallarse, o se pueden hacer crecer artificialmente, un cristal solitario (monocristal) de cualquier sustancia cristalina. El monocristal se caracteriza por lo correcto de su forma: sus caras son planas, sus aristas, rectas, y posee simetría, es decir, sus partes son proporcionales. Esta forma regular expresa las propiedades internas del cristal, que permiten, haciendo una serie de experimentos indiscutibles, distinguir un cristal de un trozo de sustancia a la que le haya dado la misma forma artificialmente. Tampoco es difícil reconocer un cristal en el caso en que sus indicios específicos no se distingan. De un cristal grande de sal gema puede tallarse una esfera. Si ésta se disuelve en agua, la sustancia no se separa con igual rapidez de todos los puntos de la superficie de la esfera, y la forma casual tiende a convertirse, a medida que se va disolviendo, en la forma del poliedro natural para dicha sustancia. También se puede distinguir inequívocamente un monocristal de un policristal por medio del análisis radiográfico.

Así, pues, un cristal generado de modo natural tiene forma de poliedro. Como todo poliedro, el cristal tiene cierto número de caras p, de aristas r y de vértices e. Estos números están ligados por la relación $p+e=r+2$. Por ejemplo, el cubo tiene 6 caras, 8 vértices y 12 aristas.

Las caras de los cristales se encuentran formando franjas o zonas. Se llama *zona* un sistema de caras que se cortan según aristas paralelas. La dirección de estas aristas se llama *eje de zona*.

Los cristales de una misma sustancia pueden diferir mucho por su forma, pero se sabe desde hace ya mucho tiempo que para una sustancia dada son característicos los ángulos entre las caras y las aristas (en dependencia de circunstancias casuales una parte del cristal puede haberse desarrollado más que otra; la proporcionalidad aparente de las partes del cristal puede alterarse por esta razón). Esta importante regla, que se llama a veces *ley de la constancia de los ángulos*, se ilustra en la fig. 248, que representa cuatro cristales distintos de cristal de roca (SiO_2). Puede verse que el número de caras y sus dimensiones relativas son diferentes en las distintas muestras, pero los ángulos entre caras y las aristas

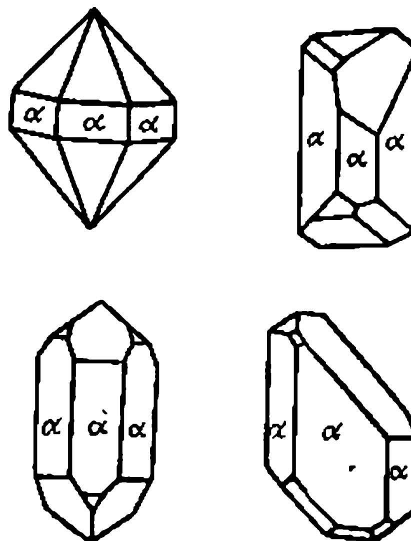


FIG. 248.

correspodientes (es decir, relacionadas por un mismo elemento de simetría y señaladas en la figura con la letra α) permanecen invariables.

§ 228. *Red espacial*

Como base para el estudio de los cristales se toma la siguiente afirmación fundamental: la distribución de la sustancia en el cristal puede representarse por una función periódica tridimensional.

En la fig. 249 se representa el dibujo de un papel pintado para empapelar. En este dibujo hay cierto elemento que se repite en dos direcciones. Tomemos un punto cualquiera A del dibujo y llamémosle *nudo*. En este dibujo se puede trazar un sistema de líneas que pasen por los nudos elegidos. El elemento del dibujo, por cuya repetición está constituido todo él, es una malla de la red formada. Es evidente que conociendo la malla se puede construir todo el dibujo por desplazamientos paralelos en la magnitud de los vectores de la malla $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

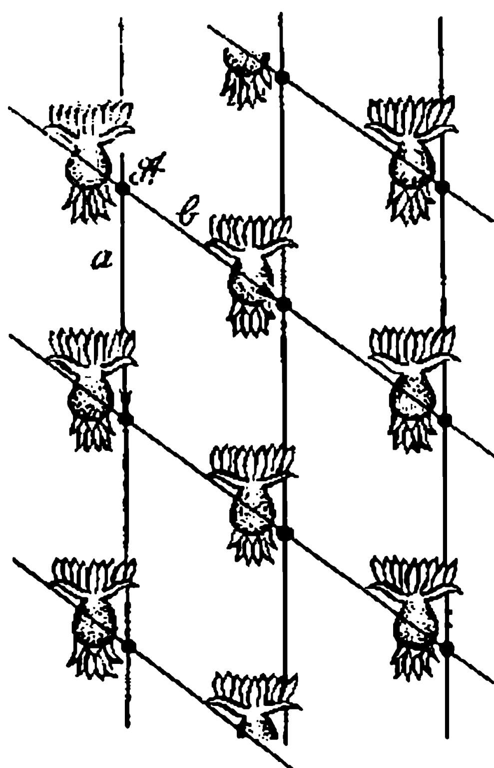


FIG. 249.

Un cristal no es una red plana, sino espacial. El elemento de un cristal en construcción es un paralelepípedo construido sobre tres vectores de traslación (translaciones), $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, los cuales, en términos generales, pueden elegirse por una cantidad innumerable de procedimientos. A este paralelepípedo le llamaremos *celdilla elemental*, a los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, *vectores principales* o *translaciones principales*, y a sus longitudes a, b, c, *períodos principales de repetición* o *períodos de identidad de la red*. La red se circunscribe en un sistema de coordenadas, como ejes del cual se toman las direcciones de los vectores principales. Los diversos procedimientos que existen para elegir los vectores principales, es decir, la celdilla elemental, se ilustran, para el caso de una red bidimensional, con la fig. 250. La celdilla elemental, en el caso general, es un paralelepípedo oblicuo de aristas a b, c y ángulos $\alpha = \widehat{b, c}$; $\beta = \widehat{c, a}$; $\gamma = \widehat{a, b}$. Las magnitudes a, b, c, α, β, γ, que caracterizan uniformemente la

celdilla elemental se llaman *parámetros* de ella. Como quiera que dada una celdilla elemental se determina toda la red, estas magnitudes se llaman a veces *parámetros de la red.*

Una celdilla en forma de parallelepípedo oblicuo se llama *triclínica*; si $\alpha=\gamma=90°$, la celdilla se llama *monoclínica*. Una cel-

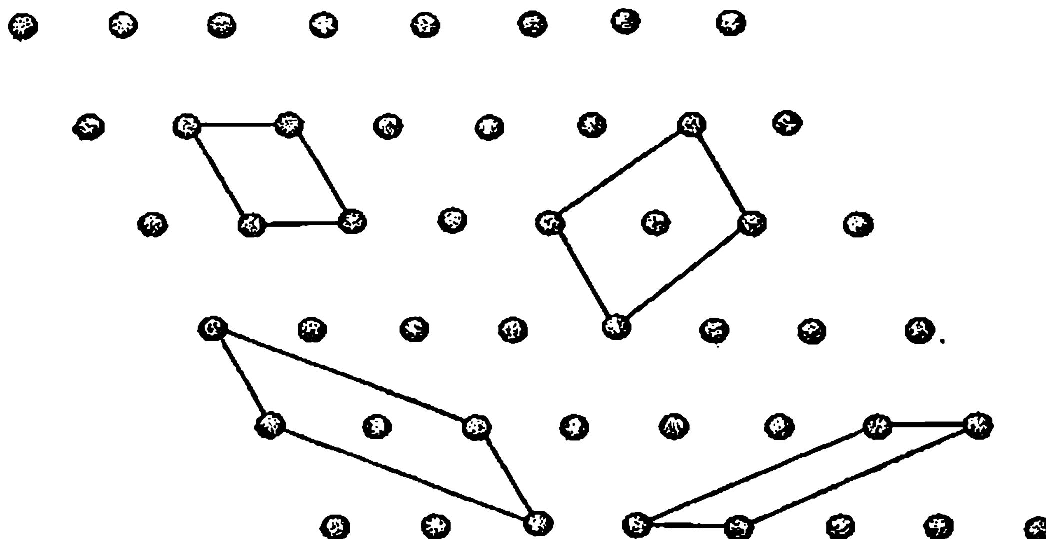


FIG. 250.

dilla en forma de paralelepípedo rectangular se llama *rómbica*, y si además $a=b$, *tetragonal*. Si $a=b\neq c$, $\alpha=\beta=90°$, y $\gamma=120°$. la celdilla se denomina *hexagonal*. Las celdillas más simples tienen forma de cubo. Si uno de los nudos se toma como origen de coordenadas, el radio vector de otro nudo cualquiera se puede representar así:

$$\boldsymbol{R}_{mnp}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c},$$

donde m, n, p son números enteros que designan los nudos según los ejes correspondientes y se llaman *índices de los nudos*. El conjunto de tres índices característicos de un nudo recibe el nombre de *símbolo del nudo* y se escribe de la forma $[[mnp]]$.

Existe una cantidad innumerable de planos reticulares y de filas de nudos. Tanto las filas de nudos como los planos reticulares están representados en la red por infinitas familias paralelas. El paso de una fila a otra de una misma familia, o de un plano a otro, se efectúa, por traslación paralela a lo largo de cualquier vector que una dos nudos de estas filas o de estos planos. Cada familia de filas de nudos se caracteriza por un período de identidad a lo largo de la fila de nudos y por una dirección, es decir, por una inclinación con respecto a los ejes de coordenadas elegidos. Para describir una fa-

milia se toma una fila que pase por el origen de coordenadas. Una fila de nudos se caracteriza uniformemente por los índices u, v, w del primer nudo que se encuentre en esta fila. Los índices de este nudo se llaman *índices de la fila* y se designan por $[uvw]$. Si un índice es negativo, el signo menos se escribe sobre la letra. El símbolo [100] corresponde al eje a de la red, el [010], al eje b, y el [001], al eje c. Las rectas [011] y $[01\bar{1}]$ son las diagonales planas que se encuentran en la cara bc. Está claro que [011] y $[0\bar{1}\bar{1}]$ representan a una misma recta. La diferencia entre estos símbolos sólo tiene sentido si se quiere subrayar la polaridad de la dirección. Las diagonales espaciales de la celdilla reciben los símbolos [111], $[\bar{1}11]$, $[1\bar{1}1]$ y $[\bar{1}1\bar{1}]$. Son cuatro porque existen ocho cuadrantes; otros cuatro símbolos indicarán estas mismas rectas pero con polaridad inversa. Por ejemplo, $[\bar{1}11]$ es antiparalela a $[1\bar{1}1]$, etc.

La red espacial puede construirse del modo siguiente. Con dos translaciones se construye una red plana infinita, es decir, un plano reticular; con una tercera traslación, que no sea en este plano, se construye la red espacial. La red espacial de un cristal puede representarse mediante familias de planos reticulares por una cantidad innumerable de procedimientos. Cada familia de planos reticulares está formada por planos paralelos situados a la misma distancia unos de otros. Para una red dada será característica exhaustiva de una familia de planos reticulares la distancia entre los planos y la orientación de uno de estos planos con respecto a los ejes de coordenadas elegidos. También es suficiente conocer la orientación del plano más próximo al origen de coordenadas, con respecto a los ejes elegidos. La distancia desde el origen de coordenadas a este plano será igual a la distancia entre planos de la familia que se considere.

Supongamos que este plano más próximo al origen de coordenadas corta en los ejes de la red las fracciones de los períodos de identidad a/h, b/k y c/l. Los números h, k, l, que caracterizan la orientación del plano, se llaman *índices del plano*. No es difícil darse cuenta de que h, k, y l son números enteros. Esto se deduce por lo menos del razonamiento siguiente. Consideremos el plano de la familia que pasa por el nudo origen de coordenadas y otro, desplazado en el período a. Esto se muestra en la fig. 251. Entre estos dos planos reticulares pasarán otros, pero tendrán que estar situados a iguales distancias entre sí. Por consiguiente, los períodos de identidad a lo largo de los ejes elegidos estarán divididos por los planos reticulares en un número entero de partes.

El plano más próximo al origen de coordenadas, que corta sobre los ejes los valores $1/h$, $1/k$ y $1/l$ de los períodos de identidad, se caracteriza por el conjunto de tres índices (números) h, k y l, que

reciben el nombre de símbolo del plano. El símbolo del plano se encierra en un paréntesis curvo: (hkl). Por ejemplo, el plano (236) corta sobre los ejes los segmentos $a/2$, $b/3$, $c/6$. A esta familia pertenecerá cualquier plano que corte sobre los ejes segmentos que

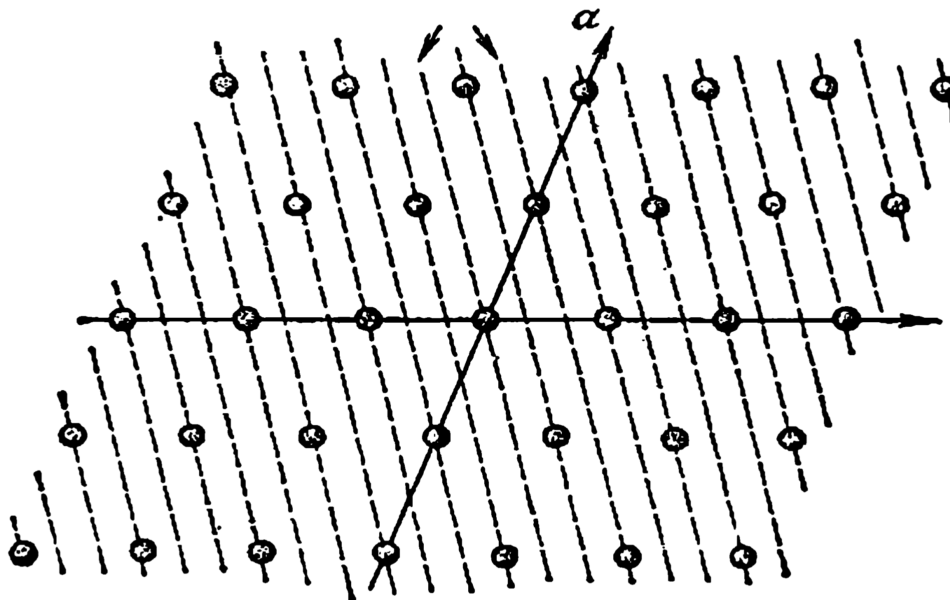


FIG. 251.

sean un número entero de veces mayores que los citados. Así, en nuestro caso, los planos siguientes al más próximo al origen de coordenadas cortarán sobre los ejes los segmentos siguientes: a, $2/3b$, $1/3\ c$; $3/2\ a$, b, $1/2\ c$, y así sucesivamente.

Si el plano corta sobre los ejes segmentos negativos, esto se indica poniendo el signo menos sobre el índice correspondiente. Es evidente que el plano (hkl) y el $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$ pertenecen a una misma familia. Por esta razón se pueden cambiar todos los signos de los índices por los contrarios.

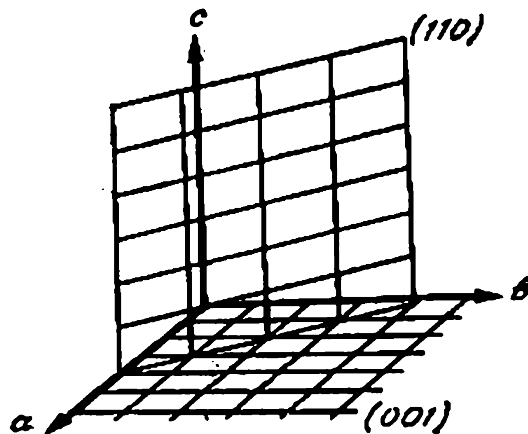


FIG. 252.

Si el plano es paralelo a un eje de coordenadas, el índice correspondiente es nulo. Por lo tanto, (110) es un plano paralelo al eje c, (001) es el plano ab de la red (fig. 252), (010) es el plano ac, y (100) es el plano bc. Los planos que pasan por uno de los ejes y por una de las diagonales tienen índices con dos unidades y un cero.

Por ejemplo, el plano (101) representa un plano paralelo al eje *b* que pasa por aquella de las diagonales *ac* que, sin pasar por el origen de coordenadas, pasa por los extremos de los vectores $+\boldsymbol{a}$ y $+\boldsymbol{c}$. A esta misma familia pertenecerá el plano $(\bar{1}0\bar{1})$, que pasa por los extremos de los vectores $-\boldsymbol{a}$ y $-\boldsymbol{c}$. El plano $(10\bar{1})$, o su «lado inverso» $(\bar{1}01)$, también es paralelo al eje *b*, pero pasa por una diagonal *ac* que no comienza en el nudo cero de la red y que pasa por los extremos de los vectores $+\boldsymbol{a}$ y $-\boldsymbol{c}$ o, respectivamente, por los de los vectores $-\boldsymbol{a}$ y $+\boldsymbol{c}$.

Los símbolos con tres unidades se refieren a planos que pasan por tres diagonales. Estos planos pasan por los extremos de los tres vectores de la red. Por ejemplo, el plano $(\bar{1}\,\bar{1}\,1)$ pasa por los extremos de los vectores $-\boldsymbol{a}$, $-\boldsymbol{b}$ y $+\boldsymbol{c}$.

Los índices de una familia de planos reticulares son a la vez los índices de las caras del cristal. Dos caras paralelas toman los índices (hkl) y $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$.

§ 229. *Elección de la celdilla Simetría de un cristal*

Para definir una red pueden tomarse distintas triadas de vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Si dentro de la celdilla elemental no hay un nudo, esta celdilla se llama primitiva.

La fig. 253 muestra varios procedimientos de elegir la celdilla elemental primitiva. A cada nudo de la red le corresponde un mismo

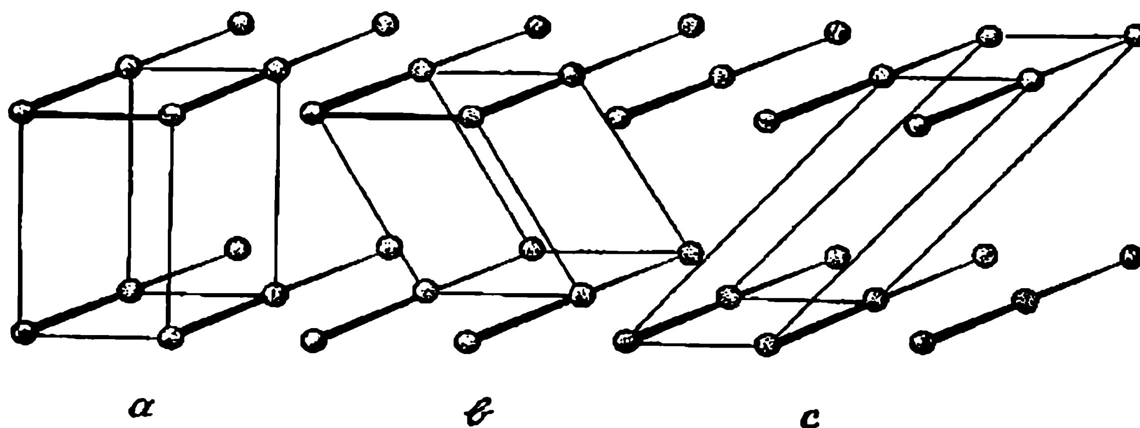


FIG. 253.

volumen, esto se explica por el carácter períodico de la red espacial. El volumen correspondiente a un nudo es igual al volumen de la celdilla elemental primitiva, independientemente del procedimiento que se halla seguido en su elección. En efecto, cada uno de los ocho nudos que se encuentran en los vértices de esta celdilla

está «repartido» entre ocho celdillas, es decir, pertenece a cada una de ellas en 1/8. De este modo, a cada celdilla le corresponde un nudo. En una serie de casos resulta conveniente tomar una celdilla elemental de mayor volumen que la primitiva.

Con objeto de que la celdilla elegida refleje lo más posible la simetría del cristal, en vez de la celdilla elemental primitiva se elige frecuentemente una celdilla elemental en la cual hay dos nudos adicionales que se encuentran en los centros de sus caras o de su volumen. Hay tres casos que se utilizan con mucha frecuencia.

1. Celdilla centrada en el cuerpo. El nudo adicional se encuentra en el punto de intersección de las diagonales espaciales de la celdilla. A esta celdilla le corresponden los nudos: [[000]] y $\left[\left[\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right]\right]$.
Un nudo, el del centro, pertenece por completo a la celdilla; los ocho nudos de los vértices del paralelepípedo pertenecen cada uno a ocho celdillas, es decir, a una celdilla dada le pertenece 1/8 de cada uno de estos nudos.

2. Celdilla centrada en las bases. Los nudos adicionales se encuentran en los centros de uno de los pares de caras, por ejemplo, *ab*. A cada celdilla le corresponden dos nudos: [[000]] y $\left[\left[\frac{1}{2}\frac{1}{2}0\right]\right]$.

3. Celdilla centrada en las caras. Los nudos adicionales se encuentran en los centros de todas las caras. A cada celdilla le pertenecen cuatro nudos: [[000]], $\left[\left[0\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right]\right]$, $\left[\left[\frac{1}{2}0\frac{1}{2}\right]\right]$ y $\left[\left[\frac{1}{2}\frac{1}{2}0\right]\right]$.

La celdilla primitiva se designa generalmente por la letra *P*; las celdillas centradas en las bases *bc*, *ac* y *ab*, por las letras *A*, *B* y *C* respectivamente; la centrada en las caras, por *F*, y la centrada en el cuerpo, por *I*.

Como subrayamos antes, el nudo de una red es un punto de ella, elegido de un modo determinado, pero arbitrario. El nudo siguiente se encuentra del elegido a la distancia de un período de la red. Por lo tanto, a la celdilla primitiva sólo le corresponde un nudo.

Puede decirse que todo el conjunto de los átomos de una celdilla primitiva lo sustituimos por un nudo. En la mayoría de los casos se toma como nudo de la red el punto de intersección de los elementos de simetría.

En una celdilla primitiva puede haber muchos átomos. La estructura en que en la celdilla entran muchos átomos, se caracteriza por las coordenadas de los átomos en la celdilla elemental.

Todos los hechos experimentales se explican irreprochablemente por medio de la idea del cristal como una red espacial. Las aristas y las caras del cristal se interpretan como filas de nudos y como planos reticulares. Los ángulos entre las caras y las aristas de los cris-

tales, en todos los objetos cristalinos de un compuesto químico dado, son iguales.

Todas las particularidades de simetría del cristal se deducen también de la idea de la red espacial.

Los cristales de sustancias distintas poseen diferente simetría. Si el cristal está bien formado, su simetría salta a la vista. Se ve que a través del cristal se pueden hacer pasar de un modo determinado planos y ejes de simetría.

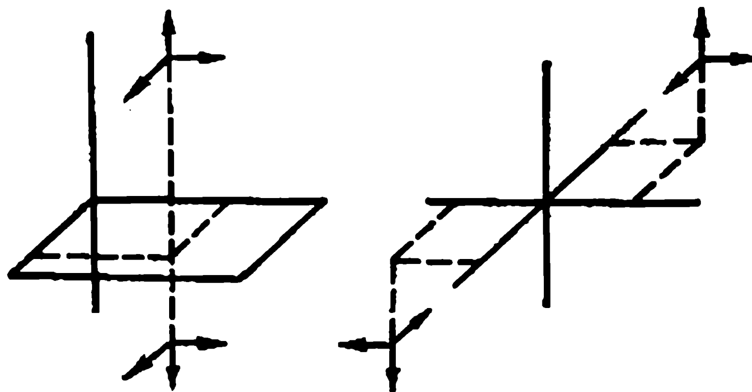


FIG. 254.

La simetría exterior del cristal se explica por su estructura interna, es decir, por la simetría de su red espacial.

A los elementos de simetría que se observan en los cristales, además de los ejes de simetría, pertenecen el plano especular y el centro de inversión (o centro de simetría).

Las operaciones que efectúan estos elementos de simetría se han representado en la fig. 254.

Hace ya mucho tiempo que se sabe que en los cristales no existen ejes de simetría superior al sexto orden *) ni ejes de simetría de quinto orden. Partiendo de esto, A. V. Gadolin demostró que sólo podían existir 32 clases de simetría entre los cuerpos cristalinos.

Antes de que fuera creada la teoría de la red espacial no estaba claro por qué no se encontraban en los cristales ejes de quinto, séptimo y demás órdenes de simetría. Esta y otras peculiaridades de la simetría de los cristales se pueden demostrar partiendo de dicha teoría.

*) Si un cuerpo coincide consigo mismo después de un giro de $2\pi/n$ alrededor de cierto eje, este último se dice que es un eje de simetría de orden n-ésimo. Por ejemplo, un prisma triangular cuya base sea un triángulo equilátero tendrá un eje de simetría de tercer orden, que pasará por el centro del triángulo y será paralelo a las aristas del prisma.

Consideremos la rotación de uno de los planos de la red. Las rotaciones imposibles para el plano serán imposibles con más razón para toda la red.

Supongamos que un eje de orden n-ésimo pasa por el nudo B de una red y que el eje idéntico más próximo a él pasa por el nudo A de la red (fig. 255). La rotación alrededor del eje B traslada el

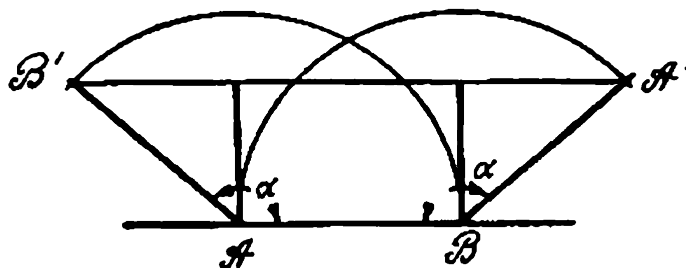


FIG. 255.

nudo A al nudo A', y la rotación alrededor de A traslada B a B'. De acuerdo con la construcción $B'A' = AB\ (1+2\cos\alpha)$. Pero la distancia entre los nudos $A'B'$ debe ser múltiplo del período de identidad AB, ya que AB es paralelo a $A'B'$. Por consiguiente, $2\cos\alpha$ debe ser igual a un número entero. De esta condición se deduce que $\cos\alpha$ sólo puede tener los valores 0, $\pm 1/2$ y ± 1, es decir, los ángulos de rotación serán 60°, 90°, 120°, 180°, y 360°. Como se desprende de la definición de operación de simetría cerrada, todos los ángulos de rotación son iguales al cociente de dividir 360° por un número entero. Por lo tanto, un cristal puede tener ejes de rotación cuya simetría sea de orden sexto, cuarto, tercero, segundo y primero.

Puede demostrarse fácilmente que un eje de simetría es una fila de nudos normal a un plano reticular.

La simetría de la red espacial determina la simetría del cristal. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que la simetría de la red es considerablemente más rica. Si existen 32 clases de simetría del cristal, en las redes espaciales existen, como demostró por vez primera el fundador de la cristalografía estructural Evgraf S. Fiódorov, 230 tipos de simetría o grupos de Fiódorov.

Esta mayor riqueza de simetrías en la red se explica por el hecho de que, además de las operaciones cerradas de simetría, contiene un elemento de simetría que no puede tener el cuerpo: la traslación. En efecto, una operación de simetría es un desplazamiento que pone al cuerpo en una situación que no se distingue de la inicial. Toda traslación en un período de identidad a lo largo de cualquier fila de nudos será por lo tanto una operación de simetría para la red infinita.

La traslación permite efectuar en la red los nuevos elementos de simetría siguientes: 1) la combinación de la rotación con la traslación — eje helicoidal—, y 2) la combinación de la reflexión con la traslación — plano de deslizamiento — (fig. 256). El dibujo de la derecha representa un eje helicoidal de cuarto orden; cada uno de los puntos *2*, *3*, *4* y *5* proviene del anterior por un giro de 90°

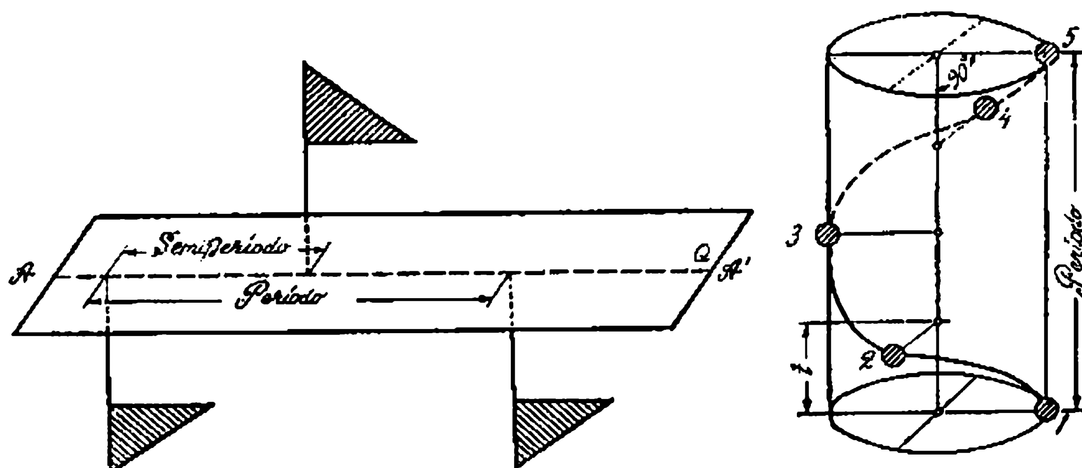


FIG. 256.

y un desplazamiento t, a lo largo del eje, igual a $\frac{1}{4}$ de período. En el dibujo de la izquierda, los triángulos están ligados entre sí por una reflexión en el plano Q y un deslizamiento a lo largo de la línea AA' en $\frac{1}{2}$ de período.

§ 230. Empaquetamiento de las partículas en el cristal

Se pueden empaquetar figuras que tengan un volumen y una forma determinados. Pero dista mucho de ser evidente hasta qué grado es correcto este procedimiento cuando se trata de átomos. Aguí lo importante, ante todo, es lo siguiente: ¿corresponderá la forma que se le atribuya al átomo o grupo de átomos, aunque sólo sea muy aproximadamente, al mínimo de la curva de potencial de la interacción de las partículas a lo largo de una dirección dada? y, si esto es así, ¿hasta qué grado abarcará el volumen atribuido al átomo o grupo de átomos todos los electrones (incluidos los de valencia) pertenecientes a dicho átomo o grupo? Si resulta que la limitación del átomo o molécula a un determinado contorno tiene sentido físico , se aclarará a la vez cómo se manifiesta esta forma cuando el cristal se constituye de partículas.

El carácter de las interacciones que enlazan los átomos en el cristal es infinitamente diverso. No obstante pueden deducirse algunos casos extremos: enlaces iónicos puros, enlaces homopolares puros, enlace metálico y el caso de un cristal formado por moléculas. La estructura de la sal gema, del sulfuro de zinc, del hierro y de la sustancia orgánica dicetopiperazina se han tomado como ejemplos (fig. 257). En los tres primeros casos lo característico es

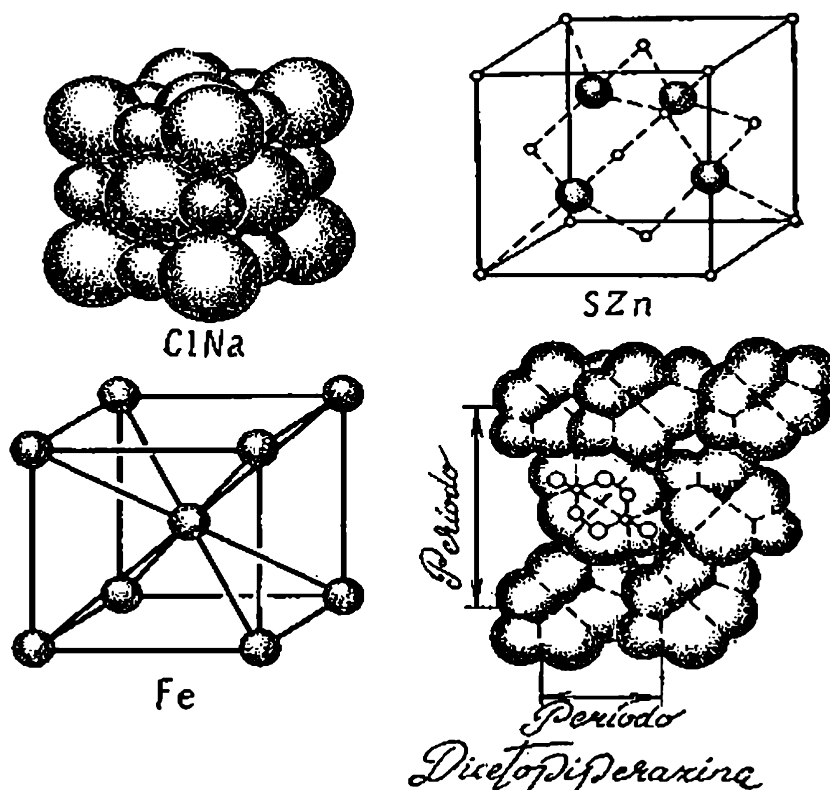


FIG. 257.

la ausencia de cualquier grupo compacto de átomos. En el cristal de sal gema no podemos destacar una molécula. Cada átomo de sodio tiene seis átomos de cloro vecinos totalmente equivalentes. Tampoco hay moléculas en los otros dos compuestos, representantes de los enlaces homopolar y metálico.

En los cristales iónicos todas las partículas son iones positivos o negativos que se atraen según las leyes de la electrostática. Todo lo dicho acerca del enlace iónico en las moléculas es correcto también para el cristal iónico. El carácter de las estructuras iónicas se comprende bien si los iones se representan por esferas de diámetro iónico determinado. En este caso los valores de los radios iónicos que se observan en las moléculas iónicas difieren poco de los radios iónicos en los cristales.

En los cristales con enlace homopolar, cada dos átomos están ligados por un par de electrones. Por este procedimiento cada átomo de zinc está ligado con todos los átomos de azufre que lo rodean, y cada átomo de azufre, con todos los átomos de zinc que están a su alrededor. Si se considera el criterio de enlace homopolar como indicio de molécula, hay que decir que, si el cristal es de este tipo, todo él es una molécula única. La representación de las estructuras homopolares de los cristales en forma de esferas tangentes carece de contenido físico. Los átomos libres de azufre y de zinc tienen dimensiones mucho mayores que la distancia entre ellos en el sulfuro de zinc. El enlace homopolar hace que los átomos entren en estrecho contacto y generaliza la región de la existencia de los electrones de estos átomos. Si construyéramos la estructura del sulfuro de zinc con esferas en contacto, dejaríamos fuera de estas esferas una parte considerable de la densidad electrónica, con las esferas llenaríamos solamente un 25% del volumen.

Del enlace metálico trataremos en el cap. 37. Sin embargo pueden decirse ahora algunas palabras. En los metales y en las aleaciones, los electrones exteriores son comunes y forman el «gas» electrónico. La red de un compuesto metálico está constituida por iones positivos «cementados» por los electrones. La representación de su estructura en forma de esferas en contacto tampoco tiene contenido físico, a pesar de que, formalmente, las estructuras de ciertos metales puede representarse por empaquetamientos densos de esferas.

En los cristales del tipo de la dicetopiperazina hallamos moléculas aisladas. Las reconocemos sin dificultad porque las distancias intermoleculares son considerablemente mayores que las intramoleculares. Estudiando la disposición de las moléculas en los cristales, se consiguieron escoger los radios intermoleculares de las partes de las superficies esféricas que limitan la molécula. El modelo de la molécula construido con esferas cortadas de radio intermolecular es consecuencia del análisis de las estructuras cristalinas. Semejante representación geométrica de los cristales, construidos con moléculas, está plenamente justificada por el hecho de que toda la parte importante de la nube electrónica está encerrada dentro del contorno de la molécula.

Llegamos a la conclusión de que la representación de las partículas que constituyen el cristal en forma de figuras geométricas tiene sentido en dos casos: en los cristales iónicos y en los moleculares. Por el contrario, una representación de este tipo para los cristales homopolares y los compuestos metálicos carece de contenido útil.

Ahora debemos plantearnos la siguiente pregunta: ¿en qué se manifiesta la forma de los iones y de las moléculas cuando se cons-

truye el cristal? La respuesta será: en el empaquetamiento denso de las partículas. La experiencia demuestra que las moléculas se empaquetan siempre de tal modo que el «saliente» de una molécula coincida con el «entrante» de otra. Existe una tendencia claramente expresada de tomar en el cristal una orientación mutua tal, que el volumen de la celdilla elemental sea el menor posible. Análogamente se plantea la cuestión en los cristales iónicos. Se crea un empaquetamiento de las esferas tal, que las esferas mayores llenan el espacio del modo más denso, y las esferas más pequeñas, iones, se introducen en los intersticios de la «mampostería» principal.

En el procedimiento que hemos elegido de representar los iones por esferas y las moléculas por figuras espaciales, la parte de espacio «vacío» resulta ser igual a un 25—35%.

La existencia del empaquetamiento denso en los cristales moleculares e iónicos es la demostración principal de que la forma y el volumen del átomo y de la molécula son conceptos llenos de contenido.

§ 231. Cristal molecular

Está claro que la afirmación de que en un cristal molecular las moléculas están ligadas por fuerzas intermoleculares es tautología pura. ¿Qué se incluye en este concepto? ¿Que puede decirse del origen de las fuerzas intermoleculares?

Hay que distinguir las moléculas polares de las no polares. Las moléculas polares poseen un momento de dipolo apreciable debido a que la densidad electrónica resulta desplazada hacia un lado. Las moléculas no polares se pueden considerar como un conjunto de átomos neutros. Las moléculas polares nos las podemos figurar como una superposición de cargas relativamente pequeñas de los átomos sobre el cuerpo no polar de la molécula. De acuerdo con esto, en el caso general, la interacción de las moléculas se describe perfectamente por la interacción de las partículas neutras más la acción electrostática.

Las experiencias y los cálculos demuestran que la parte más importante de la energía de interacción de las moléculas la constituyen las interacciones de las partículas eléctricamente neutras. Esto se deduce, por ejemplo, del hecho de que los valores del calor de sublimación (que es una buena medida de la interacción de las moléculas) del benceno no polar y del nitrobenceno polar se aproximen mucho entre sí.

Por lo tanto, todas las moléculas deben considerarse como sistemas de átomos eléctricamente neutros. La energía de interacción de las moléculas se compone, en una aproximación suficientemente

buena, de las energías de interacción de los átomos (principio de la aditividad).

La curva de la energía potencial de la interacción de dos átomos pertenecientes a distintas moléculas se expresa, claro está, por una curva de tipo general (tanto para los átomos con enlace de valencia (pág. 552) como para los núcleos atómicos) que presenta una elevación pendiente hacia el lado de las distancias pequeñas, una elevación suave con aproximación asintótica a cero hacia el lado de las grandes distancias, y un mínimo (pozo de potencial) para cierta distancia de equilibrio. La abscisa de este mínimo es el radio intermolecular con ayuda del cual se perfila la forma de la molécula.

Si para los átomos con enlace de valencia la abscisa del fondo del pozo se encuentra a 1—1,5 Å y la profundidad de dicho pozo mide muchas decenas de J/mol, para los átomos de moléculas diferentes estas cifras serán de 2—4 Å y de décimas de J/mol.

Los átomos neutros son de todas formas, sistemas eléctricos. Por esto debemos procurar dar una explicación de la forma que tiene la curva de la interacción que no es la de valencia en términos de la estructura electrónica del átomo.

En primer lugar, ¿de dónde procede la atracción? La explicación mecanocuántica de estas fuerzas, llamadas *de dispersión*, fue dada por F. London. En términos aproximados, el problema se reduce a que, en cada instante, una partícula eléctricamente neutra es un dipolo, ya que en el instante dado el centro de gravedad de los electrones no coincide con el de los núcleos. Las fuerzas de dispersión se producen debido a la atracción de estos dipolos instantáneos.

A distancias cortas empiezan a actuar sensiblemente las fuerzas de repulsión. El solapado mutuo de las capas electrónicas (cuadrados de las funciones de onda) impide la repulsión de los electrones. Pero el papel fundamental lo desempeña no la fuerza electrostática, que actúa entre las cargas de igual signo, sino el principio de Pauli, que prohibe a un tercer electrón acercarse a la región ocupada por un par de electrones con espines opuestos.

La fórmula de la energía de la atracción fue deducida por London. Esta energía (que, naturalemente, es negativa) es inversamente proporcional a r^6. La deducción rigurosa de la energía de la repulsión no se consigue hacer, pero sus propiedades no están mal dadas por el exponente. De este modo, la energía de interacción de dos átomos neutros pertenecientes a distintas moléculas puede escribirse de la forma

$$U = -\frac{A}{r^6} + Be^{-\alpha r},$$

donde A, B y α son unas constantes que tienen diferentes valores para distintos pares de átomos.

Si se necesita conocer la energía de interacción de las moléculas, hay que sumar las energías de interacción de todos los pares de átomos.

La expresión de la fuerza de interacción, si es que hace falta, se obtiene por la fórmula general

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r}.$$

El modelo geométrico de la molécula simplifica el cuadro de la interacción. Al hablar de una molécula cuya forma es rígida, sustituimos en realidad el potencial que hemos descrito por uno rectangular, como se muestra en la fig. 257a. Para una serie de fines esta simplificación está plenamente justificada. Resulta que la forma de la molécula determina no sólo las distancias intermoleculares, sino también el carácter del empaquetamiento de las moléculas. La polaridad de las moléculas u otras peculiaridades de las fuerzas de atracción no sólo no cambian las distancias intermoleculares, sino que tampoco pueden alterar la tendencia al empaquetamiento denso de las moléculas. Por lo tanto, prácticamente en todos los casos, el mínimo de energía se logra en virtud del empaquetamiento denso de las moléculas. El sometimiento riguroso de los cristales moleculares al principio del empaquetamiento denso lleva a una diversidad excepcionalmente pequeña de tipos estructurales y de simetría de estos cristales.

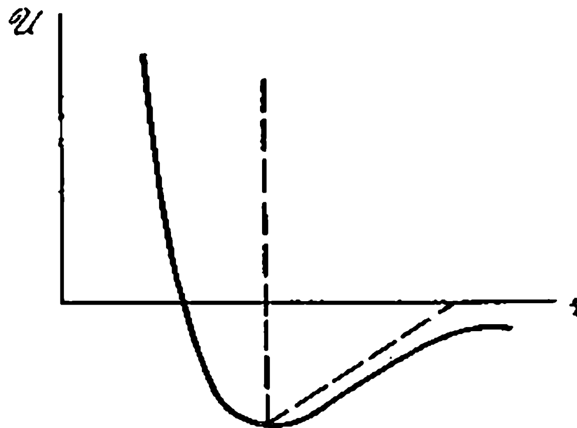


FIG. 257a.

El empaquetamiento de las moléculas en los cristales conviene figurárselo como el empaquetamiento más denso de las capas más densas. Pueden encontrarse dos tipos de capas muy densas (fig. 258). La celdilla de uno de ellos posee la simetría mínima; el otro tipo de capa tiene celdilla rectangular. En este último caso (más del 90% de los cristales orgánicos están constituidos por capas de este tipo) las moléculas se empaquetan formando un dibujo en zigzag característico. Las filas de las moléculas que forman la capa están ligadas entre sí por el eje helicoidal de segundo orden 2_1. Esto significa que una fila de moléculas puede pasar a la posición de su vecina, si gira 180° y se desplaza medio periodo a lo largo del eje.

En las capas más densas cada molécula tiene seis vecinas próximas. Al superponerse las capas, a la molécula se acercan generalmente

tres moléculas por arriba y tres por abajo. El número de moléculas vecinas más próximas llega a ser igual a 12.

En el mundo de los cristales moleculares se encuentran rara vez cristales de alta simetría. El empaquetamiento de moléculas asimétricas en cristales simétricos nunca puede ser denso.

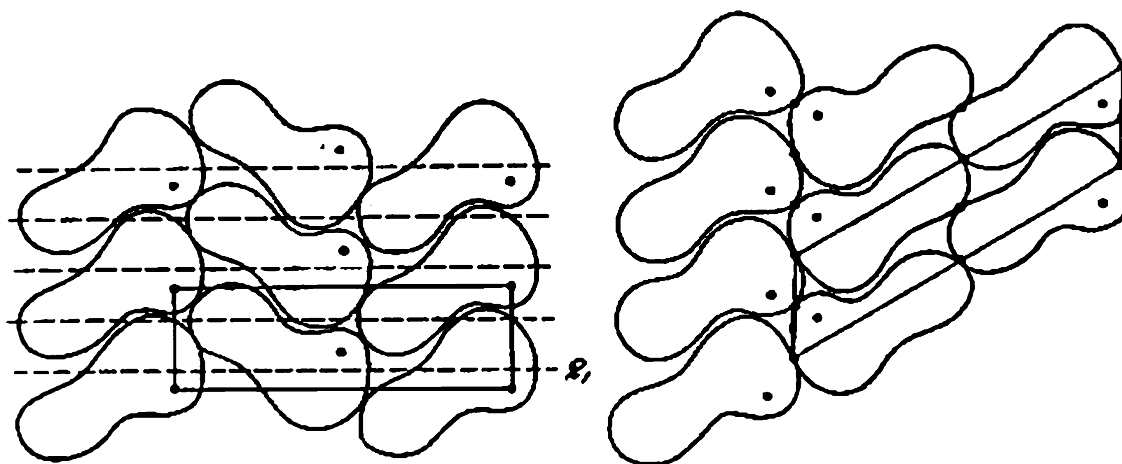


FIG. 258.

Y si la molécula posee simetría, esto no quiere decir que el cristal tendrá esta misma simetría.

La molécula de naftalina posee una alta simetría: a través de ella se pueden hacer pasar tres planos de simetría especular perpendiculares entre sí (fig. 259). Si el empaquetamiento de las moléculas se hiciera conservando estos elementos de simetría, no podría

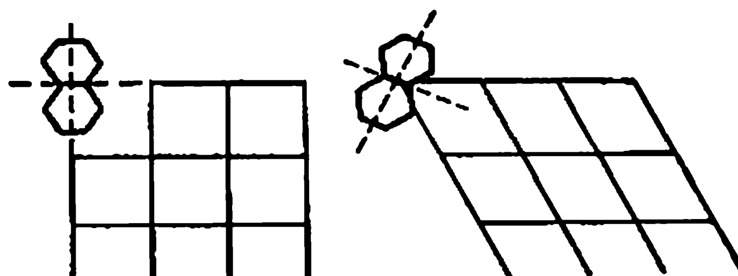


FIG. 259.

ser suficientemente denso. Por esto, al formar el cristal, la molécula «pierde» aquellos elementos de simetría que impiden aumentar la densidad del empaquetamiento. Resulta que es posible conservar el centro de inversión sin que esto implique ningún sacrificio con respecto a la densidad del empaquetamiento de las moléculas. Por lo general, las moléculas que contienen este elemento de sime-

tría pierden al entrar en el cristal los demás elementos y conservan el centro de inversión.

En otros casos también es posible predecir con seguridad el resultado de la competencia entre las tendencias a la disposición simétrica y a la densa.

El empaquetamiento típico de los cristales moleculares se ilustró antes (fig. 257) con el ejemplo de la dicetopiperazina. Las moléculas poseen una alta simetría, pero en el cristal sólo conservan el centro de inversión. Está claro que la molécula no deja de ser altamente simétrica con bastante exactitud por el hecho de que sus elementos de simetría no pertenezcan al cristal.

§ 232. Empaquetamientos densos de esferas

Una clase bastante considerable de cristales iónicos puede representarse por empaquetamientos densos de esferas.

En la mayoría de los casos los aniones son más grandes que los cationes. En estos casos los cristales consisten en un empaquetamiento denso de esferas-aniones entre las cuales se ubican los cationes. Así precisamente están constituidos todos los silicatos, una de las sustancias inorgánicas más difundidas en la naturaleza. En los silicatos, los cationes se encuentran en los intersticios de la «mampostería» de los aniones de oxígeno.

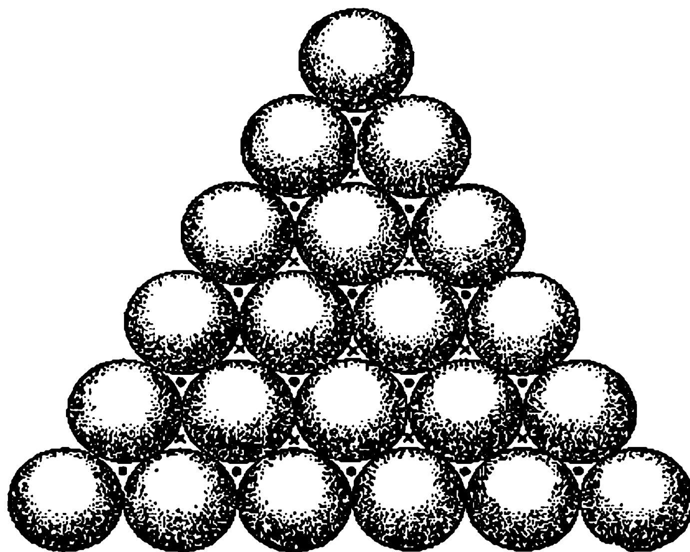


FIG. 260.

Estudiemos, pues, las leyes de empaquetamiento denso de las esferas, base de una multitud de cristales. La única forma posible de empaquetar más densamente una capa de esferas se muestra en la fig. 260. Cada esfera tiene seis vecinas. Las esferas de la segunda

capa, para crear el empaquetamiento más denso, deberán alojarse en los huecos de la capa que se encuentra debajo. Pero llenar todos los huecos con esferas del mismo tamaño es imposible: los huecos se llenan uno sí y otro no (en el dibujo se señalan con crucecitas los huecos de la primera capa que se llenan con esferas de la segunda capa, y con puntos negros, los que quedan vacíos).

Empaquetamiento denso de dos capas también existe sólo uno. Sin embargo cuando pasamos a la tercera capa cambia la situación. Para conseguir el empaquetamiento más denso debemos poner las esferas de la tercera capa en los huecos de la segunda. Pero en este caso las esferas de la tercera capa pueden alojarse de dos modos: uno, de manera que los centros de estas esferas se encuentren sobre los centros de las esferas de la primera capa, y otro, de manera que sus centros queden sobre los huecos marcados con puntos. Las dos estructuras de tres pisos poseen igual densidad de empaquetamiento, pero difieren esencialmente una de otra. Al poner la cuarta capa aumenta todavía más el número de empaquetamientos posibles: de los dos empaquetamientos de tres capas podemos hacer cuatro de cuatro capas. De cinco capas podrá haber ya ocho, y así sucesivamente. Está claro que el número de empaquetamientos posibles de igual densidad , pero diferentes entre sí, se hace extremadamente grande al aumentar el número de capas.

Ahora hay que analizar la relación que existe entre la red cristalina y el empaquetamiento de las esferas. El cristal debe representar de por sí un empaquetamiento de átomos-esferas en el cual la posición de las capas se repita rigurosamente al cabo de un número determinado de ellas. Si esta repetición comienza, por ejemplo, en la capa decimocuarta, esto significa que la celdilla tiene trece capas de altura. Entonces, la capa decimocuarta se hallará sobre la primera, la decimoquinta, sobre la segunda, la decimosexta, sobre la tercera y así sucesivamente.

El empaquetamiento más simple es el de dos capas: en este caso la tercera capa se encuentra sobre la primera, la cuarta, sobre la segunda, etc. (fig. 261, a la derecha). Este es el llamado empaquetamiento denso hexagonal. En el dibujo inferior de la derecha se muestra su celdilla; los circulitos y las crucecitas indican las posiciones de los centros de las esferas.

Están muy difundidos los cristales de tres capas, en los cuales la cuarta capa es repetición de la primera, la quinta, de la segunda, y así sucesivamente (fig. 261, a la izquierda). En el dibujo inferior de la izquierda, en la que sólo se indican los centros de los átomos, se muestra cómo en este empaquetamiento se puede elegir una celdilla elemental cúbica centrada en todas sus caras. Las capas densas son en este caso perpendiculares a la diagonal espacial del cubo. Esta estructura se llama empaquetamiento cúbico denso.

Examinando el empaquetamiento de esferas de igual tamaño, vemos que en ellas se conservan espacios vacíos; es fácil calcular que su volumen constituye cerca de 1/4 del volumen total. Estos espacios son de dos tipos: unos de ellos están rodeados de cuatro

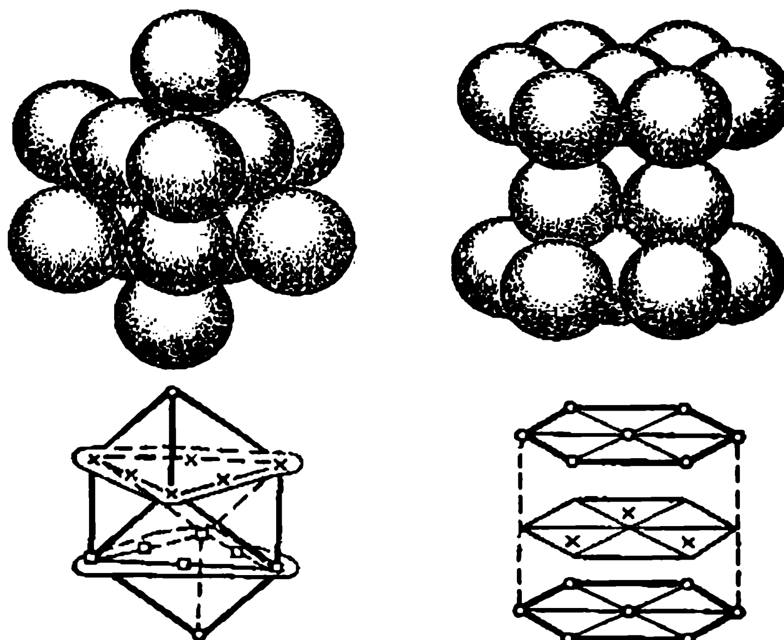


FIG. 261.

esferas cuyos centros ocupan los vértices de un tetraedro regular (fig. 262,*a*); los otros están rodeados de seis esferas, de modo que sus centros forman un octaedro regular (fug. 262, *b*). Las dimensiones de los primeros son menores, pero su número es el doble que el de los segundos.

Puede calcularse que, en cualquier empaquetamiento denso de esferas iguales, a cada esfera le corresponden un espacio vacío mayor y dos menores. Las esferas pequeñas se alojan en estos huecos, y si son algo mayores que ellos y no caben, hacen que se separen las esferas grandes vecinas, con lo que mulle el empaquetamiento denso.

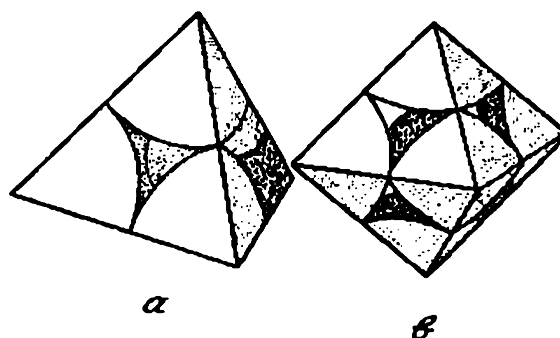


FIG. 262.

El hecho de que los empaquetamientos puedan estar constituídos de distinto número de capas y de que el «dibujo» según él cual se llenan los espacios vacíos por las esferas pequeñas también pueda

ser variado, conduce a la grandiosa diversidad de estructuras de los cristales iónicos.

Los cristales de la sal común son de por sí un empaquetamiento denso de tres capas de grandes iones de cloro (las esferas blancas de la fig. 257); los iones de sodio (esferas negras) llenan todos los huecos grandes, por lo que cada ion de sodio está rodeado de seis iones de cloro. El sulfuro ferroso (pirita magnética) constituye un empaquetamiento de dos capas de grandes iones de azufre; los iones, más pequeños, de hierro llenan todos los huecos grandes. En el cristal de óxido de litio, donde según la composición química a cada átomo de oxígeno le corresponden dos átomos de litio, el empaquetamiento denso lo forman los iones grandes de oxígeno, y los iones pequeños de litio llenan todos los huecos pequeños; por esto cada ion de litio tiene como vecinos cuatro iones de oxígeno. En el cristal de cloruro de cadmio (cuya composición química es de dos átomos de cloro por uno de cadmio) el empaquetamiento denso está formado por grandes iones de cloro; los iones de cadmio llenan los huecos grandes, pero no todos, sino cada dos capas de iones de cloro. Estos, claro está, son sólo los «dibujos» más simples de la ocupación de los espacios vacíos del empaquetamiento denso.

§ 233. Ejemplos de estructuras cristalinas

El grupo más vasto de cristales es el de los cuerpos constituidos por moléculas. También tienen muchos representantes los compuestos iónicos. En estos casos, como ya dijimos, la representación del cristal como un conjunto de partículas densamente colocadas está plenamente justificada. No obstante, hay que detenerse en aquellos casos en que la dirección de los enlaces entre los átomos, la desviación de la nube electrónica con respecto a su simetría esférica y demás son causa de la formación de estructuras que no pueden considerarse tan fácilmente. A estas excepciones pertenecen las estructuras de átomos enlazados por electrones comunes.

En un gran número de metales se observan estructuras con celdilla cúbica centrada en el cuerpo. En estos cristales cada átomo tendrá ocho vecinos, y no doce como en el empaquetamiento de esferas más denso. Así se comportan, por ejemplo, los átomos de hierro (fig. 257). La red del hierro es cúbica; los átomos de este metal están situados en los vértices y en los centros de los cubos. Esta misma estructura tienen el litio, el potasio, el cesio y una serie de otras sustancias.

En la fig. 263 se compara la estructura del mercurio cristalizado con el empaquetamiento cúbico ideal más denso. Se ve fácilmente que el carácter de la disposición de los centros de los átomos es el mismo, pero en la estructura del mercurio han dismi-

nuido las distancias entre las capas, mientras que las distancias entre los átomos de una misma capa han aumentado, como si se hubieran empaquetado densamente esferas un poco aplastadas.

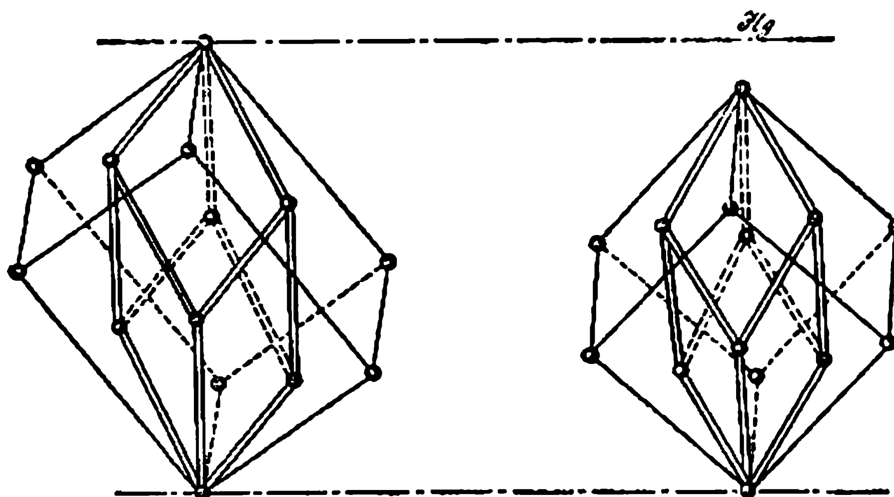


FIG. 263.

Ejemplos de empaquetamientos densos como éste, «deteriorados» en mayor o menor grado, hay muchos. Así, en el caso del hielo (fig. 264), el parentesco con el empaquetamiento de esferas se pierde por completo. El enlace entre cada par de átomos de oxígeno se efectúa por medio de un átomo de hidrógeno. En estos cuatro enlaces, cada átomo de hidrógeno corresponde a dos átomos de oxígeno; la estructura representada en la fig. 264, como es natural, no contradice la fórmula química del agua. Para mayor claridad, el enlace de «hidrógeno» se ha representado en el dibujo en forma de «puente». La estructura del hielo es muy porosa, en la figura se ven grandes «agujeros». Si mentalmente se prolonga la estructura sobre el plano del dibujo, estos agujeros se transforman en amplios canales que atraviesan la estructura. La estructura del hielo es una exclusión importante de la regla gene-

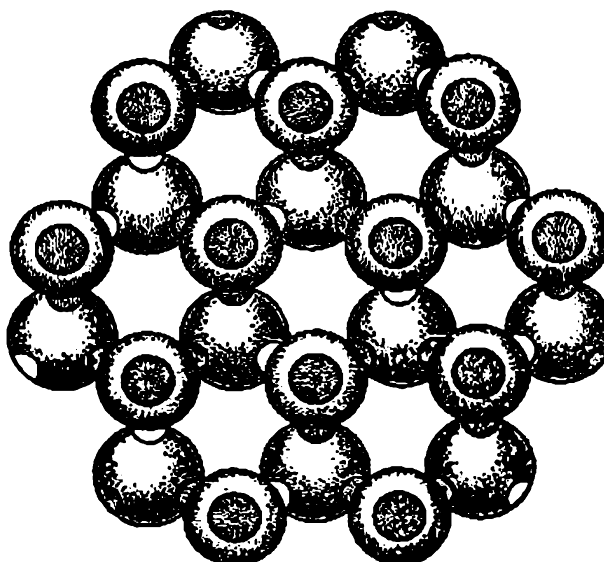


FIG. 264.

ral. Esto no quiere decir que sean raros los casos en que la semejanza del cristal al empaquetamiento denso de las partículas pierda su sentido.

Como ya hemos dicho antes, la analogía con el empaquetamiento denso se pierde totalmente en el caso de los cristales constituidos con átomos enlazados por electrones comunes.

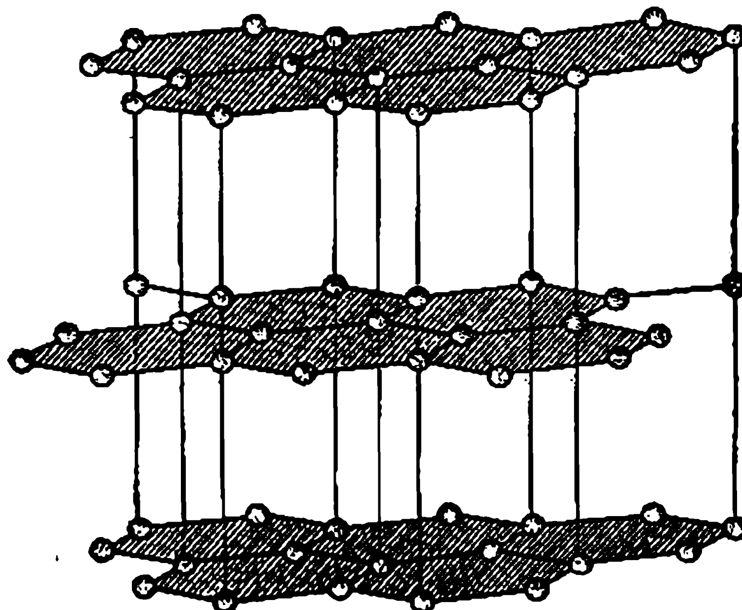


FIG. 265.

La estructura del sulfuro de zinc, representada en la fig. 257, es muy característica. Este mismo aspecto ofrecen las estructuras de ciertos elementos, como, por ejemplo, el carbono (diamante), el silicio, el germanio y el estaño (blanco).

Son posibles los casos en que los enlaces homopolares forman capas y cadenas de átomos.

La fig. 265 representa la estructura del grafito. Los átomos de carbono forman en el grafito una estructura laminar. Pero estas láminas no son capas de empaquetamiento denso. Construir una capa de grafito con esferas en contacto es imposible. En el grafito, las capas de átomos fuertemente enlazados son planas. El arsénico y el fósforo también dan estructuras laminares en este sentido, pero los átomos de una capa no se encuentran en un plano. Como ejemplo de estructura compuesta por cadenas de átomos fuertemente enlazados se puede citar el selenio gris. Cada átomo de esta sustancia sólo está ligado fuermente a dos átomos vecinos. En el selenio gris forman los átomos una espiral ilimitada que se enrolla a una línea recta. La distancia entre los átomos de las espirales vecinas

es mucho mayor que la distancia entre los átomos más próximos que figuran en una misma espiral.

El grafito negro, sin brillo y blando con que escribimos, y el diamante que brilla, es transparente y duro y corta el vidrio están constituidos por unos mismos átomos, por átomos de carbono. En este ejemplo puede verse con extraordinaria claridad cómo la disposición mutua de los átomos determina las propiedades de los cristales. De grafito se hacen crisoles refractarios que aguantan temperaturas de hasta 2000—3000° C, mientras que el diamante arde si la temperatura supera los 700° C; el peso específico del diamante es 3,5, el del grafito, 2,1; el grafito es conductor de la electricidad, el diamante, no, etc.

Esta peculiaridad de formar cristales distintos no es exclusiva del carbono. Casi todos los elementos químicos en estado cristalino y sustancias cualesquiera existen en diversas variedades. Se conocen seis variedades de hielo, nueve de azufre, y cuatro de hierro.

A la temperatura ambiente los átomos de hierro forman una red cúbica en la cual los átomos ocupan los vértices y el centro del cubo; cada átomo tiene ocho átomos vecinos. A alta temperatura los átomos de hierro constituyen un empaquetamiento más denso: cada átomo tiene entonces doce átomos vecinos. En el primer caso el hierro es blando, en el segundo, duro. El templado del acero a la temperatura ambiente fija el empaquetamiento cúbico más denso, estable a temperaturas más altas.

De los ejemplos del carbono y del hierro se deduce ya que las estructuras de las variedades cristalinas de una misma sustancia no se parecen en absoluto unas a otras. Esto mismo puede decirse de otras sustancias.

Así, por ejemplo, el azufre amarillo forma en el cristal anillos ondulados de ocho átomos. En otros términos, en el cristal se ve la molécula de azufre constituida por ocho átomos. El azufre rojo también está formado por anillos de este tipo, pero orientados los unos hacia los otros de un modo completamente distinto.

El fósforo amarillo da una estructura cúbica con un número de átomos vecinos más próximos igual a ocho. El fósforo negro tiene una estructura laminar como la del grafito.

El estaño gris tiene la misma estructura que el diamante. El estaño blanco puede obtenerse mentalmente del gris, comprimiendo fuertemente la estructura de diamante a lo largo del eje del cubo. Como resultado de esta compresión, el número de átomos vecinos próximos del átomo de estaño se hace igual a seis, en vez de cuatro.

En las sustancias orgánicas también se encuentran con frecuencia variedades cristalinas. Las mismas moléculas se sitúan de modos diferentes las unas con respecto a las otras.

§ 234. *Oscilaciones térmicas en un cristal*

Desde el punto de vista de la energía, un cristal ideal puede decirse que es lo contrario de un gas perfecto.

En el gas perfecto la energía de interacción de las partículas es mucho menor que la energía media kT del movimiento térmico. En el cristal, al contrario, las partículas están enlazadas fuertemente y la energía de interacción es mucho mayor que kT. Por esto el movimiento térmico en los cristales no puede destruir el enlace entre los átomos y sólo ocasiona pequeñas oscilaciones de los átomos alrededor de sus posiciones de equilibrio.

En cualquier cristal cada átomo oscila en torno a su posición de equilibrio. Para la mayoría de los cristales la amplitud de las oscilaciones es una magnitud del orden de 0,1 Å y constituye, por lo tanto, una parte insignificante de la distancia entre los átomos más próximos (que, como sabemos, es del orden de 1,5—2 Å).

El carácter de esta oscilación puede ser bastante complejo. Durante su período, el átomo describe una trayectoria intrincada en torno a la posición de equilibrio. Esto se explica porque el átomo está ligado a sus vecinos por fuerzas distintas y esto hace que sus oscilaciones tengan carácter anisótropo. En todo caso, siempre se puede descomponer la oscilación del átomo según tres ejes. Es evidente que los átomos del cristal tendrán 3N grados de libertad (N es el número de átomos).

Si en el cristal se destacan claramente las moléculas, tiene sentido hablar de las oscilaciones de las moléculas y de las oscilaciones de los átomos dentro de ellas. Como las moléculas están enlazadas entre sí con mucha menos rigidez, las frecuencias de sus oscilaciones serán menores. En los cristales moleculares el movimiento de las moléculas en conjunto desempeña un papel determinado. La molécula realiza oscilaciones de traslación en torno a la posición de equilibrio y oscilaciones de torsión. En algunos casos raros, es posible, por lo visto, la rotación total de las moléculas alrededor del centro de gravedad. Por ejemplo, es probable que esta rotación de las moléculas ocurra en el metano sólido CH_4.

La energía total de cada partícula oscilante se compone de la energía potencial y de la cinética, con la particularidad de que el valor medio de estas energías durante el período de oscilación es el mismo. Como sabemos, en el gas, la energía cinética media del átomo es igual a $^3/_2\ kT$. Es natural suponer que a un átomo oscilante que posea una energía media dos veces mayor, a la misma temperatura, le corresponden $3\ kT$ unidades de energía térmica. Un mol de sustancia cristalina deberá tener en este caso una energía igual

a 3 RT y la capacidad calorífica molar será $c_v=3R\approx 6$ cal/mol$\approx$ $\approx$24,93 J/mol.

Esta fórmula se justifica perfectamente a altas temperaturas. Resulta que la capacidad calorífica de los cuerpos cristalinos cambia en función de la temperatura, como muestra la fig. 266. La capacidad calorífica crece a partir de cero, a cierta temperatura llega a 6 cal/mol y en adelante permanece invariable. Sobre el eje de abscisas se ha tomado la razón de la temperatura a una constante θ, de la cual se tratará en el párrafo siguiente.

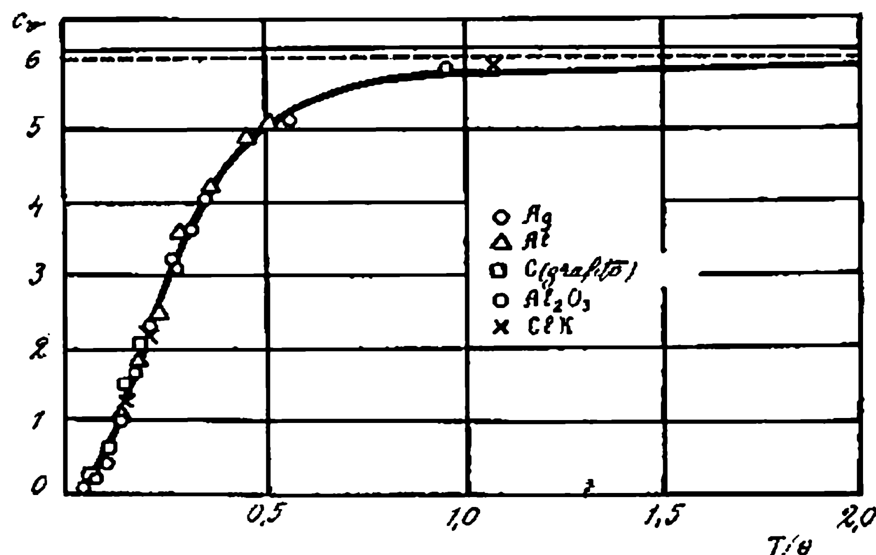


FIG. 266.

A altas temperaturas, la magnitud kT es notablemente mayor que la distancia entre los niveles energéticos de oscilación y el carácter cuántico de la distribución de los átomos oscilantes por niveles de energía no influye en el valor de la energía media de oscilación. En estas condiciones el cálculo elemental de la energía media está justificado y el cálculo riguroso, teniendo en cuenta la distribución de los átomos por energías de acuerdo con la ley de Boltzmann, lo confirman totalmente.

Cuando kT se hace comparable con la distancia entre los niveles energéticos, la ley de Boltzmann deja de ser aplicable y debe sustituirse por la ley cuántica de distribución (véase la pág. 763). El cálculo correspondiente demuestra que la capacidad calorífica debe disminuir a medida que disminuye la temperatura. No vamos a reproducir este cálculo, pero sí llamaremos la atención sobre el hecho de que, cualitativamente, la disminución de c_v con la temperatura es completamente comprensible. Cuanto menor es kT, tanto menor es el número de transiciones energéticas que es capaz

de efectuar el sistema, y esto significa que las posibilidades de intercambio calorífico disminuyen al decrecer kT y en el límite tienden a cero. La situación extrema puede explicarse así: si a un cuerpo se le comunica energía en impulsos de magnitud kT insignificantes por su pequeñez, esta energía no puede transmitirse a dicho cuerpo, aunque el número de «impulsos» que se le proporcione sea infinito y la energía total de los mismos sea tan grande como se quiera. La energía no puede transmitirse porque un «impulso» es insuficiente para hacer que el sistema pase del nivel cero de energía al nivel más próximo.

Las transiciones energéticas correspondientes al cambio de estado del movimiento de las moléculas en los cristales se encuentran, como demuestra la experiencia, en las regiones de las ondas infrarrojas largas. Para el cálculo aproximado consideraremos que estas transiciones corresponden a una longitud de onda igual a 1 mm.

A continuación se dan los valores de kT para varias temperaturas y se comparan con los cuantos de energía correspondientes a la longitud de onda de 1 mm. Para esta longitud de onda $\nu=3\times\times10^{11}$ s^{-1}, es decir, $h\nu=200\cdot10^{-17}$ erg.

A la temperatura de 500° K . . . $kT\approx 7000\cdot10^{-17}$ erg;
» » » » 100° K . . . $kT\approx 1380\cdot10^{-17}$ erg;
» » » » 10° K . . . $kT\approx 138\cdot10^{-17}$ erg;
» » » » 1° K . . . $kT\approx 14\cdot10^{-17}$ erg.

Vemos que a 100° K la energía de las oscilaciones térmicas supera aún considerablemente la distancia entre los niveles energéticos de las moléculas en el cristal. A 10° K estas magnitudes son ya de un mismo orden, y a 1° K las oscilaciones térmicas no serán capaces de provocar la transición de un nivel a otro.

§ 235. Ondas térmicas

Una peculiaridad interesante de las oscilaciones térmicas en un cristal es la de que se efectúan en forma de ondas térmicas. En efecto, las oscilaciones de los átomos no pueden ocurrir de un modo independiente. Un átomo que se desvíe de su posición de equilibrio arrastra el siguiente.

Como el cristal es un cuerpo limitado, en él se forman ondas estacionarias. Lo mismo que en todas las oscilaciones propias, la longitud máxima de la onda estacionaria es igual al doble de la dimensión del cuerpo. En las fronteras del cristal debe haber nodos de la onda estacionaria.

A su debido tiempo (pág. 143) estudiamos las oscilaciones elásticas de los sólidos considerados como un medio continuo. Demostramos entonces que en un sólido limitado aparece una magnitud de ondas estacionarias de distintas direcciones y frecuencias. Este cuadro se complica considerablemente al tener en cuenta la estructura atómica del sólido. El estudio teórico de los posibles movimientos oscilatorios de los átomos en un monocristal, demuestra que el movimiento térmico en el cristal puede considerarse como el resultado de la superposición de $3sN$ ondas, donde N es el número de celdillas, y s el número de átomos que hay en la celdilla. El número de ondas posibles es igual al número de grados de libertad del sistema de átomos que forman el cristal. ¿De dónde salen $3sN$ ondas, y qué representan de por sí?

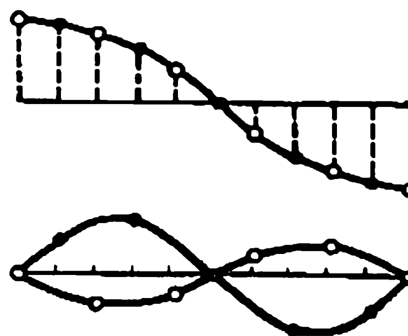


FIG. 267.

Nos limitaremos a estudiar el caso de una cadena de átomos, es decir, de un «cristal unidimensional». La fig. 267 representa esta cadena de átomos, cuya «celdilla» contiene dos átomos, que se señalan con circulitos negros y blancos. La figura no representa el movimiento térmico real de los átomos, que tiene un carácter muy complicado, sino las ondas «elementales» en que puede descomponerse dicho movimiento. La teoría demuestra que la oscilación resultante puede representarse siempre en forma de suma de oscilaciones armónicas. Lo mismo que en el caso de una varilla continua, en el cristal unidimensional se produce una serie de ondas de distinta longitud. Si la cadena consta de mil celdillas con período a, se producirán N ondas de longitud 2000 a, 1000 a, (2000/3)a, 500 a, 400 a, etc. La onda más corta tendrá la longitud 2 a.

Sin embargo, esto no agota la diversidad de ondas. Cada una de las longitudes de onda posibles se efectuará en s variantes. Dos tipos de ondas de una misma longitud se muestran en la figura. En un caso la red de átomos realiza la oscilación como un todo único. Esta onda se llama *acústica*. Las demás $s-1$ ondas son totalmente distintas: en ellas, átomos de tipo diverso efectúan un movimiento complejo unos con respecto a otros, y en cada instante sólo se encuentran en la sinusoide los átomos de un mismo tipo. Estas oscilaciones se llaman *ópticas* y su número es de $s-1$.

La figura representa aquellas ondas a que corresponde la oscilación de los átomos en una dirección determinada.

Las oscilaciones de los átomos pueden descomponerse siempre en dos transversales y una longitudinal. Por esto, una onda que vaya con una dirección dada y que tenga una longitud determinada,

tendrá 3 ondas de tipo acústico y $3(s-1)$ ópticas. De todas las $3sN$ ondas acústicas, habrá $3N$ — dos transversales y una longitudinal — para cada dirección y cada longitud de onda. Todo esto es correcto en su totalidad para el cristal tridimensional.

Aunque las longitudes y las frecuencias de las ondas son discretas, pueden aplicarse aproximadamente los razonamientos que dimos en la pág. 146 y escribir el número de oscilaciones acústicas con frecuencias menores que ν en la forma

$$\frac{4\pi v}{3c^3}\nu^3.$$

Aquí v es el volumen del cristal, y c es la velocidad de la onda. Las velocidades de las ondas longitudinal y transversal son distintas. Por esto el número total de ondas, igual a $3N$, debe escribirse así:

$$\frac{4\pi v}{3}\left(\frac{1}{c_l^3}+\frac{2}{c_t^3}\right)\nu_{\text{máx}}^3=3N,$$

donde c_l es la velocidad de la onda longitudinal, y c_t, la de la onda transversal. De aquí hallamos sin dificultad el valor de la frecuencia máxima de las oscilaciones $\nu_{\text{máx}}$. La longitud de onda correspondiente

$$\lambda_{\text{mín}}=\frac{c_l}{\nu_{\text{máx}}}=\frac{c_t}{\nu_{\text{máx}}}$$

es de un orden de magnitud igual, como debía ser, al período de la celdilla.

Si se conoce la velocidad de propagación de las ondas acústicas en el cristal, puede calcularse $\nu_{\text{máx}}$, cuyo valor determina en mucho el comportamiento del cristal.

Como ya dijimos antes, el comportamiento de la capacidad calorífica depende de la correspondencia entre el escalón energético $h\nu$ y la energía del impulso térmico kT. Si $h\nu_{\text{máx}} \ll kT$, el intercambio calorífico excita oscilaciones y ondas cualesquiera en el cristal, todas las transiciones cuánticas son posibles y, en virtud de esto, el carácter cuántico del intercambio calorífico no se nota. De este cristal se dice que su temperatura característica $\theta=h\nu_{\text{máx}}/k$ es mucho menor que la temperatura de ensayo, $\theta \ll T$. Por el contrario, si $h\nu_{\text{máx}} \gg kT$, es decir, si la temperatura característica $\theta \gg T$, en el cristal están excitadas únicamente las oscilaciones de pequeña frecuencia; los grandes escalones energéticos no pueden ser superados por los «impulsos» térmicos.

Ejemplos de temperaturas características (en grados Kelvin) de una serie de cristales:

Pb	Benceno	Ag	ClNa	Be	Fe	Diamante
90	150	215	280	1000	450	1860

Para las sustancias como el plomo o el benceno, la temperatura ambiente es «alta». Por esta razón dichos cristales dan ya la parte horizontal de la curva de capacidad calorífica ($c_v=6$ cal/mol, compárese con la fig. 266). Por otra parte, para el berilio y el diamante, la temperatura ambiente es baja. Las oscilaciones térmicas de estas sustancias están excitadas insignificantemente y su capacidad calorífica es considerable menor que 6 cal/mol.

Los valores dados de las temperaturas características θ permiten calcular el valor de la frecuencia máxima de las oscilaciones $\nu_{máx}=k\theta/h$:

Pb	Benceno	Ag	ClNa	Be	Fe	Diamante
$1{,}88\cdot10^{12}$	$3{,}13\cdot10^{12}$	$4{,}47\cdot10^{12}$	$5{,}84\cdot10^{12}$	$20{,}8\cdot10^{12}$	$9{,}3\cdot10^{12}$	$38{,}8\cdot10^{12}$

Se ve que las frecuencias límites de las oscilaciones térmicas, como supusimos en el ejemplo de la pág. 675, se encuentran en el confín entre las zonas de frecuencia infrarroja y de radiofrecuencias ($\lambda_{mín}>10^{-2}$ cm).

§ 236. Dilatación

¿Cómo se explica que la distancia media entre los átomos vecinos aumente con la temperatura? La respuesta a esta pregunta la da la forma de la curva de la energía potencial de interacción de los átomos (o moléculas) (fig. 268). Cualesquiera que sean las peculiaridades de la interacción de las partículas, la curva de potencial es siempre asimétrica: por la parte de la disminución de la distancia se eleva bruscamente, mientras que por la del aumento de ésta debe existir un borde en el pozo de potencial. Este cuadro de la energía potencial refleja dos hechos simples: dos átomos pueden aproximarse prácticamente hasta una distancia limitada. El alejamiento de los átomos, por el contrario, no tiene límites; cuando las distancias son grandes se produce la rotura del enlace entre los átomos (o moléculas).

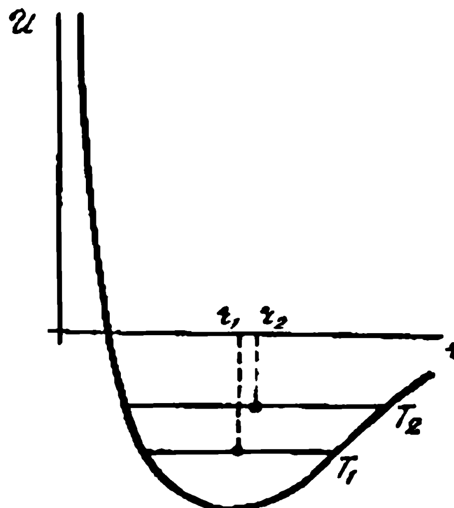


FIG. 268.

En la curva de potencial pueden señalarse las distancias extremas, hasta las cuales llegarán los átomos en oscilación. La posición media del átomo r_1 corresponde al punto medio de este segmento. Al aumentar la temperatura desde T_1 hasta T_2, la energía de la partícula oscilante aumenta y dicha partícula pasa a otro nivel

energético (véase la fig. 268). Como la curva de potencial es asimétrica, la posición media del átomo r_s se desplaza hacia la derecha. Por esto la distancia media entre los átomos no será igual a la distancia de equilibrio entre los átomos en reposo (r, que corresponde al mínimo del pozo de potencial), sino que será mayor que esta distancia. Al aumentar la temperatura aumenta también la distancia media entre los átomos. Esta es la causa de la dilatación.

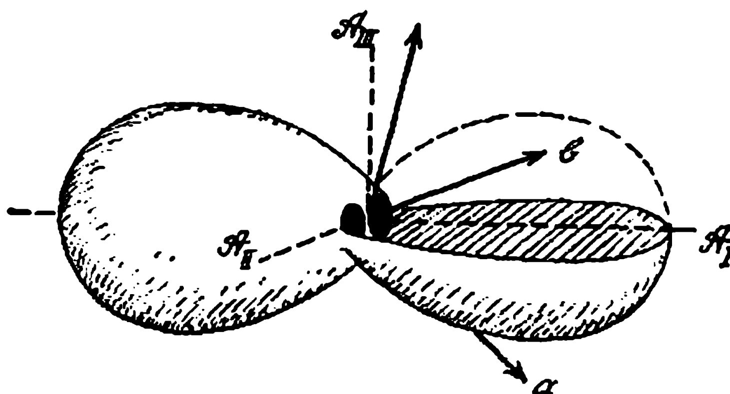


FIG. 269.

La dilatación de un cristal es anisótropa. En distintas direcciones, el coeficiente de dilatación lineal α tendrá valores diferentes. Al indicar el valor de α hay que tomar una dirección cristalográfica que tenga interés.

Si se necesita describir la dilatación de un cristal de un modo suficientemente detallado, se utilizan para este fin las figuras de dilatación. Un ejemplo de figura de este tipo se da en la fig. 269 para el cristal de naftalina; a, b, y c son los ejes del cristal, y A_I, A_{II} y A_{III} son los ejes de simetría de la figura de dilatación. La longitud del radio vector trazado desde el origen de coordenadas a un punto de la superficie, da el valor de α en esta dirección.

La forma de la figura de dilatación y su disposición con respecto a los ejes de la celdilla corresponden a la simetría del cristal. No podía ser de otro modo, ya que en las direcciones relacionadas con las operaciones de simetría, las propiedades físicas deben ser idénticas.

Al medir el coeficiente de dilatación lineal hay que asegurar la máxima exactitud en la determinación de desplazamientos muy pequeños. Los aparatos que se utilizan para medir la dilatación se llaman dilatómetros (del latín *dilatio*, dilatación, y el griego μέτρον, medida). Los métodos de interferencia (véase la pág. 378) pueden proporcionar la máxima sensibilidad necesaria (de centésimas de micra y mejores), pero su aplicación en la práctica se ve dificultada, porque la preparación de las muestras, que deben estar perfectamente pulidas es muy complicada. Los dilatómetros de interferencias son muy sensibles a las vibraciones.

Coeficientes de dilatación lineal de algunos cuerpos

	t, °C	$\alpha \cdot 10^4$, °K^{-1}
Aluminio	0—100	0,238
Aljez	12—25	0,025
Cuarzo, ∥ al eje	40	0,0781
Cuarzo, ⊥ al eje . . .	40	0,1419
Hielo	—10 —0	0,507

En la práctica se utilizan con frecuencia los dilatómetros diferenciales de cuarzo. En estos aparatos, la probeta que se mide se introduce en un tubo de vidrio de cuarzo en cuyo fondo hay un prisma de apoyo. En este prisma descansa el extremo inferior de la probeta, mientras que sobre el superior se coloca una barra de cuarzo que transmite el alargamiento de la probeta al extremo medidor del aparato. El desplazamiento del extremo de la barra se mide valiéndose de un microscopio o de un espejo giratorio. Al calentar se dilata no sólo la probeta, sino también el tubo en que se mete, por lo que el aparato registra la diferencia entre los coeficientes de dilatación de la probeta y del cuarzo. La dilatación del cuarzo se ha estudiado bien en un amplio intervalo de temperaturas, lo que da la posibilidad de introducir correcciones suficientemente exactas.

La medición más exacta de las figuras de dilatación se efectúa por el método del análisis estructural de rayos X, midiendo el desplazamiento de las manchas de difracción.

§ 237. Defectos de un cristal

ESTRUCTURA DE BLOQUES. Un cristal real difiere considerablemente de la red espacial perfecta. Esto se deduce de una multitud de hechos, entre ellos de las observaciones directas con el microscopio electrónico. No obstante, las ideas fundamentales acerca de la imperfección interna del cristal surgieron, en primer lugar, al medir su resistencia: el cristal se rompe a tensiones centenares de veces menores que las que podían esperarse del objeto perfecto. De las deformaciones y rotura del cristal trataremos en el cap. 34. Ahora vamos a exponer las ideas que existen en la actualidad sobre los defectos de los cristales.

El factor fundamental es el siguiente: un monocristal no es una red única, sino que consta de un número enorme de bloques pequeñísimos ligeramente (dentro de los límites de un segundo o minuto de arco) desorientados unos con respecto a otros. Las dimensiones de los bloques pueden variar dentro de unos límites bastante amplios. Lo más probable es que se encuentren entre 10^{-6} y 10^{-4} cm. Es posible que en el cristal exista cierta distribución según las dimensiones de los bloques.

La disposición de las partículas que constituyen el cristal en la frontera de dos bloques ofrece gran interés. Existen todas las razones para suponer que puede servir de modelo, muy próximo a la realidad, la superficie de un líquido cubierta de pompas de jabón.

Estudiando atentamente el cuadro que representa la fig. 270, vemos que las filas de átomos se «quiebran» cerca del centro del

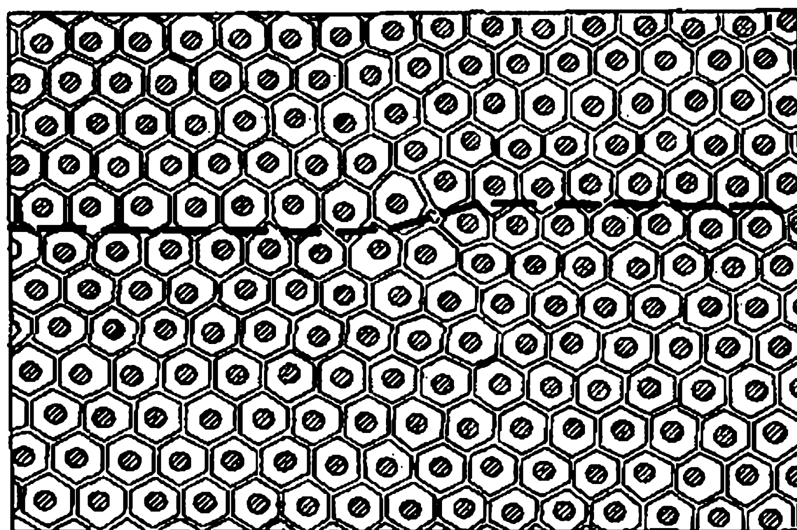


FIG. 270

modelo. El trozo de «estructura» representado en la figura podemos figurárnoslo en forma de cuatro bloques con un ángulo común en el centro del modelo. En el centro se ve claramente la existencia de un defecto: los «átomos» superiores no están en sus posiciones correctas, es decir, no encajan en los huecos del empaquetamiento denso. Este error ocasiona la división del cristal en cuatro bloques.

Estos errores — que llamaremos dislocaciones — son muchos. Se encuentran en desorden y pueden hacer que la fila de átomos gire hacia la derecha o hacia la izquierda. Por esta razón, en promedio, todas las direcciones cristalográficas pasan a través del monocristal con gran exactitud. Las dislocaciones crean la estructura de bloques o, como también suele llamarse, en mosaico, del monocristal. Está claro que la existencia de grietas microscópicas casuales o de huecos cuyas dimensiones sean iguales a varios átomos también favorecen la formación de la estructura de bloques.

Pasando la vista a lo largo de las filas de «átomos» del modelo vemos que la causa de la alteración del orden también puede formularse así: existen dos filas contiguas en las cuales el número de partículas difiere en una unidad, es decir, en una de las filas se «introdujo» un átomo de más.

DISLOCACIONES. La fig., 270 representa el modelo bidimensional de un cristal. Cada fila viene a ser la proyección de una capa atómica perpendicular al dibujo. Al sitio fuertemente deteriorado que se ve en el esquema le corresponderá en el cristal tridimensional una región lineal perpendicular al dibujo. Este lugar se llama *núcleo de la dislocación*. Este término indica que el defecto se debe al «desplazamiento» de una parte del cristal con respecto a otra.

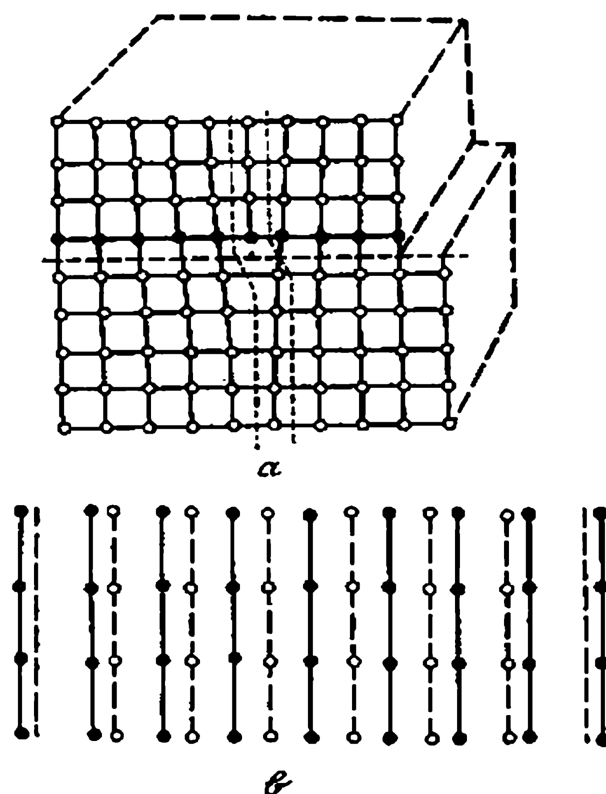


FIG. 271.

La figura de la dislocación no sólo explica la estructura de bloques del cristal, sino también otros muchos fenómenos. Por esto, conviene estudiar con más detalle estas deformaciones peculiares del cristal.

Existen dos tipos de dislocación: simple y en espiral. Simple es aquella con la cual no encontramos en el modelo de las pompas de jabón. La fig. 271, *a* representa esquemáticamente la dislocación simple; su núcleo se señala con una T invertida. La deformación es máxima junto al plano de dislocación que divide al cristal en dos partes; esta deformación se desvanece rápidamente al alejarse de la línea de dislocación hacia ambos lados. En esta misma figura (271, *b*) se muestra la vista superior de los dos planos atómicos adyacentes por ambos lados al límite entre los bloques. El plano superior (comprimido), que se representa con líneas de trazo continuo, contiene una fila más que el inferior (de trazos).

Unos esquemas análogos, representativos de la llamada dislocación en espiral, pueden verse en la fig. 272. La red está dividida en dos bloques, uno de los cuales parece que se ha deslizado por su parte con respecto a su vecino en un período (fig. 272, *a*). Las deformaciones máximas se concentran en el eje que se indica en el dibujo. La región adyacente a este eje se llama de dislocación en espiral. La esencia de esta deformación se comprenderá mejor si se observa el esquema que representa los dos planos atómicos contiguos por uno y otro lado, del límite entre los bloques (fig. 272, *b*). Con respecto al dibujo tridimensional, ésta es la vista del

plano desde la derecha. El eje de la dislocación en espiral que se indica en este esquema es el mismo que se ve en el dibujo tridimensional. Las líneas de trazo continuo representan la superficie del bloque de la derecha, y las de trazos, la de la izquierda. Como puede verse en el esquema, la dislocación en espiral es otro tipo de

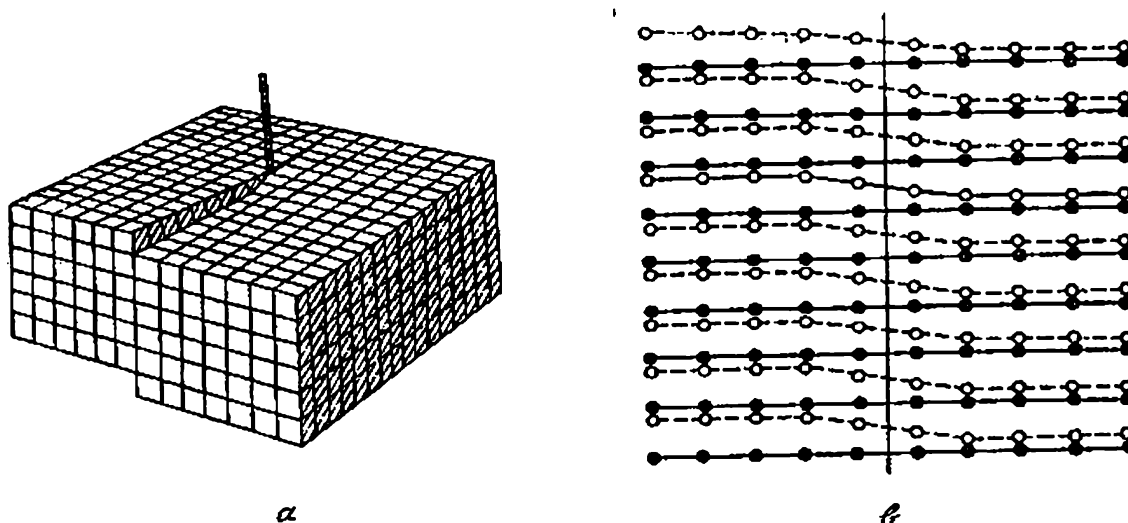


FIG. 272.

deformación, diferente de la simple. Aquí no hay una fila más de átomos. La deformación consiste en que, cerca del eje de dislocación, las filas de átomos cambian de vecinas próximas, es decir, se doblan y se ponen al nivel de las vecinas que estaban un piso más abajo.

¿Por qué se llama dislocación en espiral esta deformación?

Porque si vamos dándole vueltas al eje de dislocación, siguiendo los planos reticulares, comenzando en el plano más bajo, después de cada vuelta nos encontramos en un piso más alto, y en fin de cuentas llegaremos a la superficie superior del cristal del mismo modo que si hubiéramos subido por una escalera de caracol. En nuestra figura la subida sería en sentido contrario al de las agujas del reloj. Si el deslizamiento de los bloques fuera inverso, el rodeo se haría en el sentido de dichas agujas.

En un mismo objeto pueden encontrarse sucesivamente dislocaciones en espiral de un mismo sentido de rotación. Pero si en un mismo plano hay dos dislocaciones con sentidos de rotación distintos, se produce una deformación más compleja.

DEFECTOS DENTRO DEL BLOQUE. La red cristalina está formada por bloques en cuyo interior también hay defectos. En la red puede haber defectos en forma de lugares vacíos y en forma de impurezas constituidas por átomos extraños. La cantidad de huecos y de impu-

rezas puede ser insignificante, pero la deformación debida a su presencia puede ser no pequeña.

La fig. 273 da una idea del carácter de estas deformaciones. En ella se muestra la influencia de un átomo extraño (*a*), que ha sustituido a uno de los átomos de la red principal, de un átomo que

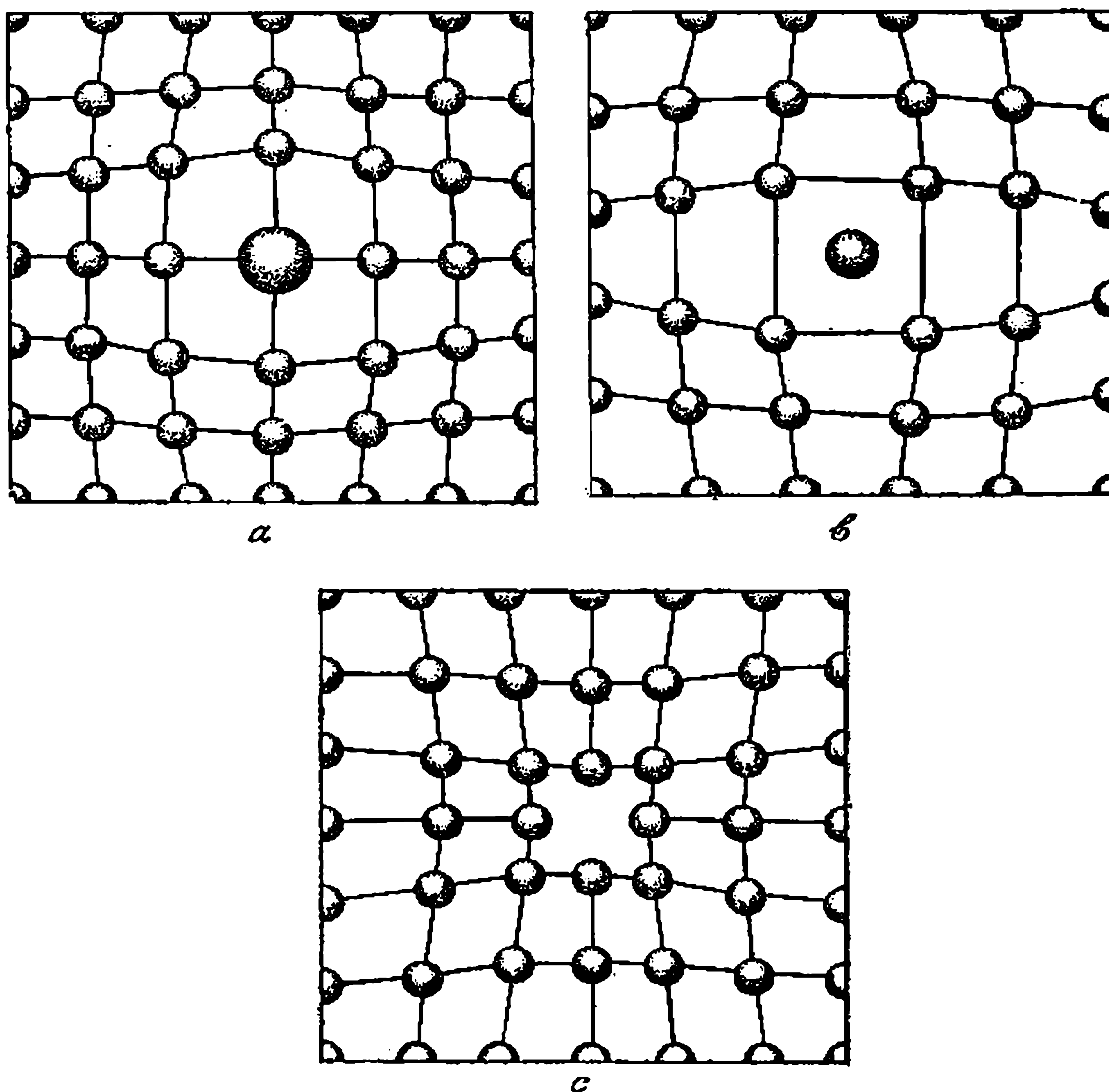


FIG. 273.

se introdujo entre los átomos de la red principal (*b*), y de un nudo «vacío» de la red (*c*). Esta influencia puede notarse a distancias de 5—10 períodos de la red en todas las direcciones. Pero 10 periodos en todas las direcciones son ya 1000 celdillas. Por esto una impureza del orden de 0,1% puede cambiar fundamentalmente las propiedades de una sustancia cristalina. No obstante, conviene adver-

tir que la influencia de las impurezas no se reduce a deformaciones sensibles de la red. Más adelante (en el § 272) nos detendremos en el caso de los semiconductores, donde impurezas del orden de un átomo por millar de millón pueden cambiar las propiedades eléctricas del cuerpo.

§ 238. Ordenación próxima. Líquidos

Al principio de este capítulo dijimos que muchísimos sólidos son empaquetamientos densos de esferas. La parte del espacio que queda libre en los empaquetamientos más densos constituye un 26%.

A estos cristales pertenece, por ejemplo, el cobre. Fundamos un trozo de cobre. ¿Cómo podemos figurarnos la estructura del metal fundido? La experiencia demuestra que el volumen de la sustancia aumenta al fundirla, aproximadamente en un 3%. Este aumento se produce a expensas del volumen libre, que ahora será igual no al 26%, sino al 29%. Las esferas adquieren un poco de sitio libre y pueden separarse de sus posiciones «regulares», alterando el orden perfecto propio del cristal.

Como resultado del movimiento térmico, las esferas oscilan fundamentalmente en torno a sus posiciones de equilibrio y rodeadas de las mismas esferas vecinas. De vez en cuando, cerca de una esfera se origina un hueco del mismo volumen que ella, puede producirse un cambio de esferas vecinas. Debido a la estrechez en que se encuentran las partículas en el líquido, se produce un fenómeno específico que se llama ordenación próxima o de corto alcance. En el modelo de esferas a una esfera dada no puede acercarse otra a una distancia menor que el diámetro de la esfera. Esta desviación del desorden ideal existe también en los gases, pero en ellos desempeña un papel pequeño, debido a que, en los gases, las moléculas más próximas se hallan unas de otras a una distancia que, en promedio, es 10 veces mayor que el tamaño de las moléculas.

Situemos una molécula cualquiera del líquido en el centro de nuestra atención y construyamos en torno a ella dos esferas concéntricas cuyos radios sean iguales respectivamente a uno y tres radios del circulo que representa a la molécula. ¿Cuántas vecinas próximas tiene, en promedio, la molécula considerada? Se llaman vecinas próximas las moléculas cuyos centros quedan dentro de la región más próxima que hemos trazado. He aquí unos datos relativos al cobre. A un átomo de cobre fundido le correspone un espacio que sólo es un 3% mayor que su propio volumen. Haciendo un cálculo determinamos que al volumen de la región más próxima le corresponde por término medio 11,6 átomos. Así, pues, hay aproximadamente 12 vecinos más cercanos cuyos centros se hallan del átomo

dado a una distancia igual a un diámetro. Atomos más próximos no hay.

Es evidente que la ordenación próxima influye no sólo en los vecinos más cercanos, sino también en los siguientes. Por esto el orden de corto alcance se suele caracterizar por la densidad media de la distribución radial de los átomos.

Elijamos un átomo (para simplificar supondremos que se trata de un líquido monoatómico) y tracemos en torno a él dos superficies esféricas de radios r y $r+dr$ respectivamente. El volumen de la capa esférica comprendida entre dichas superficies será $4\pi\ r^2 dr$. El número de centros de átomos que quedarán dentro de esta capa puede escribirse así:

$$U(r) \cdot 4\pi r^2 dr,$$

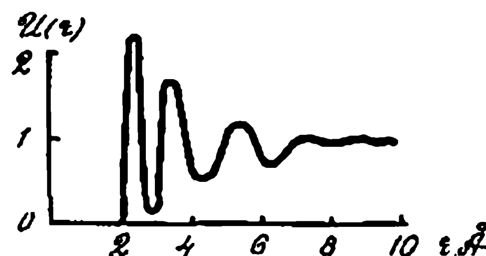


FIG. 274.

donde $U(r)$ se llama *densidad de distribución radial* de los átomos.

Un ejemplo de $U(r)$ (la curva para el arsénico amorfo) se da en la fig. 274). Los máximos de la curva muestran que ciertas distancias interatómicas adquieren un «peso» más considerable y se destacan entre las demás. El origen de los sucesivos máximos es exactamente el mismo que el del primero. La densidad del empaquetamiento permite, dentro de unos limites bastante estrechos, oscilar a un número de vecinos más próximos al átomo dado, dentro de unos límites un poco mayores varía el número de átomos vecinos próximos a los más próximos. A medida que nos alejamos de la esfera central, la distribución en desorden interviene de un modo cada vez más claro. La curva $U(r)$ tiende a un límite. El orden próximo se va difuminando y pasa de una manera continua al desorden. El valor de $U(r)$ conviene normalizarlo de tal modo, que $U(r)=1$ cuando $r\to\infty$. Este orden peculiar con respecto a los vecinos próximos, que se va perdiendo a medida que nos alejamos del átomo, o de la molécula, considerado, es el llamado orden próximo o de corto alcance.

El orden de disposición de las partículas característico solamente de los cristales se llama remoto o de largo alcance. Nos referimos a la periodicidad tridimensional propia del cristal, que no desaparece a distancias grandes. Los átomos situados a lo largo de una fila de nudos se repiten regularmente millares y millones de veces.

Al estudiar la estructura de los cristales hemos sabido que los átomos están muy lejos de comportarse siempre como esferas. Esto también se pone de manifiesto en la estructura de los líquidos.

En el caso ideal, la ordenación próxima en un líquido atómico debería conducirnos a un número de vecinos más cercanos próximo a doce. Pero, ¿qué resultado da la experiencia? Los metales, cuyas estructuras cristalinas representan de por sí empaquetamientos densos de esferas, conservan después de fundidas este mismo orden próximo: el número medio de vecinos más cercanos es muy aproximado a doce.

Cada átomo de litio, sodio y potasio tiene en el cristal, como se indicó antes, ocho vecinos más próximos. Este mismo orden próximo se conserva en el líquido; pero, a pesar de todo, el número medio de átomos más cercanos se hace algo mayor que ocho.

De distinto modo se comportan aquellas sustancias simples cuyos átomos en estado cristalino, están enlazados fuertemente con un número pequeño de vecinos. Al fundirse la sustancia estos enlaces se destruyen y el número de vecinos más cercanos a cada átomo se hace mayor que en el cristal.

§ 239. Cuerpos amorfos

La palabra «amorfo» significa «privado de forma». Los cuerpos amorfos sólidos se contraponen a los cristales, que tienen forma de poliedros regulares. Pero un cuerpo policristalino no tiene forma regular, aunque no sea amorfo. ¿Cuál es entonces el indicio fundamental de los cristales y de los cuerpos minicristalinos? Este indicio es, ante todo, la existencia de un punto o temperatura de fusión claramente expresado. Si a un cuerpo cristalino se le aplica calor, su temperatura se irá elevando hasta que dicho cuerpo comience a fundirse. Después de esto, la temperatura deja de aumentar y todo el proceso de la fusión se efectúa a la temperatura de fusión.

Uno de los representantes de los cuerpos amorfos es el vidrio ordinario. Cuando el vidrio se calienta, empieza a ablandarse, y si su temperatura aumenta el cuerpo pasa continuamente al estado líquido.

Este comportamiento de los cuerpos amorfos se explica por las peculiaridades de su estructura, que nos obligan a considerar estos cuerpos como líquidos mejor que como sólidos. Como ya hemos visto, los cuerpos cristalinos poseen ordenación remota o de largo alcance en la distribución de las partículas. Los cuerpos amorfos sólo poseen ordenación próxima en la distribución de las partículas y en esto no se diferencian de los líquidos.

En la fig. 275, *a* se representa el esquema de la estructura del cuarzo (anhídrido silícico), y en la fig. 275, *b*, el esquema de la estructura del vidrio de cuarzo. Una misma sustancia química puede obtenerse tanto en forma cristalina como en forma amorfa.

La semejanza y la diferencia de estos dos estados de la sustancia se ven claramente en la figura. El cuerpo amorfo es un cristal «deteriorado». Tanto en el cuerpo cristalino como en el amorfo el carácter del cerco de vecinos más próximos es el mismo. Es posible que para los grupos SiO_2 represente una ventaja energética especial el ciclo de cinco miembros. Como la simetría del eje de quinto orden no puede crear una estructura periódica (pág. 656), por esto se produce el vidrio amorfo.

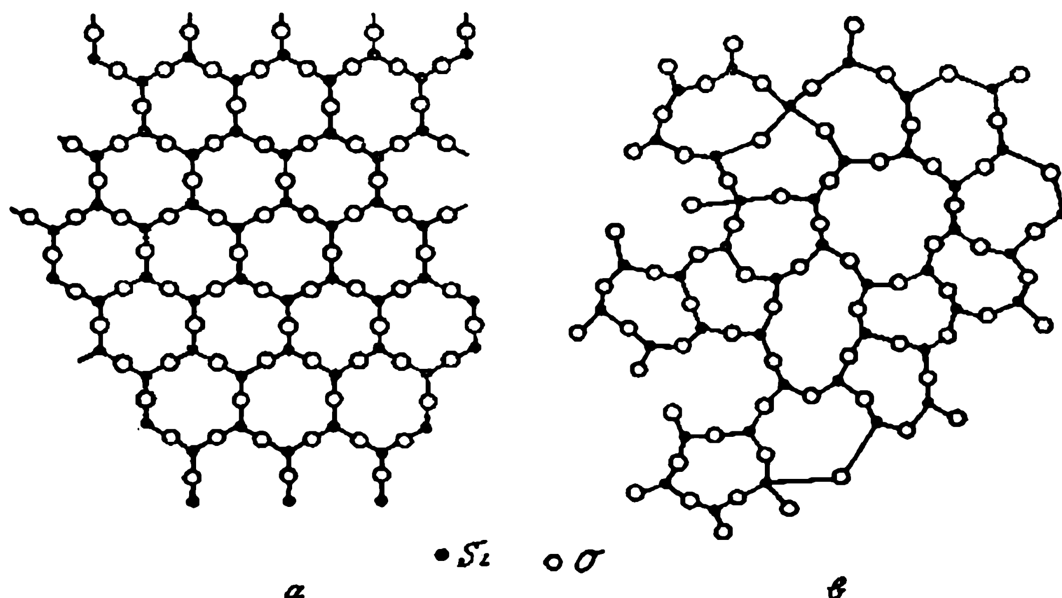


FIG. 275.

La ausencia de la ordenación de largo alcance, indicio característico de los cuerpos cristalinos, es la causa directa de que no exista un punto de fusión claramente definido. En el punto de fusión se produce una transición en la cual desaparece la ordenación remota y sólo se conserva la ordenación próxima en la disposición de los átomos.

En los cuerpos amorfos no varía el carácter de la disposición de los átomos al elevarse la temperatura. Sólo varía la movilidad de los átomos, es decir, aumentan las oscilaciones de los átomos. Al principio son muy pocos los átomos que tienen la posibilidad de salirse de su cerco y cambiar de vecinos, después su cantidad se hace cada vez mayor, hasta que por fin el número de estos cambios por segundo es tan grande como en el agua.

La facilidad con que una molécula dada puede cambiar de vecinos está ligada a una propiedad muy importante de los líquidos, su viscosidad. Cuanto menor es la frecuencia con que cambian las vecinas en el líquido, tanto más espeso y viscoso es éste. Es natural

que el aumento de la temperatura, que hace que aumente la amplitud de las oscilaciones de las moléculas, ocasione la disminución de la viscosidad. También es completamente comprensible que a temperaturas iguales será más viscoso el líquido cuyas moléculas tengan una forma compleja. Muchos líquidos solidifican antes de que su viscosidad se haga considerable. La gran viscosidad de la cola, de la miel y de las resinas y grasas líquidas se debe a la forma compleja de sus moléculas.

El intercambio de moléculas cesa prácticamente cuando el líquido solidifica.

§ 240. Ordenación remota y próxima de los átomos en las aleaciones

Cuando dos o más sustancias cristalizan conjuntamente, en algunos casos pueden formar una red cristalina común. La formación o no formación de este cristal mixto depende de la correlación de las energías de interacción entre las partículas homogéneas y heterogéneas. Si las partículas homogéneas se atraen con más fuerza que las heterogéneas, el cristal mixto no se forma.

Un ejemplo de cristales mixtos son las aleaciones metálicas, sustancias que tienen muchas aplicaciones en las diversas ramas de la industria. La estructura de las aleaciones puede dar una idea clara del concepto de ordenación remota y próxima.

En el caso más simple de aleaciones diatómicas podemos encontrarnos con estructuras completamente ordenadas en las cuales se puede destacar una celdilla determinada y describir la sustancia como cristal de una composición que tiene una fórmula determinada A_nB_m. Pero este estado de cosas no siempre se consigue y, en una serie de casos, los átomos A sustituyen desordenadamente a los átomos B en su red o se introducen desordenadamente (si son pequeños) entre los átomos B.

Nos detendremos solamente en el ejemplo de la aleación por sustitución hierro-cobalto (fig. 276). Esta aleación tiene la simple estructura de la red centrada en el cuerpo. Cada átomo — ya sea de hierro o de cobalto — tiene ocho vecinos más próximos. Con respecto a la disposición mutua de los centros de los átomos el cristal de la aleación está siempre completamente ordenado: los centros de los átomos forman en todas las condiciones una misma red centrada en el cuerpo. Otra cosa es lo que ocurre con respecto a la distribución de los átomos de hierro y de cobalto por puntos. Los nudos de la red del cristal se pueden dividir convencionalmente en vértices y centros de cubos. Cuando el orden es completo, todos los vértices están ocupados, por ejemplo, por átomos de hierro,

y todos los centros, por átomos de cobalto (fig. 276, *a*). La ordenación perfecta de largo alcance de este cristal puede deteriorarse paulatinamente si empiezan a aparecer átomos que ocupan «puestos ajenos». No obstante, mientras el número de átomos que se encuentran en «sus» puestos sea diferente del número de átomos que se hallan en puestos «ajenos» (fug. 276, *b*). tendremos derecho a decir que en el cristal, aunque «deteriorado» parcialmente, existe un orden remoto. Este orden desaparece cuando se borra la diferencia entre los puestos «ajenos» y «propios», es decir, cuando la mitad de los átomos se encuentran en sus puestos y la otra mitad, en puestos ajenos (fig. 276,*c*).

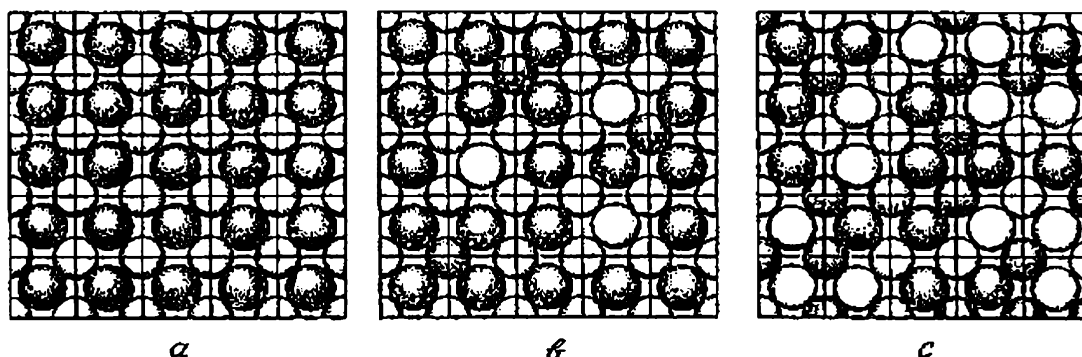


FIG. 276.

Hay un hecho importante que consiste en que cuando se calienta un cristal construido en orden completo, este orden se altera poco a poco, es decir, el porcentaje de átomos que ocupan puestos «ajenos», aumenta. Existe una temperatura por encima de la cual no puede existir orden remoto, ni siquiera «deteriorado», es decir, parcial. Esta temperatura se llama *punto lambda* (del nombre de la letra griega λ). Para la aleación hierro — cobalto, el punto λ se halla a 770 °C. El paso del orden al desorden significa que el movimiento térmico vence la «tendencia» de los átomos a colocarse conservando el orden de largo alcance.

Existe mucho de común entre el proceso de desaparición de la diferencia entre puestos «ajenos» y «propios» y el proceso de fusión. Ambos procesos consisten en la desaparición del orden remoto. Sin embargo, en la fusión desaparece el orden remoto en la disposición de los centros de los átomos, mientras que en el paso por el punto λ sólo se altera el orden en la disposición de los átomos de distintos elementos.

Pero la peculiaridad fundamental de la estructura de las aleaciones del tipo hierro — cobalto es la posibilidad de que exista un orden remoto parcial. Este orden puede existir solamente con

respecto a la disposición de los átomos de hierro o de cobalto, pero no en cuanto se refiere a las posiciones de los centros de los átomos.

Lo mismo que en el caso de la fusión, la destrucción del orden remoto no significa la desaparición del orden en general; el orden de corto alcance se conserva.

La ordenación próxima, con respecto a la distribución de los átomos en el cristal hierro — cobalto, consiste en la «tendencia» de los átomos de cobalto a rodearse de átomos de hierro (y viceversa). Si se toma un átomo cualquiera y se enumeran sus ocho vecinos más próximos, resulta que el número de átomos del otro elemento no será igual a la mitad del número total, es decir, a cuatro. En dependencia de la perfección que tenga el orden próximo, el átomo de hierro puede estar rodeado, por término medio, de cinco, seis o siete átomos de cobalto.

Las investigaciones de la aleación del cobre con el oro han demostrado que su ordenación próxima es bastante perfecta y que se manifiesta no sólo en el número de vecinos más próximos, sino también en el número de vecinos próximos a los más próximos y así sucesivamente. Si se traza una serie de superficies esféricas en torno a un átomo cualquiera de oro, resultará que dentro de la primera esfera sólo se encontrarán prácticamente átomos de cobre, entre la primera y la segunda sólo habrá átomos de oro. Más adelante comienza a alterarse paulatinamente la perfección del orden de corto alcance, pero se continuará notando la preferencia por los átomos de un elemento determinado incluso en la décima esfera.

Por medio de investigaciones muy precisas, realizadas con rayos X, se ha logrado demostrar como «nace» el orden remoto en los cristales de las aleaciones. Las experiencias con aleaciones de cobalto—platino demostraron que la región del orden de largo alcance crece en el cristal desordenado como los gérmenes del cristal crecen en el líquido. Estas regiones embrionarias se disponen de un modo completamente determinado con respecto a los ejes del cristal.

§ 241. Cristales líquidos

Los representantes de los cristales líquidos hay que buscarlos entre las sustancias orgánicas y bioorgánicas. Las moléculas de las sustancias que forman los cristales líquidos tienen siempre forma alargada. Se encuentran cristales líquidos entre los virus; los dan los lípidos, sustancias que figuran en la composición de los tejidos vivos.

La sustancia que constituye los cristales líquidos existe en esta forma en un intervalo de temperaturas determinado. Si un cristal líquido se calienta, se transforma en un líquido ordinario, si se enfría, se convierte en un cristal.

Se dio el nombre de cristales líquidos a estas sustancias porque reúnen de un modo raro las propiedades del líquido y del cristal. Poseen fluidez y forman gotas. Pero la forma de estas gotas puede ser alargada, y no redonda. Cada gota se parece un poco a un trozo de jalea. Un estudio detallado muestra que las moléculas están dispuestas en la gota con un orden impropio de los líquidos ordinarios.

Se han descubierto dos tipos de cristales líquidos. En el primero de ellos la disposición de las moléculas posee ordenación próxima, pero todas las moléculas son paralelas unas a otras. Aún más peculiar es el orden en que están dispuestas las moléculas en

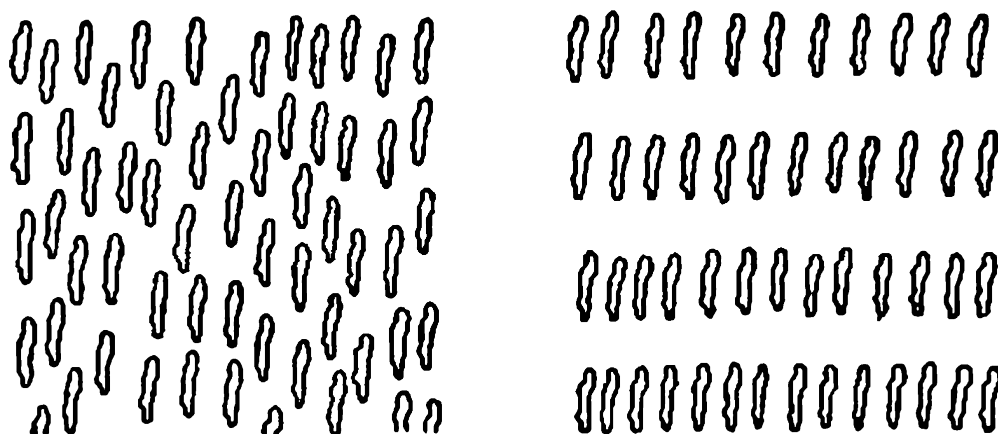


FIG. 277.

el otro tipo de cristales líquidos. En ellos las moléculas forman capas. Cada capa está formada por moléculas paralelas situadas las unas con respecto a las otras en ordenación próxima. El esquema de la fig. 277 aclara lo dicho.

El jabón disuelto en agua forma cristales líquidos. Las propiedades del jabón que lo hacen apto para lavar están ligadas directamente con su capacidad para formar cristales líquidos. La molécula de jabón tiene la forma de un palito, cuyo espesor es de cerca de 4 Å y su longitud, de 30—40 Å. En un extremo de la molécula se concentra la carga eléctrica negativa. Este extremo polar tiende hacia las moléculas del agua.

La solución jabonosa es un cristal líquido compuesto por gran número de capas dobles de moléculas, separadas por capas de agua (fig. 278). En las dobles capas, los extremos polares de las moléculas miran hacia fuera, es decir, hacia el agua. Las moléculas de jabón, dentro de una capa, están muy apretadas, pero en orden de corto alcance. Si en el agua hay poco jabón, las capas dobles de moléculas están separadas por grandes capas de agua. Disolviendo

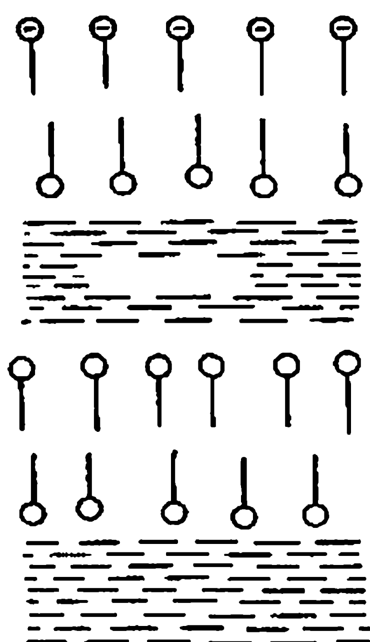


FIG. 278.

más jabón, crearemos un número cada vez mayor de capas dobles. La solución estará saturada cuando el espesor de la capa de agua se haga igual aproximadamente a 20 Å. Las dobles capas que forman el cristal líquido tienen gran movilidad. Cuando nos lavamos las manos, las capas resbalan fácilmente una con respecto a la otra a lo largo de la piel. Los extremos polares de las moléculas recogen la suciedad de las manos y la transmiten al agua.

§ 242. Polímeros

Una estructura particular es la que posee un gran número de sustancias orgánicas constituidas por moléculas gigantes (formadas por muchos millares de átomos). A estas sustancias pertenecen los plásticos, el caprón y la seda artificial. Las moléculas de estas sustancias están formadas por grupos de átomos que se repiten a lo largo de una cadena (de aquí el nombre de «polímero»). Con frecuencia la disposición de los átomos dentro de las moléculas tiene ordenación remota.

Las sustancias de alto peso molecular con enlaces químicos laterales entre las cadenas difieren considerablemente por sus propiedades de los llamados polímeros lineales, en los que no existen estos enlaces. Los polímeros con enlaces químicos laterales entre las cadenas son sistemas rígidos. Los átomos están dispuestos de modo poco compacto y sin regularidad alguna.

Los plásticos de esta clase se utilizan para hacer botones, vajillas, armaduras, etc. Para la investigación física tienen mucho más interés los polímeros lineales, los cuales poseen propiedades curiosas. Aunque todavía existe una serie de incomprensiones, los rasgos fundamentales de la estructura de estas sustancias se pueden considerar establecidos.

Al solidificar la masa fundida o directamente en el proceso químico, las largas cadenas moleculares se sitúan formando haces paralelos. Como la solidificación (o la formación) comienza simultáneamente en un número enorme de puntos, se forma una multitud de paquetes de cadenas que se encuentran al crecer y se rodean unas a otras y que, en fin de cuentas, pueden tomar formas bastante caprichosas y embrolladas. El papel de los paquetes en el polímero

lineal es en cierto grado análogo al papel del cristalito en la sustancia policristalina.

No obstante, entre el paquete y el cristalito existe una diferencia bastante esencial. Esta se debe a que el grado de ordenación del grupo de cadenas paralelas que forman el paquete (estas cadenas son millares o decenas de millares) puede ser muy diverso. En la fig. 279 se ven tres variantes de ordenación acimutal: a) cristalina, en la cual los ejes de las cadenas forman una red regular y los acimut de las cadenas están ordenados; b) gasocristalina, en la que los ejes de las cadenas forman una red y los acimut están en desorden; y c) amorfa o líquida, donde no existe red (ordenación remota). También debe tenerse en cuenta que los desplazamientos longitudinales de unas redes con respecto a otras pueden ser tanto desordenados como ordenados. Como el paquete de cadenas tiene bastante longitud (en la composición de las cadenas pueden figurar millares y millones de átomos) y puede ser una formación en zigzag, es evidente que, incluso cuando las cadenas estén dispuestas en un orden perfecto, no será completamente cristalino. Unicamente puede ser cristalina la parte del paquete en que las cadenas paralelas sean rectas. Esto significa que, en el caso del orden perfecto, cada paquete de cadenas constará de una sucesión de regiones cristalinas (cristalitos).

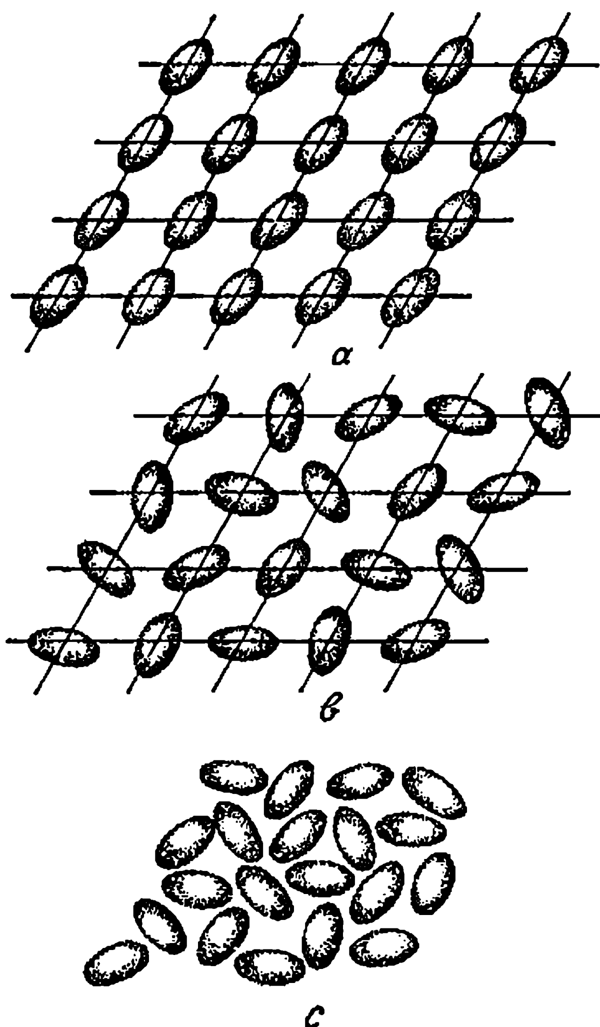


FIG. 279.

El estirado de los polímeros lineales consiste en desarrollar los paquetes de cadenas. Este mecanismo de estirado es capaz de explicar el alargamiento de hasta un 1000% que se observa en algunos polímeros altos tanto naturales como artificiales.

Entre los polímeros lineales más conocidos figuran el caucho y politén. Este mismo tipo de estructura lo tienen los polímeros altos que se utilizan en la fabricación de fibras sintéticas.

§ 242a. *Macromoléculas biológicas*

Las moléculas responsables de la actividad vital del organismo son también moléculas lineales constituidas por centenares de millares y millones de átomos.

En la composición del núcleo de la célula entra una molécula de ácido desoxirribonucleico (DNA), que es la portadora de la herencia. Estas moléculas existen en forma de espirales dobles. A la cadena principal de átomos, que forman el esqueleto de la espiral, se unen en un orden determinado radicales moleculares de cuatro tipos. Su orden de sucesión a lo largo de la cadena codifica la información genética. Una cadena contiene aproximadamente 10^6 radicales. El número de diferentes permutaciones de cuatro elementos en esta serie de un millón es inconcebible por grandiosidad. Está claro la riqueza de información que lleva en sí una macromolécula larga y que no sólo las peculiaridades de tipo biológico, sino también todas las particularidades del individuo pueden ser cifradas en el código del orden de sucesión de los radicales en la molécula DNA. Cuando la célula se divide, las dobles espirales se destrenzan y, pasando a la descendencia, le transmiten los rasgos hereditarios por medio del código antedicho.

Las dobles espirales del DNA pueden separarse y su estructura ser sometida a investigación. Pero en la actualidad sólo sabemos determinar el orden de sucesión de los átomos y de los grupos atómicos en las estructuras cristalinas ordenadas. La molécula DNA, en general, no está ordenada y, por esto, con los métodos físicos (espectrales y, principalmente, radiográficos) sólo se ha logrado establecer los principios de su estructura. La elaboración de métodos para determinar el orden de sucesión de los radiales en el DNA, para un organismo dado, es decir, para describir objetivamente síntomas hereditarios a nivel molecular, es una tarea futura.

La célula — el sillar básico de todo lo vivo — es una fábrica de moléculas proteínicas que cumplen diversas funciones vitales. La producción de las moléculas proteínicas se efectúa, por así decirlo, bajo la dirección de las moléculas de DNA. Las moléculas proteínicas están constituidas por 20 tipos de aminoácidos. El orden de combinación, rigurosamente determinado para cada proteína, lo dicta la molécula de DNA. La molécula de DNA desempeña el papel de conjunto lineal de centenares y millares de matrices que estampan diferentes moléculas proteínicas. Algunas de

ellas son iguales para una especie biológica dada, otras llevan en sí la huella de las peculiaridades del individuo.

Las moléculas proteínicas pueden aislarse y cristalizarse. Los cristales de las proteínas, a pesar de que sus moléculas contienen millares de átomos, se logran estudiar por los métodos del análisis estructural de rayos X y su estructura se determina. Este es un problema extraordinariamente difícil y no es extraño que, hasta ahora, sólo se conozca la estructura de seis proteínas.

El propio hecho de que moléculas tan complejas formen cristales, es ya sorprendente. La caprichosa sucesión ramificada de varios millares de átomos es totalmente idéntica en todos los millares de millones de moléculas que forman el cristal de la proteína. Todas las moléculas están dispuestas, en una o dos orientaciones, en los nudos de una red tridimesional regular.

Una propiedad notable del cristal proteínico es que las moléculas de que está formado sólo están en contacto unas con otras por una parte insignificante de sus superficies. La mayor parte del espacio intermolecular está lleno de agua. Cuando el cristal proteínico se deseca cuidadosamente, sufre una transformación que cambia la disposición mutua de las moléculas. Una gran parte del agua se puede extraer conservando el carácter cristalino de la proteína.

33

TRANSICIONES DE FASE

§ 243. Diagrama de estado

Sólo es posible un estado gaseoso y un estado líquido. En cambio, estados cristalinos (así como líquidocristalinos y gasocristalinos) puede haber varios.

Los estados gaseoso y líquido de la sustancia se caracterizan por el desorden en la disposición de las partículas. En el gas, la relación entre la energía cinética del movimiento de las partículas y la energía potencial de su interacción es tal, que las fuerzas de enlace no pueden retener las partículas y las moléculas se expanden tanto como lo permite el recipiente que contiene a la sustancia. Al estado líquido le es peculiar una forma determinada, ya que las fuerzas de cohesión hacen que sean imposibles los recorridos libres e independientes de las moléculas*[1]. A grandes presiones desaparece la diferencia entre gas y líquido.

*[1] En ausencia de la fuerza de la gravedad la gota de líquido toma la forma de esfera.

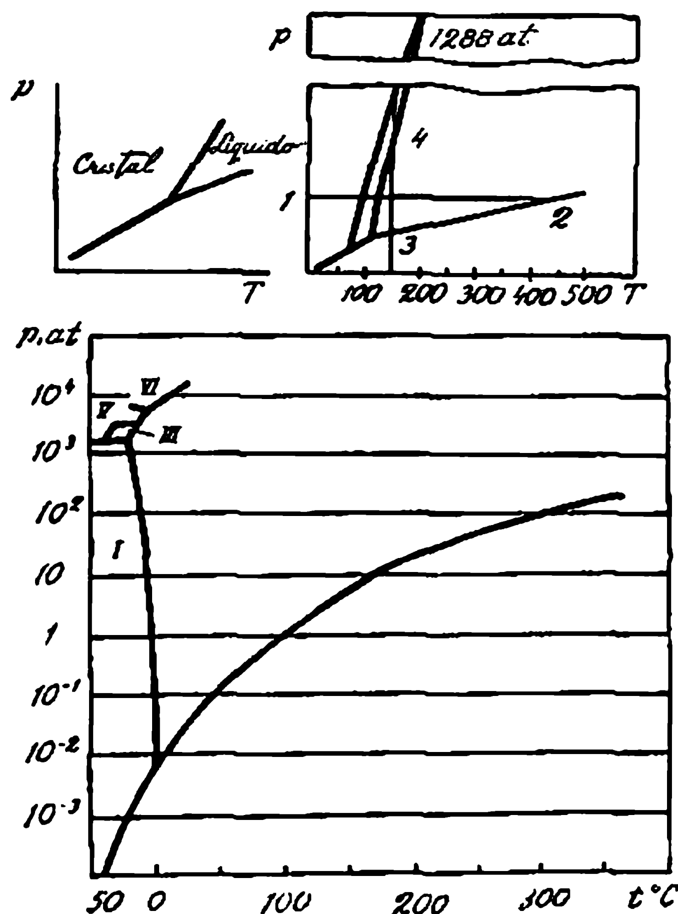


FIG. 280.

Como quiera que no existen dos disposiciones desordenadas de las partículas que difieren entre sí en el principio de su organización, cada sustancia sólo tiene un estado líquido y un estado gaseoso. El cristal se caracteriza por una determinada disposición mutua de las partículas, por lo tanto, para una misma sustancia es posible, en principio, cualquier número de fases cristalinas diferentes. Y, en efecto, observamos que, casi por regla general, un mismo compuesto químico presenta diversas modificaciones cristalinas (el diamante y el grafito, el estaño blanco y el gris, el azufre rojo y el amarillo, etc.).

Cada sustancia se encuentra en un estado fásico determinado, que depende de las condiciones exteriores, a saber, de la temperatura y de la presión. En vez de describir las condiciones de existencia de las fases de una sustancia dada por medio de tablas, se suele utilizar para este fin un diagrama, en el cual se toman

como coordenadas la presión y la temperatura. Este diagrama se conoce con el nombre de *diagrama de estado*.

La fig. 280 reproduce tres ejemplos de diagramas de este tipo. En la parte superior izquierda se representa el diagrama de estado de una sustancia ideal que sólo tiene una fase sólida. El campo del diagrama está dividido en tres partes: una de ellas indica las condiciones de existencia del cristal, otra las del estado líquido, y la tercera, las de la fase gaseosa. Como es natural, la fase gaseosa se halla en la parte inferior derecha del diagrama, es decir, donde las presiones son menores y las temperaturas, mayores. La fase sólida ocupa la región en que las temperaturas son las menores y las presiones, las mayores. Este diagrama es muy cómodo: si nos interesa saber en qué estado se encontrará el cuerpo cuando la presión sea p y la temperatura T, construimos en el diagrama de estado el punto correspondiente y obtenemos la respuesta.

En la parte superior derecha de la figura se representan las condiciones de existencia de las diversas fases del azufre. Esta sustancia tiene dos modificaciones cristalinas y el campo del diagrama está dividido en cuatro partes. Finalmente, en la parte inferior de la figura se da el diagrama de estado del agua. Este diagrama es difícil de representar a escala lineal, por lo que lo hacemos valiéndonos de la escala logarítmica para expresar las presiones. Como vemos, el hielo existe no en una, sino en cinco modificaciones distintas. Estas modificaciones se señalan con las cifras I, II, III, V y VI, porque la fase que antes se llamaba IV fue señalada erróneamente. Las fases poco conocidas del hielo existen a presiones poco elevadas.

En el diagrama de estado tienen sentido físico no sólo los puntos que caen dentro de su campo, sino también las líneas de separación entre las fases. A la presión y temperatura correspondientes a los puntos de la línea divisoria, las dos fases vecinas existen simultáneamente. Para el agua esto corresponderá a la condición en que el hielo flota en el agua, sin que aquél se funda ni ésta se hiele. Las líneas divisorias pueden llamarse *curvas de equilibrio de fases*.

Subrayamos que existen curvas, pero no puntos de equilibrio de fases. Esto quiere decir, que el equilibrio de dos fases puede obtenerse a temperaturas distintas, si la presión varía del modo correspondiente. Esto es: la temperatura de equilibrio de fases es función de la presión o, lo que es lo mismo, la presión de equilibrio de fases es función de la temperatura.

§ 244. Transiciones de fase

Las curvas de equilibrio de fases pueden llamarse también curvas de transición de fase, ya que el paso de una fase a otra se produce al cruzar el punto representativo de esta curva.

La curva que separa el sólido del líquido es la *curva de fusión* o *de cristalización*; la que separa el líquido del vapor es la *curva de vaporización* o *de condensación*. La curva que separa el sólido del vapor se llama *curva de sublimación*, y las que limitan dos fases sólidas, *curvas de transición*.

Los procesos de variación del estado también conviene representarlos en el diagrama de estado. En la mayoría de los casos nos encontramos con transformaciones que se efectúan a temperatura constante, o con transformaciones que transcurren a presión constante. Estos procesos se representan en los diagramas por medio de líneas verticales u horizontales.

En los diagramas de estado reproducidos antes (fig. 280) se muestran varios ejemplos de variaciones del estado del cuerpo que pasan por transiciones de fase. La línea *2—1* del diagrama de estado del azufre representa un proceso de enfriamiento del azufre gaseoso, que se cumple a presión constante. A la temperatura de 444,5° C el azufre gaseoso se condensa en líquido, y a la temperatura de 110,2° C se transforma en una modificación cristalina del azufre, y, finalmente, a la temperatura de 95,5° C, en otra modificación. En este mismo diagrama, el proceso *3—4* representa la compresión del azufre gaseoso. Y aquí, elevando la presión, se consigue transformar el gas en líquido y, después, por encima del punto *4*, a presiones bastante altas, en sólido.

Hay que prestar atención a la existencia de condiciones únicas en las cuales pueden darse simultáneamente tres fases. Estos puntos se llaman *triples*. El azufre tiene tres puntos triples: el primero, en que existen a la vez azufre gaseoso, líquido y azufre amarillo; el segundo, en el que existen a la vez gas, líquido y azufre rojo, y, finalmente, el tercer punto triple, en el cual el líquido existe en equilibrio con las fases cristalinas.

Puede demostrarse con razonamientos puramente termodinámicos que la existencia de un cuarto punto es imposible. Por lo tanto no existen condiciones con las que, por ejemplo, dos modificaciones del cristal estén a la vez en equilibrio con su líquido y vapor.

Cada transición de fase se caracteriza por una temperatura de transición a la presión dada. Suele hablarse de temperatura de fusión (cristalización), ebullición, sublimación, etc. Si no se indica la presión de que se trata, se supone que es la presión atmosférica normal.

Una característica importante de la transformación es el calor de transición. Es bien conocida la existencia de los calores latentes de ebullición y de fusión. Pero la existencia del calor de transición es una regla general. Cualquier transformación que se realice con calentamiento, requiere calor. De acuerdo con el segundo principio de la termodinámica, el calor de transición debe estar ligado

unívocamente con la variación de la entropía

$$\Delta Q = T\Delta S.$$

Aquí T es la temperatura de transición. De aquí se deduce claramente que toda transición de fase que se efectúe con calentamientol va acompañada de un incremento de la entropía.

La temperatura de transición (fusión o ebullición) se puede calcular por la fórmula

$$T = \Delta Q/\Delta S$$

como el cociente de dividir el calor latente de transición por el incremento de la entropía. No obstante, esta afirmación tiene un carácter puramente teórico, porque el salto de la entropía en la transición de fase es prácticamente imposible de calcular previamente. Por el contrario, si se conocen por vía experimental la temperatura y el calor de transición, puede determinarse exactamente la magnitud del incremento de la entropía.

La transición de fase hielo I — hielo III se produce a la temperatura $t = -20°C$ y a la presión $p = 2103$ atm. Esta transición se efectúa con desprendimiento de calor; por cada gramo de hielo se desprenden $\Delta Q = 5,6$ cal. Por lo tanto, la variación de la entropía

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{5,6}{253} = 0,022 \text{ cal/°K}.$$

§ 244a. *Diagrama de estado y propiedades del helio*

El helio merece una descripción aparte debido a que sólo este elemento pone de manifiesto dos excepciones de las reglas genera-

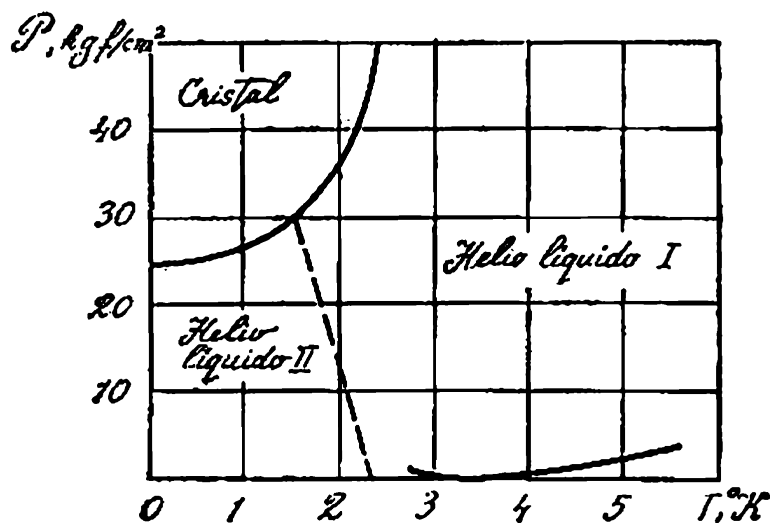


FIG. 280a.

les. El diagrama de estado del helio (isótopo 4) está representado en la fig. 280a. Resulta que existen dos fases sólidas. La red centrada en el cuerpo del helio es estable en una región muy estrecha de temperatura — presión. En la región fundamental el helio tiene la estructura hexagonal densa o compacta (véase la pág. 667), y a presiones muy altas, no representadas en el dibujo, adquiere la estructura de red cúbica centrada en las bases. La primera particularidad que salta a la vista es la de que la fase estable a presión y temperatura nulas es la líquida, y no la sólida. La segunda particularidad consiste en que el helio líquido puede existir en dos estados entre los cuales pasa un límite de fases claro.

La causa de estas peculiaridades del helio es la combinación de la pequeña masa de sus átomos con unas fuerzas de interacción debilísimas. Baste decir que la profundidad del pozo de potencial, en la curva de la interacción de dos átomos de helio, es diez veces menor que la que se observa en el argón. Como resultado se tiene, que la energía en el punto cero del helio, es decir, la energía cinética en el estado más bajo, es tan grande, que, sin aplicarle presión exterior, el átomo de helio no puede encontrarse (como otros átomos) en el pozo de potencial creado por la interacción con sus vecinos y limitarse en su movimiento tan sólo a las oscilaciones en torno a la posición de equilibrio.

La más sorprendente de las propiedades del helio II es la descubierta por el físico soviético Piotr L. Kapitsa en 1938, la superfluidez del helio, es decir, la ausencia total de viscosidad.

Para observar la superfluidez se hace un recipiente en cuyo fondo hay una rendija muy estrecha (de media micra de anchura). Un líquido ordinario casi no se infiltra a través de esta rendija; lo mismo le ocurre al helio a temperaturas mayores de 2,19° K. Pero en cuanto la temperatura se hace menor de 2,19° K, la velocidad de salida del helio aumenta de golpe en mil veces por lo menos. A través del estrechísimo intersticio, el helio II pasa casi instantáneamente, es decir, pierde completamente su viscosidad. La superfluidez del helio conduce a un fenómeno todavía más extraño. El helio II es capaz de «salirse» de por sí del vaso o del tubo de ensayo en que se encuentra.

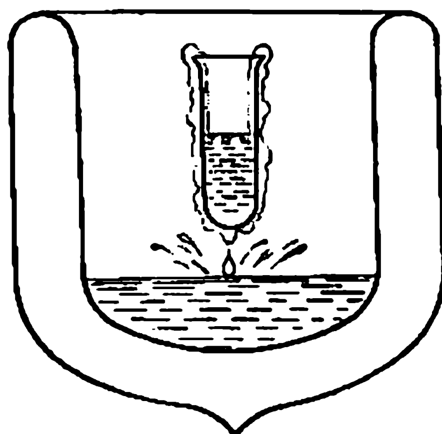


FIG. 280b.

En la fig. 280b se ve el esquema de cómo se hace este experimento. El tubo de ensayo con el helio II se coloca en una vasija de Dewar sobre un baño de helio. El helio sube por la pared del

tubo de ensayo formando una película delgadísima inapreciable y rebosa; el fondo del tubo gotea.

En virtud de las fuerzas capilares, las moléculas de cualquier líquido, que moje la pared de un recipiente, se elevan por dicha pared y forman en ella una película delgadísima, cuyo espesor es del orden de una millonésima de centímetro. Esta película es invisible y, en general, no se revela en nada en el caso de un líquido viscoso ordinario.

Pero el cuadro cambia por completo cuando se trata del helio, que es un líquido privado de viscosidad. La rendija estrecha no estorba el movimiento del helio superfluido; una película superficial delgada se comporta lo mismo que dicha rendija. El líquido exento de viscosidad corre formando una capa delgadísima. Por encima del borde del vaso o tubo de ensayo, la película superficial forma un sifón, por el cual rebosa el helio.

Se comprende que en un líquido ordinario no se observa nada semejante. Cuando la viscosidad es normal, el líquido no puede prácticamente «abrirse paso» a través de un sifón de anchura insignificante. Este movimiento es tan lento, que el líquido tardaría en rebosar millones de años.

Así, pues, el helio II carece de toda viscosidad. Al parecer, de esto debería deducirse lógicamente que un sólido puede moverse sin rozamiento dentro de este líquido. Introduzcamos en helio líquido un disco colgado de un hilo y torzamos dicho hilo. Dejando en libertad este sensillo dispositivo tendremos algo parecido a un péndulo de torsión: el hilo con el disco oscilará, torciéndose periódicamente ya en un sentido ya en otro. Si no existe rozamiento, es de esperar que el disco oscile eternamente. No obstante, al cabo de un tiempo relativamente corto, aproximadamente igual al que tarda en el helio I normal (es decir, en el helio a temperatura mayor que 2,19° K), el disco se para. Al pasar por la ranura el helio se porta como líquido sin viscosidad, pero con relación a los cuerpos que se mueven sumergidos en él se conduce como un líquido viscoso ordinario. El comportamiento del helio líquido puede comprenderse solamente desde el punto de vista de la mecánica cuántica. Intentaremos dar una idea acerca de cómo la teoría propuesta por Lev D. Landáu explica dicho comportamiento.

Resulta que cada partícula del helio líquido toma parte simultáneamente en dos movimientos: uno superfluido, que nada tiene que ver con la viscosidad, y otro ordinario.

El helio II se comporta como si estuviera formado por una mezcla de dos líquidos que se mueven de un modo completamente independiente «uno a través de otro». Uno de los líquidos es normal por su comportamiento, es decir, posee la viscosidad ordinaria, el otro es superfluido.

Cuando el helio pasa por la rendija o rebosa por encima de los bordes del vaso, observamos el efecto de la superfluidez. Y cuando el disco oscila sumergido en el helio, se detiene debido a que, en la parte normal del helio, el rozamiento es inevitable.

La capacidad de tomar parte en dos movimientos distintos engendra las extraordinarias propiedades de conductibilidad calorífica que tiene el helio. Como ya dijimos, los líquidos, en general, conducen bastante mal el calor. De un modo semejante a los líquidos ordinarios se comporta el helio I. Pero cuando se produce su transformación en helio II, su conductibilidad térmica aumenta aproximadamente mil millones de veces. De este modo, el helio II conduce mejor el calor que los mejores conductores ordinarios, como, por ejemplo, el cobre y la plata.

Esto se debe a que en la transmisión del calor no participa el movimiento superfluido del helio. Por esto, cuando en el helio II existe una diferencia de temperaturas, se producen dos corrientes que van en sentidos opuestos, y una de ellas, la normal, es la que transporta el calor. Esto no se parece en nada a la conductibilidad térmica ordinaria. En un líquido ordinario el calor es transmitido por los choques de las moléculas. En el helio II el calor fluye junto con la parte ordinaria del helio, es decir, corre como un líquido. Este procedimiento de transmisión es el que origina la enorme conductibilidad del helio.

De que lo que acabamos de decir es correcto podemos convencernos haciendo el siguiente experimento.

En un baño con helio líquido hay una vasija de Dewar llena también de helio. La vasija se comunica con el baño por medio de un apéndice capilar. Dentro de la vasija de Dewar se calienta el helio por medio de una resistencia eléctrica en espiral, pero el calor no puede pasar al helio del baño, puesto que las paredes de la vasija no son conductoras.

Frente al tubo capilar hay una aleta suspendida de un hilo delgado. Si el calor fluye como un líquido, deberá hacer girar la aleta. Esto es precisamente lo que ocurre. Pero la cantidad de helio que hay en la vasija no varia. ¿Cómo se explica este fenómeno? Al calentar el helio se produce una corriente de la parte normal del líquido desde la zona caliente a la fría, y otra corriente, de la parte superfluida, en sentido contrario. La cantidad de helio que hay en cada punto no varía, pero como a la vez que se transporta el calor se mueve la parte normal del líquido, la aleta gira en virtud del rozamiento viscoso de esta parte y permanece desviada mientras dura el calentamiento.

Del hecho que el movimiento superfluido no transporte calor se deduce otra conclusión. Ya hemos dicho antes que el helio se «desliza» por encima de los bordes del vaso. Pero se «va» la parte

superfluida, y la normal se queda. El calor está ligado solamente a la parte normal del helio y no acompaña a la parte superfluida que se «va». Por consiguiente, a medida que el helio se «va» del recipiente, una misma cantidad de calor corresponderá a una cantidad cada vez menor de helio, es decir, el helio que queda en el recipiente debe calentarse. Efectivamente, en el experimento se observa este fenómeno.

Las masas de helio ligadas con los movimientos superfluido y normal no son iguales. La relación entre ellas depende de la temperatura. Cuanto más baja es la temperatura, tanto mayor es la parte superfluida de la masa de helio. A la temperatura de cero absoluto todo el helio se hace superfluido. A medida que aumenta la temperatura va siendo cada vez mayor la parte de helio que se comporta normalmente, y a la temperatura de 2,19 °K todo el helio se hace normal, es decir, adquiere las propiedades de líquido ordinario.

§ 245. Condiciones de estabilidad del estado de una fase

En unas condiciones el cuerpo es líquido, en otras, sólido. ¿De qué depende esto? Existen dos tendencias que determinan el carácter del estado en unas condiciones exteriores dadas. La primera de ellas es la tendencia del cuerpo a tener la menor energía posible, la segunda, la tendencia a tener la mayor entropía. La primera tendencia es consecuencia de que todo sistema de moléculas se comporta con respecto a la energía como cualquier sistema de puntos materiales sometidos a las leyes de la mecánica de Newton, y un sistema mecánico, como sabemos, tiende a tener el mínimo de energía potencial. La segunda tendencia se deduce del segundo principio de la termodinámica.

En la transición de gas a líquido y a sólido, la energía interna disminuye. En efecto, la energía del gas es mayor que la del líquido, puesto que para pasar de líquido a gas hay que realizar un trabajo para vencer las fuerzas de cohesión entre las moléculas. La energía del cristal es menor que la del líquido a causa de que la disposición ordenada de las partículas que interaccionan es más estable que la desordenada. Esto puede demostrarse rigurosamente, pero no vamos a reproducir la demostración. La cuestión parece evidente en gran medida. Figurémonos, por ejemplo, una red regular de esferas sujetas entre sí por muelles. Cualquier desplazamiento de una esfera cualquiera requiere cierto trabajo. Esto quiere decir, que a la disposición ordenada le corresponde el mínimo de energía.

Un comportamiento inverso se tiene en la entropía. En términos aproximados, la entropía de un cuerpo será tanto mayor cuanto

mayor sea la libertad de movimiento de las partículas que lo componen. La alteración del orden arrastra un aumento de la entropía, el alejamiento de las partículas también está relacionado con el aumento de la entropía.

Por lo tanto, el estado más conveniente para una presión y temperatura dadas se establece como un compromiso entre la entropía y la energía. Pero esta afirmación no puede satisfacernos. Es preferible darle un carácter cuantitativo. Esto se puede hacer basándose en el segundo principio.

Figurémonos que un cuerpo se encuentra en condiciones «extrañas», es decir, el hielo en las condiciones de existencia del agua o el agua en las condiciones de existencia del vapor. En este caso comienza una transición de fase irreversible: la fusión o la vaporización. Esta transición se efectuará de acuerdo con el segundo principio de la termodinámica, a saber: el aumento de la entropía del cuerpo será mayor que el calor reducido que se le aplica,

$$dS > \frac{dQ}{T}.$$

Aplicando el primer principio de la termodinámica, escribamos esta igualdad de la forma

$$dS > \frac{dU + p\,dv}{T} \quad \text{y} \quad dU - T\,dS + p\,dv < 0.$$

Teniendo en cuenta que la transición de fase se efectúa a temperatura invariable, obtenemos:

$$d\,(U - TS) + p\,dv < 0.$$

Si el proceso transcurre a volumen constante, el paso al estado de equilibrio se efectuará siendo $d\,(U-TS) < 0$, es decir, con disminución de la magnitud $F = U - TS$. Esta función se llama *energía libre*. Hemos demostrado que una transición de fase espontánea se efectúa con disminución de la energía libre o, en otros términos, que la energía libre del estado estable debe ser mínima.

Si el proceso se desarrolla a presión constante, el paso a la fase en equlibrio se efectúa siendo $d\,(U-TS+pv) < 0$, es decir, con disminución de la magnitud $\Phi = U - TS + pv$. Esta función recibe el nombre de *potencial termodinámico*. De este modo, a presión constante, la transición de fase se realiza con disminución del potencial termodinámico y, por consiguiente, este potencial tendrá su valor mínimo en el estado de equilibrio.

La competencia entre la entropía y la energía interna se ve perfectamente en estas afirmaciones: la disminución de la energía y el aumento de la entropía conducen a la disminución de la energía libre o del potencial. En las leyes de la tendencia de F y Φ al mínimo, estas dos tendencias tomaron una expresión cuantitativa.

La condición de equilibrio de fases que hemos enunciado tiene muchas aplicaciones. Resolvamos, por ejemplo, el siguiente problema: ¿de qué depende la pendiente de la curva de equilibrio de fases?

Señalemos en la curva dos puntos cuyas condiciones externas sean T_1, p_1 y T_2, p_2. Las condiciones de equilibrio para estos puntos tienen la forma

$$\Phi_1(T_1, p_1) = \Phi_2(T_1, p_1) \quad \text{y} \quad \Phi_1(T_2, p_2) = \Phi_2(T_2, p_2).$$

Los subíndices de Φ se refieren a las fases que se encuentran en equilibrio. Restando la primera ecuación de la segunda, obtenemos:

$$\Phi_1(T_2, p_2) - \Phi_1(T_1, p_1) = \Phi_2(T_2, p_2) - \Phi_2(T_1, p_1).$$

Supongamos que los dos puntos tomados están próximos el uno al otro. En este caso, aplicando la fórmula del incremento de las funciones de dos variables, la última igualdad toma la forma

$$\frac{\partial\Phi_1}{T}dT + \frac{\partial\Phi_1}{p}dp = \frac{\partial\Phi_2}{T}dT + \frac{\partial\Phi_2}{p}dp.$$

Sustituyendo los valores de las derivadas de la función $\Phi = U - TS + pv$, es decir, $\partial\Phi/\partial T = -S$ y $\partial\Phi/\partial p = v$, obtenemos:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{S_1 - S_2}{v_1 - v_2} = \frac{\Delta S}{v_1 - v_2}.$$

Pero $\Delta S = \Delta Q/T$, por lo tanto,

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta Q}{T(v_1 - v_2)} \text{ (ecuación de Clapeyron — Clausius).}$$

De este modo, la inclinación de la curva $\left(\text{la derivada } \frac{dp}{dT}\right)$ viene determinada por el calor latente de fusión ΔQ, la temperatura de transición de fase T y la diferencia de volumen de las fases. Si ΔQ es positiva, esto significa que el subíndice 1 se refiere a la fase de temperatura más alta.

Apliquemos la ecuación de Clapeyron — Clausius al caso de la fusión del hielo. En la fusión, de 1,091 cm³ de hielo se obtiene 1 cm³ de agua. La variación de volumen es $v_1 - v_2 = -0{,}091$ cm³ (el volumen disminuye). ΔQ será en este caso el calor de fusión, igual a 80 cal/g. La temperatura $T = 273$°K. Entonces

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T\cdot\Delta v}{\Delta Q} = \frac{273\cdot(-0{,}091)}{80} = -0{,}31\ \frac{°\text{K}\cdot\text{cm}^3}{\text{cal}}.$$

La dimensión del resultado obtenido oscurece algo su sentido. Pasemos de las calorías a las atmósferas, recordando que 1 cal=42,7 kgf·cm≈42,7 atm·cm³.

Haciendo las sustituciones, obtenemos:

$$\frac{dT}{dp} = -0{,}0075 \frac{°K}{atm}.$$

Por lo tanto, el aumento de la presión en 1 atm hace descender el punto de fusión del hielo en 0,0075 grados.

§ 246. *Estados metaestables*

Algunos hechos han quedado fuera de los límites de la explicación termodinámica que hemos dado de los fenómenos de las transiciones de fase. En efecto, desde el punto de vista de la termodinámica, para unos valores dados de p y T sólo es posible un estado (se trata del punto del campo del diagrama de estado), en el cual la energía libre (o el potencial termodinámico) toma el valor mínimo. Sin embargo, pueden existir juntos el grafito y el diamante; en las condiciones de existencia del hielo se puede obtener agua (agua sobreenfriada o sobrefundida). Se pueden citar otros muchos ejemplos que infringen las leyes termodinámicas que hemos descrito. El problema consiste en que, además de los estados, estables para unas condiciones exteriores dadas, pueden existir los llamados estados metaestables.

El estado metaestable no posee el mínimo de energía libre, pero el paso desde este estado al de energía mínima es difícil. El grado de estabilidad del equilibrio metaestable puede ser muy diverso. A veces para la transición al estado «correcto» basta un ligero impulso, en otros casos la estabilidad práctica del estado metaestable puede ser tan grande como la del estado «correcto».

Conviene señalar que no todas las detenciones en las transiciones de fase son posibles. Así, el agua se puede sobreenfriar, es decir, a la presión normal puede haber agua a una temperatura inferior a 0° C; el agua también se puede sobrecalentar, es decir, elevar su temperatura por encima de 100° C sin que hierva. Así mismo puede obtenerse vapor en condiciones impropias para él, por ejemplo, sobreenfriándolo; este vapor se llama sobresaturado. Siempre se producen demoras en las transiciones en la fase sólida, es decir, el cristal de una modificación se retrasa en transformarse en cristal de la segunda modificación, aunque se encuentre en las condiciones de estabilidad de dicha segunda modificación.

Se destaca una transformación, la de fusión. Esta transición no se consigue retener en ningunas condiciones; por lo tanto no existe ningún cristal en las condiciones en que es estable el líquido.

En particular nos encontramos con líquidos sobreenfriados. Ciertos líquidos (la glicerina) aumentan considerablemente de viscosidad al sobreenfriarse y pueden encontrarse en estado amorfo

durante meses y años. Un ejemplo de líquido sobreenfriado es el vidrio.

Para convencerse de que existe el estado metaestable hay que poner el líquido en contacto con el cristal. Si el líquido está sobreenfriado, la cristalización comenzará inmediatamente. El efecto será extraordinariamente impetuoso si el sobreenfrimiento es fuerte. Cuando se sobreenfria agua y se echa en ella un copo de nieve, desde diversas partes empiezan a crecer con enorme rapidez agujas de hielo y al cabo de unos instantes termina la transformación en todo el volumen.

Tienen especial interés los retrasos en las transformaciones cristal — cristal. En este caso el retraso puede ocurrir en ambos sentidos. El azufre amarillo debe transformarse en rojo a 95,5 °C. Pero si se calienta rápidamente, este punto de transición puede «pasarse» y hacer llegar el azufre hasta la temperatura de fusión, 113° C. Empecemos ahora a enfriar el azufre fundido. A 113 °C empiezan a crecer cristalitos de azufre rojo. El enfriamiento no ocasiona la transformación no sólo a 95,5°C, sino que a la temperatura ambiente podemos durante bastante tiempo disponer de cristalitos rojos. No obstante, aunque despacio, la transformación se va produciendo y, al cabo de veinticuatro horas, termina; nos encontramos con polvo amarillo.

Aquí también puede fácilmente ponerse de manifiesto el estado metaestable poniendo en contacto los cristalitos.

En ciertos casos nos encontramos con fases de sustancias que deberían existir a unas temperaturas completamente diferentes. Por ejemplo, el estaño blanco, que se transforma en gris al bajar la temperatura a 13° C. Generalmente manejamos el estaño blanco, y sabemos que en invierno no le ocurre nada. Sobreenfriamientos de 20—30 grados los aguanta perfectamente el estaño blanco, y únicamente en las condiciones de inviernos rigurosos comienza a transformarse en gris. (La ignorancia de este hecho fue fatal para la expedición de R. Scott al Polo Sur. El combustible líquido que llevaba dicha expedición iba en recipientes soldados con estaño. Con los grandes fríos el estaño blanco se convirtió en polvo gris, los recipientes se desoldaron y el combustible se derramó).

Para comprender las causas del retardo de la transformación hay que razonar acerca de la diferencia que hay entre la transición líquido — cristal y cristal — cristal, por una parte, y cristal — líquido, por otra. En el último caso desaparece la ordenación remota en la disposición de los átomos, en los dos primeros se crea de nuevo. Para la desaparición del orden de largo alcance no hacen falta grandes esfuerzos. La fusión comienza desde la superficie; los átomos, uno tras otro, se van separando de sus vecinos y saliendo de la rigurosa formación.

En la cristalización, la ordenación próxima se transforma en remota. El proceso comienza en la superficie y debe ir hacia el interior de la sustancia. Los átomos (o moléculas) se ven «obligados» a establecer un orden riguroso en las condiciones de una estrechez límite. Se requieren movimientos coordinados para que dicho orden pueda establecerse. Aún más difícil es la tarea de reconstruir el orden atómico, que, como hemos visto, requiere de los átomos desplazamientos «organizados» desde unas posiciones a otras.

Las transformaciones en el estado sólido comienzan siempre en los límites de los granos, bloques, en las dislocaciones, en los huecos, concretamente, donde hay más sitio. En cuanto varias decenas de átomos ocupan la posición correspondiente al nuevo orden, se produce sucesivamente el crecimiento orientado del embrión, al cual comienzan a pasar uno tras otro los átomos, procedentes del orden antiguo y menos conveniente o (en la cristalización) del desorden. En esta misma influencia orientadora consiste también la acción del cristalito, cuya presencia pone fin al sobreenfriamiento.

§ 247. Transformaciones gas⇄líquido

La evaporación consiste en el desprendimiento de las moléculas más rápidas de la superficie del líquido. De aquí se deducen evidentemente dos leyes: la evaporación aumenta al elevarse la temperatura, y la evaporación requiere suministro de calor. Si las moléculas que se evaporan se apartan continuamente de la superficie, el proceso de evaporación seguirá hasta que todo el líquido se transforme en vapor.

Consideremos la evaporación que tiene lugar dentro de un recipiente cerrado. En este caso, junto con el fenómeno del desprendimiento de las moléculas de la superficie del líquido, se produce el proceso inverso, es decir, el de transformación de las moléculas de vapor en líquido. El proceso de evaporación continuará, en este caso, hasta que se establezca el equilibrio móvil característico de la temperatura dada. Está claro que el líquido puede evaporarse totalmente antes de llegar al equilibrio con el vapor.

Si se alcanza el equilibrio, se dice que el vapor está saturado. La presión del vapor saturado, de acuerdo con la curva de equilibrio de fases, será función de la temperatura. Variando la temperatura evaporaremos una cantidad adicional de líquido en el recipiente o, al contrario, condensaremos cierta cantidad de vapor. Al hacer esto variará la presión del vapor.

Se comprende perfectamente por qué aumentan la densidad y la presión del vapor saturado al elevarse la temperatura. Cuando la

energía cinética del movimiento de las moléculas aumenta, el número de moléculas que se desprenden del líquido crece bruscamente. Al mismo tiempo, el número de moléculas que retornan al líquido casi no depende de la temperatura, ya que para el paso de las moléculas de vapor al agua no se necesita energía.

La densidad de los vapores saturados a una misma temperatura es muy diferente para distintas sustancias. La densidad del vapor de agua saturado a la temperatura ambiente es igual a 13 mm, mientras que la densidad del vapor de mercurio saturado es de sólo 0,005 mm.

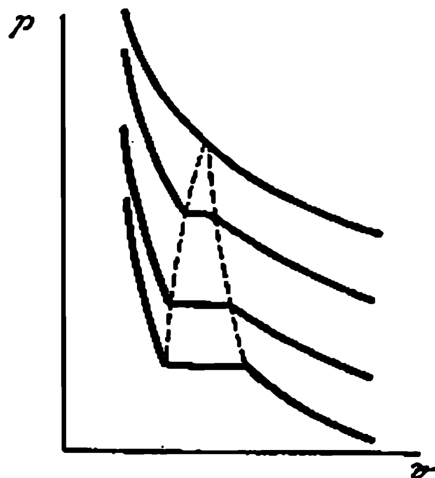


FIG. 281.

Una idea clara de los procesos de transición del gas a líquido nos la formamos estudiando la compresión isotérmica del gas, es decir, los procesos «verticales» del diagrama de estado. Para poder ver las variaciones de volumen, que no se reflejan en el diagrama de estado, construiremos una gráfica adicional, en la cual representaremos las variaciones de la presión en función del volumen (fig. 281).

Si la compresión del gas se efectúa a una temperatura suficientemente baja, más temprano o más tarde llegaremos al punto de interacción con la curva de equilibrio de fases. En este punto aumenta la presión hasta una magnitud igual que la presión del vapor saturado a la temperatura del experimento. Aparecen las primeras gotas de líquido. Hasta que no termine la transformación del vapor en líquido, el movimiento del émbolo compresor no irá acompañado de variación de la presión, puesto que tanto al principio como al final de la condensación nos hallamos en un mismo punto del diagrama de estado. En cuanto se refiere a la curva en el diagrama presión — volumen, ésta será horizontal hasta el final de la condensación.

Los puntos del trozo rectilíneo de esta gráfica tienen un sentido claro: caracterizan el sistema de dos fases agua — vapor. Cada punto de este trozo rectilíneo corresponde a un determinado porcentaje de contenido de las fases, que es fácil de hallar por la regla de la «palanca». En efecto, llamemos v_1 al volumen del líquido y v_2 al volumen del vapor. Si la parte de sustancia que se halla en estado líquido es x, el volumen de la mezcla será

$$v = xv_1 + (1 - x)\,v_2.$$

De aquí,

$$x = \frac{v_2 - v}{v_2 - v_1},$$

que da la regla de la «palanca».

Una vez que termina la condensación, la curva se eleva con mucha pendiente, ya que la compresibilidad del líquido es muy pequeña.

Aumentemos ahora la temperatura del experimento y construyamos, en la misma gráfica, la isoterma siguiente. Esta será casi igual que la anterior, pero observaremos una diferencia importante: la condensación empieza más tarde, porque, a temperatura más alta, la presión del vapor saturado es mayor. Además, la condensación termina antes, ya que, debido a la expansión térmica del líquido, el émbolo no llega a la posición de antes.

Si se sigue aumentando la temperatura, construiremos una serie de isotermas en las cuales los trozos horizontales del sistema de dos fases serán cada vez más cortos. En fin de cuentas desaparece por completo este trozo. La disminución del trozo horizontal es el fenómeno de la aproximación de los volúmenes específicos del líquido y el vapor. A una temperatura crítica estos volúmenes se igualan y la isoterma pierde su tramo horizontal. En el diagrama presión — volumen, el punto crítico se determina sin dificultad como vértice de la región de dos fases perfilada por la línea de puntos. En el diagrama de estado, el punto crítico es aquel en que se interrumpe la curva del equilibrio de las fases líquido — vapor.

Las isotermas para temperaturas más altas se parecerán cada vez menos a curvas quebradas y se irán aproximando a las hipérbolas del gas perfecto.

El hecho de que exista el punto crítico demuestra la afirmación antes hecha acerca de la inexistencia de una diferencia esencial entre el gas y el líquido. Vemos que es posible la transición continua del estado líquido al gaseoso (evitando el punto crítico) sin que se produzca ninguna transformación de fase.

§ 248. Licuefacción de los gases

Si una sustancia se comprime a temperatura superior a la crítica, no se consigue licuarla. A alta presión se logra que la sustancia llegue a tener una densidad bastante elevada y que sus moléculas entren en contacto. Pero un líquido, en el sentido que ordinariamente se le da a esta palabra, no se puede obtener. No se consigue un líquido que pueda vertirse en un vaso, un estado de la sustancia que tenga volumen propio. Esto se debe a que durante la compresión no se llegó a cruzar la curva de equilibrio de fases.

La ausencia de este cruce indica que no podemos obtener el sistema de dos fases líquido — gas. Y esto significa que es imposible conseguir un líquido que ocupe un volumen determinado y no todo el espacio de que disponga.

Para licuar los gases hay que realizar la compresión a temperaturas inferiores al punto crítico. La tarea no es difícil si estas temperaturas pueden conseguirse por intercambio de calor con cuerpos fríos. Pero las temperaturas críticas del oxígeno, del nitrógeno y del hidrógeno son muy bajas. Para licuar estos gases hay que recurrir al enfriamiento que se obtiene por el proceso de Joule — Thomson o al enfriamiento adiabático.

Cuando se utiliza el primero de estos procedimientos, el gas se comprime en un compresor y se hace pasar por un refrigerador Después pasa el gas por un serpentín y al salir por un orificio, que desempeña el papel del tabique en el experimento de Joule — Thomson (véase la pág. 183), se expande hasta la presión atmosférica Con esto se enfría el gas y se eleva después enfriando a su vez al serpentín; de este modo, la siguiente porción de gas que salga del serpentín estará más fría que la primera. Por fin, el gas se transforma en líquido.

El otro procedimiento de licuefacción del gas consiste en utilizar un expansor. En el expansor de émbolo el gas se expande adiabáticamente, realiza el trabajo de subir el émbolo y sale del cilindro enfriado. Haciendo que la primera porción del gas enfríe a la siguiente, por este procedimiento se puede conseguir que la temperatura llegue a — 150 °C. El enfriamiento ulterior se ve dificultado por la falta de lubricantes apropiados que permitan que el émbolo se mueva por la pared del cilindro con poco rozamiento. La solución de este problema fue hallada por P. L. Kapitsa, que proyectó la turbina refrigeradora o turboexpansor. La turbina se hace girar por el gas que llega de un compresor. El gas se expande adiabáticamente, se enfría y refrigera a la siguiente porción de gas. Las dificultades de la lubricación se evitan fácilmente sacando los cojinetes que hay que lubricar fuera de los límites del espacio frío.

§ 249. *Transformaciones gas ⇄ cristal*

Cuando se dice que una «sustancia se vaporiza», se entiende, por lo general, que se evapora el líquido. La vaporización de los cuerpos sólidos se llama sublimación. Uno de los ejemplos más conocidos de vaporización de sólidos es la sublimación de la naftalina.

Toda sustancia sólida olorosa se sublima en grado considerable. El olor es producido por las moléculas que se desprenden de la

sustancia y llegan a nuestro órgano del olfato. En la mayoría de los casos la sustancia se sublima en un grado insignificante, a veces es tan poco que no puede descubrirse ni con investigaciones muy meticulosas. Sin embargo, en principio, cualquier sustancia sólida (literalmente todas, incluso el hierro o el cobre) se vaporizan. Si no notamos la sublimación es porque la densidad del vapor saturado es completamente insignificante. Esta última circunstancia parece bastante natural: el movimiento de los átomos y las moléculas del sólido es muy ordenado y son poco probables los casos fortuitos en que las moléculas pueden ser arrancadas de la superficie de dicho sólido.

La densidad del vapor saturado que se encuentra en equilibrio con el sólido aumenta al elevarse la temperatura. Puede comprobarse que una serie de sustancias que poseen olor penetrante a la temperatura ambiente, lo pierden a bajas temperaturas. En la mayoría de los casos no se puede aumentar considerablemente la densidad del vapor saturado del sólido por una razón sencilla: la sustancia se funde antes.

La obtención de cristales de los vapores se emplea frecuentemente como procedimiento para preparar cristales muy puros. Con este fin se hace, por ejemplo, que el vapor se deposite sobre un vidrio ligeramente enfriado.

§ 250. Transformaciones líquido $\rightleftarrows$ cristal

La transición del estado líquido al sólido (cristalización) y viceversa (fusión) consiste en una reestructuración fundamental de las partículas. Durante la fusión desaparece el orden de largo alcance en la disposición de las moléculas o los átomos.

A una presión, la fusión se produce a una temperatura rigurosamente determinada. Al ocurrir esto, las oscilaciones de los átomos o de las moléculas se hacen tan considerables, que el mantenimiento del orden remoto es imposible.

Si se retrasa el suministro de calor, a la temperatura de fusión, el líquido y el cristal pueden encontrarse en estado de equilibrio, lo mismo que sucede en el caso del líquido y el vapor saturado. El cristal ni crecerá ni se fundirá.

La presión exterior varía la temperatura de fusión. Por regla general, la temperatura de fusión aumenta al elevarse la presión, es decir, la fusión se dificulta. No obstante, existe un número pequeño de excepciones de esta regla general. Entre ellas figura el hielo. La fundición del hielo se facilita aumentando la presión. Si retornamos a los diagramas de estado, el comportamiento normal y anómalo de los cuerpos puede definirse así: por lo general $\frac{dp}{dT}>0$,

es decir, la curva de equilibrio forma un ángulo agudo con el eje de temperaturas. En el caso anómalo $\frac{dp}{dT}<0$ y dicha curva forma un ángulo obtuso con el eje de abscisas. El extraño comportamiento del hielo se debe a otra anomalía suya: a diferencia de la mayoría de los sólidos, el hielo es más ligero que el agua. La relación entre estas dos anomalías se obtiene de la ecuación antes deducida: $\frac{dp}{dT}=\frac{Q}{T(v_1-v_2)}$. Es evidente que, en estas condiciones, la presión que crea la condensación debe favorecer la fusión. La relación entre las dos anomalías es completamente natural. Figurémonos un líquido y un cristal que se hallan en estado de equilibrio de fases. Aumentemos la presión sin variar la temperatura. Los átomos deben aproximarse entre sí. Si el sólido es más denso, el líquido pasará a ser cristal. Pero si el líquido es más denso se producirá la transición inversa.

Las anomalías del agua desempeñan un papel de enorme importancia en nuestra vida. Gracias a ellas los ríos no se hielan hasta el fondo. Las anomalías del hielo (y de otros cuerpos anómalos en este sentido) se deben a su vez a su estructura. Los cristales de hielo no cumplen la ley del empaquetamiento denso de las partículas. Por esto la infricción del orden de largo alcance no conduce a una disminución (como de ordinario), sino a un aumento de la densidad.

Retornemos a la fig. 264 (pág. 669). Los amplios canales del hielo pueden, ensanchándose un poco, dar cabida a una molécula de agua. Al fundirse el hielo, la molécula «cae» en este canal. En estas condiciones está claro que aumentará la densidad. Como el calor o la temperatura de fusión dependen de muchos factores estructurales, hasta ahora no existe una teoría que permita predecir estos parámetros. El primero es más fácil de determinar, ya que la temperatura de fusión es el cociente de dividir el calor de fusión por la entropía de fusión.

Una característica de las fuerzas de enlace entre las moléculas o átomos del cuerpo sólido, es, claro está, el calor de sublimación (es decir, la energía necesaria para romper los enlaces intermoleculares), pero no el calor de fusión (energía necesaria para romper el orden remoto).

Como se dijo anteriormente, la fusión del cristal se efectúa sin retraso. Por el contrario, la cristalización puede retrasarse y, a veces, no producirse en absoluto. Para que comience la cristalización, en el líquido debe aparecer un germen o núcleo, es decir, un sistema de decenas de átomos o moléculas que hayan tomado la disposición que existe en el cristal. Además, en el líquido deben darse las condiciones que favorecen el crecimiento de este germen. En la mayoría de los líquidos no se consigue retrasar considerablemente el pro-

ceso de formación del germen. En todo caso, para conseguir este retraso hay que llevar a cabo el enfriamiento con mucho cuidado: hay que impedir que en el líquido caigan partículas de polvo y evitar toda clase de obstáculos, como oscilaciones, vibraciones del recipiente, etc.

Cuando las sobresaturaciones son suficientemente grandes, evitar la formación espontánea de los gérmenes, es decir, la estabilización de grupos de átomos o moléculas adecuados para la cristalización, es probablemente imposible. Pero puede ocurrir otra cosa. Al descender la temperatura puede disminuir tanto la movilidad de las partículas, que la velocidad de crecimiento de los gérmenes del cristal se anula prácticamente. En este caso se producen los vidrios. Los cristales crecerán siempre, si en el líquido que se halla en condiciones de equilibrio termodinámico con el cristal hay pequeños cristalitos («semillas»). Valiéndose de «semillas» se cultivan cristales con fines industriales.

Si el calor se extrae muy despacio (unas fracciones de grado por día) y si la «semilla» se hace girar dentro del líquido, el cristal crece por un número pequeño de sus posibles caras. Como es natural, crecen aquellas caras que poseen la energía superficial mínima. Estas son siempre las caras cuyos índices se expresan por números simples. Con mucha frecuencia se forman las caras cuya densidad superficial de ocupación por los átomos o moléculas es la mayor. Cuáles son precisamente las caras del cristal que crecerán, es una cuestión difícil de resolver de antemano, tanto más si se tiene en cuenta que esto depende de muchas circunstancias secundarias (y, además, nosotros no nos referimos al crecimiento de los cristales de las disoluciones, que tiene ciertas peculiaridades). Puede afirmarse, sin embargo, que un cristal que esté en equilibrio con la masa fundida (lo mismo que con su solución), debe tomar la forma cuya energía superficial sea mínima.

El mecanismo de crecimiento del cristal consiste en la incorporación sucesiva de cada partícula a aquel punto del cristal en que las fuerzas de cohesión sean máximas y, por consiguiente, la energía potencial, mínima. La fig. 282 muestra tres posibilidades de incorporación de un átomo al cristal en formación. En la posición A las fuerzas de atracción que actúan sobre el átomo son mayores que en la posición B, y en B, mayores que en C. Por esto las moléculas o los átomos poblarán siempre con más facilidad los planos cuya construcción ya está iniciada que los que hay que construir de nuevo.

Los cálculos demuestran que, en ciertos casos, el principio de la construcción de un nuevo plano implica la superación de unas dificultades tan grandes, que hacen incomprensible el propio hecho del crecimiento del cristal. En este caso pasa a primer plano el

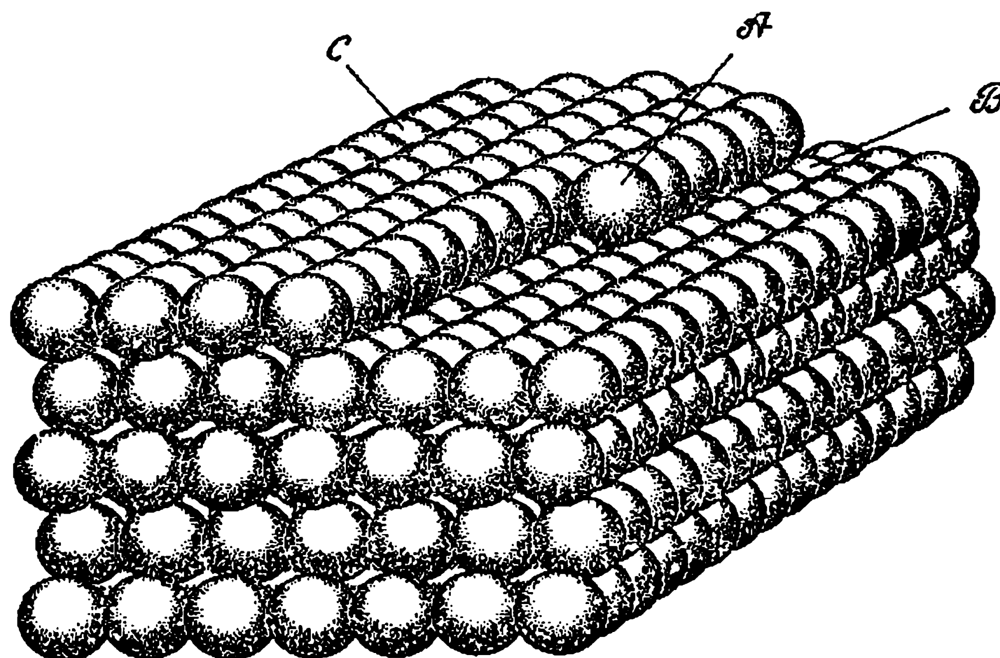


FIG 282.

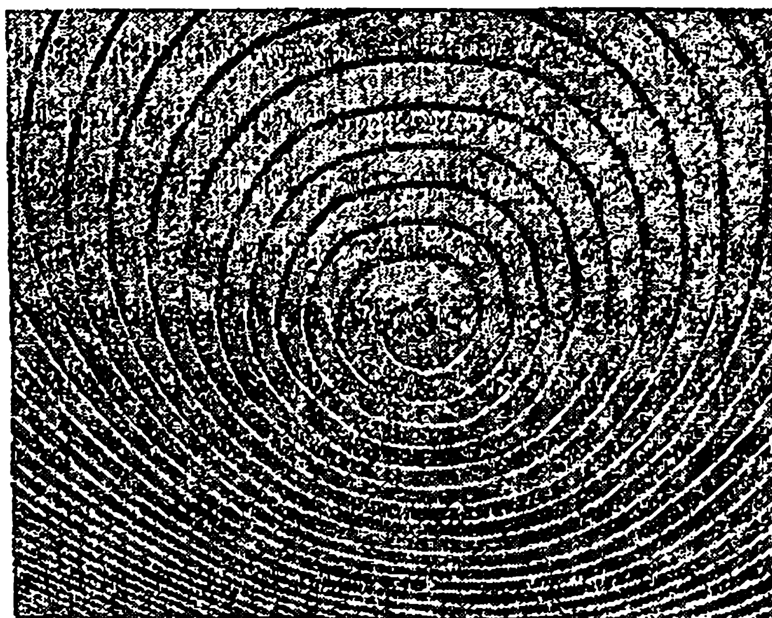


FIG 283.

mecanismo de crecimiento en espiral. Como se ve claramente en el esquema de la fig. 272, el crecimiento en espiral dura tanto como sea necesario y los nuevos átomos y moléculas se incorporan siempre en puntos convenientes desde el punto de vista energético. De este modo no hay necesidad de comenzar a edificar una nueva capa. El principio del crecimiento en espiral da una construcción errónea, llamada *dislocación helicoidal* o *en espiral*. Este «error» puede deberse probablemente a una inclusión extraña pequeñísima. La parte de la superficie de un cristal que ha crecido en espiral se muestra en la fig. 283.

§ 251. *Transformaciones cristal* $\rightleftarrows$ *cristal*

Una transformación en la fase sólida es una transición de un orden de largo alcance a otro orden también de largo alcance. El estudio del mecanismo de estas transformaciones tiene gran interés.

El cuadro más sencillo de transformación de una fase sólida en otra es el que ofrecen las sustancias simples cuando la estructura de ambas fases pertenece al número de los empaquetamietos densos de esferas. Así, el cobalto y el talio se encuentran tanto en la forma de empaquetamiento cúbico como en la de empaquetamiento hexagonal. Trasladando una capa puede hacerse que pase de la posición «hexagonal» a la «cúbica» y viceversa.

En transformaciones de este tipo, de un cristal de fase cúbica se consiguió incluso cultivar un cristal aislado de fase hexagonal. Generalmente esto no se consigue: el crecimiento de los cristales de la nueva fase empieza simultáneamente en muchos centros; el monocristal se transforma en una sustancia microcristalina. Lo más frecuente es que el cristal se desmorone durante la transformación. A veces se conserva la «envoltura» exterior y la sustancia microcristalina ocupa el volumen simétrico, rigurosamente regular, del poliedro peculiar del que fue monocristal.

La causa de la dificultad es comprensible. Los cristales de la nueva fase pueden comenzar a crecer desde puntos distintos. Pero en el empaquetamiento cúbico centrado en las bases se pueden trazar cuatro sistemas de capas más densas. Volvamos a la fig. 261 (pág. 667); en el cristal que reproduce la figura, los planos más densos son perpendiculares a las diagonales expaciales, que en total son cuatro (puesto que el cubo tiene ocho vértices). Si esto es así, de un cristal de empaquetamiento cúbico pueden crecer cristales hexagonales con cuatro orientaciones diferentes.

Las bases para el estudio de la reestructuración de los átomos en las transiciones de fase fueron sentadas por el físico soviético Georgui V. Kurdiúmov en su trabajo dedicado a las transformacio-

nes del hierro y del acero. A altas temperaturas el hierro existe en forma de empaquetamiento cúbico denso de átomos. A temperaturas bajas los átomos de hierro se sitúan en una red centrada en el cuerpo. Esta transformación (llamada «martensítica») tiene enorme importancia para la metalurgia*) y por esto merece ser estudiada detalladamente.

¿Qué ocurre cuando se eleva la temperatura? La respuesta a esta pregunta la dan los esquemas que se ven en la fig. 284. A la

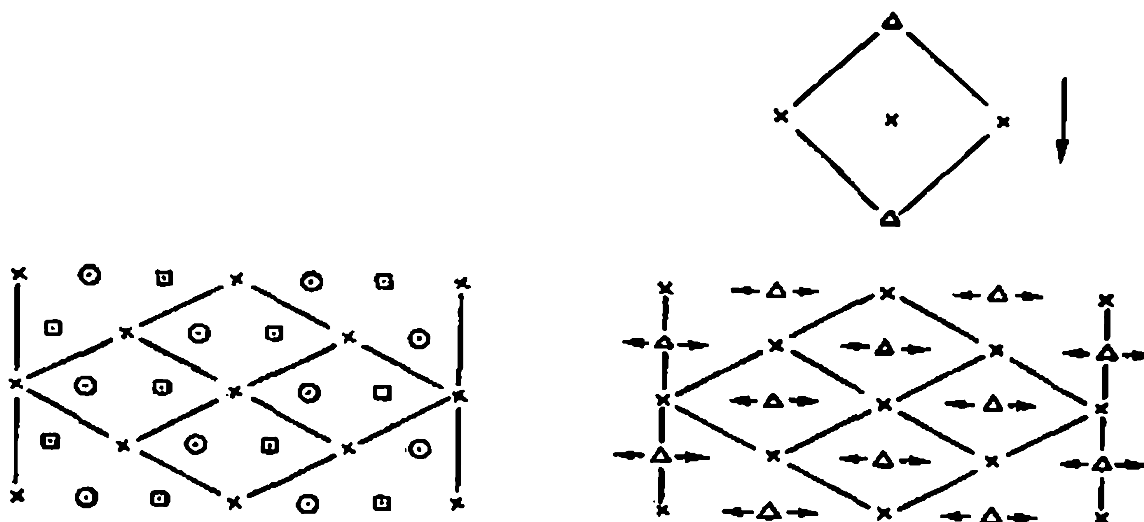


FIG. 284.

izquierda se representa una vez más el empaquetamiento cúbico denso, y a la derecha, el empaquetamiento centrado en el cuerpo visto de una forma que no es la ordinaria; se ve la disposición de los átomos proyectada tal como aparece cuando se mira a lo largo de las diagonales de las caras del cubo. Entre estas figuras, al parecer, hay poco de común. La estructura de la izquierda es de tres pisos, la de la derecha, de dos pisos (los triangulitos son el segundo piso); ésta es la diferencia principal. Otra diferencia menos importante es la de los ángulos de los rombos (en la figura no se ve). A medida que se va calentando el acero, las oscilaciones de los átomos aumentan y el empaquetamiento centrado en el cuerpo, menos denso, se hace desventajoso a la temperatura de 906 °C. La estructura de dos pisos se transforma en la de tres por desplazamiento alternativo de las capas señaladas con triangulitos. Por ejemplo, las capas impares se desplazan hacia la izquierda, y las pares, hacia la derecha. Este desplazamiento se efectúa a lo largo de la diagonal del rombo, y al mismo tiempo varía el ángulo de éste.

*) El templado del acero no es otra cosa que la transformación martensítica.

En la transformación de fase del hierro, los cristalitos de la nueva fase pueden estar orientados en 24 direcciones diferentes. El número 24 se obtiene del modo siguiente. En el cristal cúbico centrado en las bases hay cuatro planos más densos, mientras que el cristal de la nueva fase, como puede demostrarse sin dificultad, crece en una capa más densa en seis orientaciones diferentes.

No cabe duda de que en el paso de un orden a otro orden, los procesos regulares ordenados desempeñan un papel importante. Con esta reestructuración del orden, los átomos no tienen que cambiar de sitio, sólo se produce cierta traslación organizada de todos ellos. En esto consiste la transformación martensítica, sin difusión. Pero en otras transformaciones en el sólido, pueden desempeñar un gran papel los fenómenos de difusión.

§ 252. Difusión en los sólidos

La difusión de átomos extraños en un sólido es conocida desde hace mucho tiempo por los técnicos. La capa superficial de un acero se puede saturar de carbono (cementación), nitrógeno, boro. La difusión alcanza gran profundidad y observarla no ofrece dificultad. A la temperatura de 200—300 °C, la plata penetra en cantidades considerables en el plomo hasta una profundidad de varios centímetros en una hora.

Pero en un cristal pueden trasladarse no sólo los átomos extraños. Un átomo de hierro puede trasladarse por un cristal de hierro, el cobre se traslada en el cobre. Si a un trozo de cobre ordinario se aprieta otro de cobre radiactivo, al cabo de poco tiempo se nota que el cobre ordinario se ha «contagiado» de radiactividad. El método de los átomos trazadores da la posibilidad de estudiar la difusión de los átomos «propios» con la misma eficacia que la difusión de los «extraños».

La difusión es posible en virtud de las oscilaciones térmicas. En el instante en que un átomo se apartó de su posición de equilibrio, el átomo vecino pasa a su puesto. Cuando el primer átomo retorna, ocupa el sitio que ha quedado libre. De este modo los átomos cambian de sitio. Está claro que este cambio no es fácil de hacer si en él sólo toman parte dos átomos. En la difusión de los átomos en un sólido — cuando cambian de sitio dos átomos — toma parte todo un grupo de átomos. El átomo se desliza hacia adelante sólo cuando las oscilaciones térmicas de muchos átomos crean casualmente las condiciones favorables para esto.

Es indudable que en los fenómenos de difusión desempeñan un gran papel las dislocaciones de todo género, las cavidades y las grietas que siempre hay en el cristal. La existencia de un puesto

libre ayuda al átomo a moverse paso a paso por la red, «empujando» hacia el vacío al átomo que impide su avance.

Si el átomo extraño es de tamaño pequeño, puede trasladarse por la red sin intercambio de sitios. Cuando las condiciones son propicias, este átomo puede deslizarse desde un hueco del empaquetamiento denso de esferas al hueco vecino.

La difusión es un efecto recíproco. Si apretamos una lámina de zinc contra una de cobre, los átomos de zinc penetrarán en el cobre y los de cobre, en el zinc. No obstante, las velocidades de estos flujos opuestos pueden ser muy distintas.

La difusión de los átomos en el cristal depende de muchos factores. Es interesante el hecho siguiente: el proceso de difusión se desarrolla con la máxima rapidez cuando el átomo «extraño» no se parece en sentido alguno a los átomos del cristal por que se mueve. La difusión más lenta es la de los átomos en su «propio» cristal o en un cristal formado por átomos de la misma columna del sistema periódico de Mendeléiev.

Como ya hemos dicho, la existencia de grietas y deformaciones facilita la difusión. Por esto se comprende perfectamente que en un metal deformado la difusión es más rápida.

La velocidad de difusión depende muy claramente de la temperatura. Esto es comprensible, ya que el coeficiente de difusión (recordamos que éste es el coeficiente de proporcionalidad entre el flujo de sustancia y el gradiente de la concentración) puede representarse siempre por medio de una expresión del tipo

$$Ae^{-U/kT},$$

donde U es la altura de la barrera de potencial que tiene que salvar el átomo en un acto de difusión elemental. La necesidad de esta relación es bastante evidente, puesto que el coeficiente de difusión debe ser proporcional al número de átomos cuya energía es suficiente para saltar la barrera de potencial.

Las alturas de estas barreras son bastante grandes. Para el caso de la autodifusión se encuentran generalmente cerca de 1—2 eV Conviene recordar que kT, a la temperatura ambiente, es igual a $\sim$ 0,03 eV. El número de átomos con energías que superen tanto a la media será insignificante; la difusión no existe prácticamente. Pero a una temperatura del orden de 1000°C el cuadro será otro.

En el párrafo precedente estudiamos las transformaciones cristal — cristal que se desarrollan organizadamente, sin el fenómeno de la difusión. Sin embargo, no debe pensarse que todas las transiciones de fase se efectúan por este procedimiento. Al contrario, cuando la temperatura es suficientemente alta, los fenómenos de intercambio de puestos empiezan a desempeñar un papel bastante importante y las transiciones con carácter organizado sólo

se realizan en pequeñas regiones y hasta pueden ser ocultadas completamente por los fenómenos de intercambio de puestos por los átomos.

Si una transformación en el estado sólido tiene carácter de difusión, se desarrolla a una velocidad del mismo orden que la de los procesos de autodifusión. Las alturas de las barreras de potencial que salvan los átomos durante la reestructuración también son del mismo orden que en los fenómenos de autodifusión.

En cuanto se refiere a los desplazamientos organizados de los átomos del tipo de la transformación martensítica, a pequeñas temperaturas se desarrolla la transformación con una velocidad diez veces mayor que la de los procesos con carácter de difusión.

34

DEFORMACIÓN DE LOS CUERPOS

§ 253. *Propiedades elásticas*

En todo sólido existe una tensión máxima hasta llegar a la cual dicho sólido sólo experimenta deformaciones elásticas. Esto quiere decir, que una vez que se anula la tensión, menor que el límite de elasticidad, el cuerpo retorna a su estado inicial.

Las deformaciones elásticas, como en general todas las deformaciones, se deben a desplazamientos de los átomos (o moléculas). Si el cuerpo se alarga elásticamente, las distancias interatómicas aumentan; si se comprime, los átomos se aproximan entre sí.

La peculiaridad de la deformación elástica es que no altera los enlaces interatómicos ni crea otros nuevos.

Durante la deformación elástica de un cristal todos los átomos conservan sus vecinos. Por ejemplo, durante un deslizamiento elástico se deforma toda la red del cristal en conjunto. Al ocurrir esto ningún átomo cambia su cerco. Esta circunstancia asegura su retorno al estado de equilibrio una vez eliminadas las fuerzas externas.

La variación de las distancias interatómicas que puede alcanzarse en el alargamiento (compresión) elástico es bastante pequeña. El alargamiento relativo límite, de carácter elástico, no es mayor, por regla general, de 0,001. Esto significa que, si las distancias interatómicas son del orden de 2 Å, se consigue desplazar la posición de equilibrio de los átomos en una magnitud no mayor que 0,002 Å. Estas variaciones del período de la red, aunque sean pe-

queñas, pueden ser puestas de manifiesto, aplicando los métodos del análisis de rayos X, por el desplazamiento de los rayos de difracción en los espectrogramas. Para descubrir el efecto se recurre a fotografiar las rayas con grandes ángulos ϑ, ya que (véase la pág. 416) con esta condición pueden revelarse las variaciones pequeñas de las distancias entre los planos.

Un carácter totalmente distinto tiene la deformación elástica de los polímeros, incluidos el caucho y la goma. Las propiedades mecánicas del caucho se diferencian radicalmente de las propiedades de las sustancias cristalinas. La diferencia fundamental consiste en la magnitud del alargamiento elástico. Algunos tipos de caucho pueden alargarse hasta 10—15 veces sin pasar del límite de elasticidad. Esta diferencia, más de 10000 veces mayor que la de un metal, es de por sí significativa. No menos sorprendente es el valor del módulo de elasticidad del caucho. Si un alambre de acero de 1 mm^2 de sección, sometido a la acción de un peso de 1 kgf, se alarga una veintemilava parte de su longitud, un hilo de caucho, de la misma sección y sometido a la misma tracción, se alargará dos veces.

Cuando los polímeros se someten a tracción se originan dos procesos. Primero, los paquetes de moléculas enredados se desarrollan. A la vez que esto ocurre, se produce el empaquetamiento o reunir en orden tridimensional de ciertas partes de los paquetes de cadenas que se desarrollan. El propio hecho de la cristalización durante el estirado desempeña, por lo visto, un papel secundario, ya que cuando se elimina la acción exterior no se consolidan las nuevas regiones ordenadas, sino que desaparecen de nuevo y los paquetes de moléculas vuelven a enrollarse.

El proceso de arrollamiento de los paquetes de moléculas es un fenómeno que se produce con aumento de la entropía (el grado de desorden aumenta). Resulta que la energía interna no varía prácticamente cuando el caucho y los polímeros semejantes a él se deforman elásticamente. Por esto, el trabajo de tracción, que de acuerdo con las leyes fundamentales de la termodinámica es $dA = dU - TdS$ será en este caso simplemente igual a $-TdS$, es decir, directamente proporcional a la temperatura. (Recordamos que el trabajo de las fuerzas externas sobre el sistema se considera negativo). En este sentido, la deformación elástica del caucho es de la misma naturaleza que la compresión isotérmica de un gas (véase la pág. 186).

En cuanto se refiere a las semejanzas entre las deformaciones elácticas de un cristal y del caucho, hay que decir que ninguno de los procesos sume al cuerpo en un nuevo mínimo de energía potencial. En el caso del cristal no ocurre esto porque no salimos del mismo pozo de potencial, y en el del caucho, porque no cambiamos la energía.

§ 254. Propiedades plásticas

DESLIZAMIENTO. La deformación elástica de un cristal consiste en la variación de las distancias intermoleculares conservando cada átomo sus vecinos. La deformación plástica, por el contrario, no desaparece después de eliminar la acción exterior y transcurre siguiendo unos procesos en los cuales los átomos, saltando la barrera de potencial, pasan a otros «pozos de potencial», es decir, cambian de vecinos. El mecanismo fundamental de la deformación plástica es el deslizamiento de un plano atómico sobre otro plano. El elemento de este deslizamiento es la traslación de todos los átomos en un período. Este deslizamiento se nota a simple vista en forma de las llamadas bandas de deslizamiento. El deslizamiento se produce por los puntos más débiles (por donde había grietas u otros defectos) y el cristal se divide en capas llamadas paquetes de deslizamiento. El espesor de estos paquetes es casual, pero por el orden de magnitud se aproxima a décimas de micra. El deslizamiento de planos atómicos de índices diferentes requiere distinta fuerza. Por lo general, el deslizamiento más fácil es el que se produce por los planos más densamente ocupados por átomos. No obstante, los índices de los planos de deslizamiento pueden variar debido a la temperatura, a las impurezas e incluso durante el propio proceso de deformación. En el aluminio el plano de deslizamiento es el (111).

El deslizamiento se produce en un plano y en una dirección dados. Por lo general esta dirección es la más densamente poblada de átomos (por ejemplo, la [101] en la red cúbica de caras centradas).

Para que comience el deslizamiento se necesita cierta tensión mínima, que recibe el nombre de tensión crítica de resbalamiento. Esta tensión suele ser muy pequeña; en una serie de casos llega a ser de hasta varios gramos por milímetro cuadrado. Claro que al medir la tensión crítica hay que tener en cuenta cómo está orientado el plano de deslizamiento con respecto a la fuerza exterior.

ACRITUD. Un monocristal de zinc puede doblarse con los dedos sin dificultad. Pero enderezarlo por este mismo procedimiento no es posible. Se produce la acritud.

A medida que aumenta la deformación crece la resistencia al deslizamiento. Por esto los deslizamientos plásticos en una banda de deslizamiento dada no terminan rompiendo el material, sino al contrario, cesan cuando la acritud es suficiente para oponerse a la fuerza exterior, en cuyo caso se trasladan a otros planos. De este modo el número de bandas de deslizamiento aumenta y, como es natural, el espesor de los paquetes de deslizamiento disminuye.

Si un cristal que haya sufrido deformación plástica se somete de nuevo a una acción exterior, la deformación plástica comenzará, claro está, a partir del valor de la fuerza con que la deformación

cesó, en el ensayo anterior, debido a la acritud. Puede decirse, por lo tanto, que la acritud eleva el límite de elasticidad, y, además, en muchas veces.

¿A qué se debe la acritud? Un punto de vista relaciona la acritud con la alteración de la forma correcta (deformación) de la red cristalina. Desde este punto de vista es completamente natural que la acritud aumente al crecer la velocidad de la deformación y disminuya con el aumento de la temperatura.

Desde el punto de vista de la teoría de las dislocaciones, de la que hablamos antes, el cuadro presenta otro aspecto.

LAS DEFORMACIONES PLÁSTICAS COMO DESPLAZAMIENTO DE LAS DISLOCACIONES. Estudiemos con más detalle el proceso de desplazamiento de un plano atómico por otro. Si en la banda de deslizamiento no existen dislocaciones, hay que hacer rodar unas

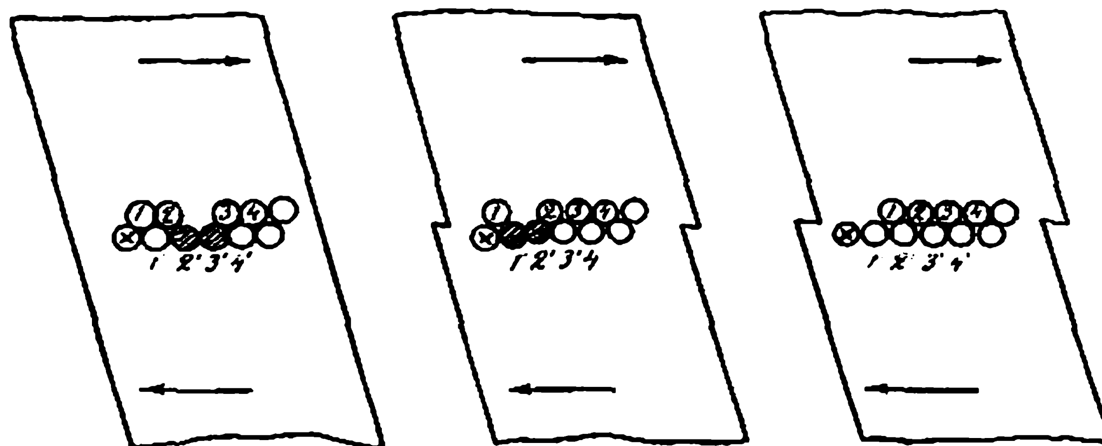


FIG. 285.

sobre otras todas las filas de átomos situadas en el plano de desplazamiento. De un modo completamente distinto se plantea el problema cuando las fuerzas de deslizamiento actúan sobre un cristal con dislocaciones.

La fig. 285 representa un empaquetamiento denso de esferas (sólo se ven las esferas extremas de las filas atómicas) en el que existe una dislocación simple. Para simplificar supondremos que la región de la dislocación abarca un número mínimo de filas. En este caso puede decirse que la existencia de la dislocación se reduce a que, entre dos filas del plano superior (ensanchado), que linda con el límite divisorio de los bloques, hay un hueco lineal. En cuanto se refiere al plano inferior (comprimido) contiguo, por la otra parte, al mismo límite entre los bloques, se ve que tiene una fila más de átomos. La introducción de esta fila de más hace que las dos filas de átomos que se encuentran sobre el hueco lineal estén dema-

siado comprimidas. Empecemos ahora a desplazar hacia la derecha el bloque superior con respecto al inferior. En cierto instante inicial la «grieta» se encontraba entre las filas *2* y *3*; las filas comprimidas eran la *2'* y la *3'*. En cuanto comienza a actuar la fuerza, la fila *2* se acerca a la «grieta», la esfera *3'* recobra la forma, y la *1'* se comprime. Toda la dislocación se ha trasladado hacia la izquierda y este movimiento continuará produciéndose del mismo modo hasta que la dislocación no «salga fuera» del cristal. En otras palabras, el deslizamiento consiste en la traslación de la línea de dislocación a lo largo del plano de deslizamiento. No es necesario demostrar que para este deslizamiento se necesitan fuerzas mucho menores.

Los cálculos llevados a cabo han demostrado que la resistencia del cristal en el supue to deslizamiento en ausencia de dislocación es cien veces mayor que la que se observa en la experiencia. La existencia de un número insignificante de dislocaciones es capaz de disminuir la resistencia un número considerable de veces.

Como se ve claramente en la figura, la fuerza aplicada «echa fuera» del cristal la dislocación. Por lo tanto, a medida que aumenta el grado de deformación, el cristal debe hacerse más resistente, y por fin, cuando haya sido eliminada la última dislocación, el cristal deberá hacerse cien veces más resistente que el perfectamente regular. De este modo se explica sin dificultad la acritud. No obstante, para lograr que la teoría esté cuantitativamente de acuerdo con la experiencia, hay que admitir que el deslizamiento del cristal puede ocurrir no sólo por dislocaciones simples, sino también por dislocaciones helicoidales.

Una buena confirmación de esta teoría es el hecho de que puedan cultivarse, en condiciones ideales, cristales sin defectos cuya resistencia se aproxima a la teórica para el cristal perfecto.

§ 255. Límite de rotura

El aumento de la deformación lineal al incrementarse la tensión continúa hasta cierto límite (límite de elasticidad). Luego empieza la deformación plástica y, debido a la acritud, la curva se eleva con mayor pendiente. Finalmente se produce la rotura.

El límite de rotura es hasta cierto punto una constante convencional del material. Es el caso que, para dar la característica de la deformación hay que indicar no sólo la magnitud de la fuerza, sino también el tiempo durante el cual actúa. Cuando este tiempo es grande, el límite de rotura decrece. Las cifras que dan los manuales técnicos generales se refieren de ordinario a los ensayos rápidos. El hecho de que el límite de rotura dependa del tiempo que dura la prueba indica que, en los procesos lentos, el comportamiento del

sólido depende de los procesos de difusión que transcurren dentro de él. Puede suponerse, por ejemplo, que incluso la acción de fuerzas pequeñas es capaz de crear una dirección privilegiada para los procesos de permutación de los átomos.

El límite de rotura de los cristales perfectos calculado teóricamente es varios cientos de veces mayor que los valores que se observan en la experiencia. Por lo tanto, el papel de los defectos del cristal resulta ser fundamental. El valor teórico de la resistencia a la rotura de un monocristal de sal gema es igual a 200 kgf/mm². En las condiciones ordinarias se rompen las probetas con cargas de 0,5 kgf/mm².

El papel de las grietas fue demostrado por los conocidos experimentos del físico soviético A. F. Ioffe, que estudió la rotura de las barras de sal gema sumergidas en agua. El agua disuelve la superficie de la barra y «cicatriza» las microgrietas que se forman durante la tracción. Como resultado de esto, la resistencia a la rotura de la sal gema se eleva a más de 100 kgf/mm², es decir, se aproxima al valor teórico.

El papel de los defectos se reduce a mermar la superficie real de rotura. En fin de cuentas, la fuerza que actúa en el instante de la rotura viene determinada por el número de enlaces interatómicos que se rompen.

Valorada de este modo, la resistencia de diversos materiales oscilará entre unos límites no muy amplios, resultando que la rotura de un hilo ordinario, o de caucho, debe producirse a tensiones del mismo orden que la de un alambre de acero.

§ 256. Propiedades mecánicas de un material policristalino

En la etapa inicial o de deformación elástica, los granos de la sustancia cristalina se deforman de un modo distinto, debido a que están orientados de diferente manera con respecto a la línea de acción de la fuerza. En virtud de esto, las propiedades elásticas de la sustancia policristalina serán otras.

Pero todavía más puede diferir el comportamiento del material policristalino del comportamiento de un monocristal de la misma sustancia en la región plástica. El material policristalino ofrece más resistencia a la fuerza exterior. Esto es comprensible, ya que el desarrollo de los deslizamientos plásticos en un grano serán frenados por los granos vecinos, en los cuales los planos de deslizamiento tendrán una orientación completamente distinta con respecto a la fuerza actuante.

Además de esto, en el material policristalino se produce un fenómeno totalmente específico: la rotación de los granos y la formación de la textura. La rotación de los granos durante el trefilado, laminado y otras deformaciones viene determinada por la tendencia de cada grano a situarse de manera que el deslizamiento sea más fácil. Para esto es necesario que el grano gire y adopte una postura en la que el plano de deslizamiento sea paralelo a la fuerza aplicada. Si los planos de deslizamiento son varios, el grano se colocará de tal modo, que la acción de estos planos de deslizamiento sea máxima. Por ejemplo, en la mayoría de los metales que poseen celda cúbica centrada en las caras, los granos tienden a situarse de manera que las direcciones [111] coincidan con el eje del trefilado.

Otro nuevo fenómeno consiste en el deslizamiento de unos granos con respecto a otros a lo largo de la capa intercristalina. Este desplazamiento difiere del deslizamiento cristalino y se parece más al fluir viscoso de los líquidos espesos.

La rotura del material policristalino puede producirse con otras tensiones que la del monocristal correspondiente. En ciertos casos el material se rompe de manera que los granos se conservan enteros. Esto ocurre cuando la capa intercristalina tiene débiles propiedades mecánicas. Puede considerarse regla general que la resistencia del material aumente cuando la magnitud de los granos disminuye.

§ 257. *Influencia de las sustancias con actividad superficial en la deformación*

Todo cuerpo sólido contiene multitud de defectos, de dimensiones ultramicroscópicas, que se producen tanto como resultado de la movilidad térmica de los átomos como debido a la existencia de impurezas y de deterioros mecánicos. Estos defectos están distribuidos por todo el volumen del sólido y muchos de ellos pueden considerarse como microgrietas embrionarias de dimensiones infinitamente pequeñas. La propiedad fundamental de estas microgrietas embrionarias es su capacidad para desarrollarse durante el proceso de deformación del sólido.

Bajo la acción de las fuerzas externas aumentan las dimensiones de las microgrietas y en sus bordes se producen concentraciones de tensión, lo que a su vez facilita el ulterior desarrollo de las microgrietas. Si el cuerpo es frágil, este desarrollo de las microgrietas durante el proceso de deformación ocasiona su rotura prematura; y si el cuerpo es dúctil, como suele ser el metal, da lugar a que produzcan deslizamientos plásticos. En un estado de tensión espacial del cuerpo, estas microgrietas tienen sección cuneiforme y se caracterizan por las partes abiertas de la superficie, bocas y fondos, en

las cuales conserva la grieta su carácter embrionario. Las grietas reales terminan en fondos que por su aspecto parecen cuchillas afiladas y muy curvadas; este radio de curvatura es del orden de la constante de la red. A eliminar los esfuerzos deformadores (en la región de las deformaciones elásticas) todas las microgrietas se «cicatrizan» paulatinamente, es decir, se cierran de un modo reversible desde el fondo a la boca.

P. A. Rebinder demostró que la influencia del medio circundante sobre las propiedades mecánicas de los sólidos no se limita a las acciones químicas del tipo de la corrosión o disolución. Toda superficie libre de un cuerpo sólido está siempre recubierta de una tenue película de una cualquiera de las sustancias que contiene el medio circundante y que posee la mayor afinidad con dicho cuerpo. Estas sustancias pueden ser los diversos gases o el vapor de agua, que se hallan de ordinario en el aire, o sustancias que se incluyen en el medio circundante. Las moléculas de las sustancias que recubren la superficie del sólido o, como suele decirse, que son adsorbidas por el sólido, son capaces de moverse por esta superficie y de trasladarse de los puntos en que hay exceso de ellas a los puntos donde son insuficientes para recubrir por completo la superficie. La tendencia de la capa adsorbida a ocupar toda la superficie asequible del sólido se explica porque como resultado de la adsorbción se produce una disminución de la energía superficial del cuerpo. Las sustancias que pueden ser adsorbidas por la superficie del sólido se llaman agentes con actividad superficial, tensoactivos o surfactantes. Para los metales son agentes tensoactivos enérgicos algunos alcoholes y ácidos orgánicos, así como las sales de estos ácidos, es decir, los jabones.

La adsorbción de los agentes con actividad superficial provoca un decrecimiento de la resistencia del sólido. Si el cuerpo sólido se somete a la prueba de rotura en un medio que contenga agentes surfactantes, aunque sólo sean en pequeñas cantidades (por ejemplo, en una solución de ácido oleico en aceite de baseiina puro), los esfuerzos necesarios para la rotura disminuyen. Esto se manifiesta con especial claridad cuando se trituran rocas frágiles y también cuando se ejercen acciones duraderas o variables sobre un metal.

La influencia de las moléculas adsorbidas sobre la resistencia del sólido se explica del modo siguiente. Las moléculas adsorbidas por la superficie externa del cuerpo penetran en las microgrietas en virtud de su movilidad y tienden a ocupar toda la superficie libre del adsorbente asequible a ellas. La fuerza motriz en el arrastre de las capas adsorbidas hacia las microgrietas es la disminución de la energía superficial del sólido provocada por esta infiltración. Si en el camino de la capa de adsorbato, que tiende a ocupar la

superficie aún no cubierta del sólido, se interpone un obstáculo, sobre él ejercerá presión la capa antedicha. Dentro de las microgrietas resulta ser un obstáculo el propio tamaño de las moléculas adsorbidas, que les impide penetrar más profundamente en ellas. Por consiguiente, en el punto donde se crea el límite de la capa de adsorción dentro de la microgrieta, se produce una presión dirigida en el sentido del desarrollo progresivo de la fisura hacia el interior del sólido. Las capas adsorbidas se comportan como cuñas que se clavan en las microgrietas. De este modo la infiltración de las moléculas de adsorbato en las bocas de las microgrietas genera esfuerzos adicionales de rotura, lo que equivale a cierto aumento de las fuerzas deformadoras externas. Por esto, en presencia de los adsorbatos, la rotura del sólido se produce siendo menores las tensiones.

§ 258. Destrucción de los materiales por la acción de un flujo de partículas

Este problema ha adquirido gran importancia debido a la construcción de los reactores nucleares. Los materiales de que está hecho el reactor, el propio combustible nuclear, los moderadores, las paredes, los aparatos, etc., están sometidos a la acción de los neutrones, de los fragmentos de la fisión nuclear, de los electrones, etc. Vamos a considerar aquellas acciones de los flujos de partículas que tienen carácter residual.

Son éstas, en primer lugar, los choques de partículas como resultado de los cuales se arranca de su sitio el electrón que efectuaba el enlace químico entre los átomos. En este caso la ionización ocasiona la rotura del enlace. Este enlace no se restablece siempre. Al contrario, los iones o los radicales que se forman pueden unirse de otro modo. Por esto, en las sustancias moleculares, la ionización debida a la emisión radiactiva causa la destrucción de unas moléculas y la creación de otras.

Además del desplazamiento de los electrones de sus puestos, también puede producirse el desplazamiento de los núcleos atómicos. En este caso, el núcleo atómico abatido de su sitio arrastra consigo su capa electrónica. Por esta razón es justo referirse no al desplazamiento de los núcleos, sino al de los átomos en conjunto. Este efecto de la acción de la radiación es casi siempre irreversible.

El deterioro de los materiales por la acción de la radiación o, más brevemente, el deterioro radiactivo, se debe al desplazamiento de los átomos de sus puestos y al rompimiento de los enlaces químicos. El desplazamiento de los átomos es ocasionado por la acción de las partículas pesadas con carga y de los neutrones rápidos. La

destrucción de los enlaces químicos se realiza por la acción de los neutrones lentos, de los rayos γ y de los electrones.

Analicemos con más detalle los fenómenos peculiares que ocurren cuando los átomos de los sólidos son desplazados de sus puestos. El proceso de desplazamiento de los átomos tiene carácter de cadena. Esto significa que el primer átomo lanzado hacia un lado desplazará a su vez a otro átomo que se tope en su camino, y este segundo átomo será capaz de abatir de su posición a un tercero y así sucesivamente. Como resultado de este proceso en cadena, un solo núcleo-proyectil es capaz de producir considerables deformaciones en la red cristalina del sólido. La forma de estas deformaciones puede ser muy diversa. La red cristalina puede ser totalmente destruida. Los átomos extraños son capaces de introducirse entre los átomos de la red primitiva. También son posibles los procesos de sustitución de los átomos de la red primaria por átomos-proyectiles. El número de desplazamientos por partícula cargada difiere poco para los distintos elementos. Una partícula alfa con 5 MeV de energía, lo mismo que un protón con 20 MeV de energía, desplazan de sus puestos a 60—80 partículas.

De esto se deduce ya que cuanto más pesada sea la partícula, mayores serán los perjuicios que cause. En efecto, las mismas cifras referidas a los fragmentos de fisión de los núcleos del uranio 235 o del plutonio 239 tienen un carácter mucho más inesperado. Este par de fragmentos origina, por ejemplo, en el uranio, 25 mil átomos desplazados, y en el grafito, 8000 átomos desplazados.

También está muy lejos de ser inofensiva para los materiales el proceso de frenado del neutrón desde su velocidad inicial hasta la térmica. El retardo de un neutrón implica el desplazamiento de 450 átomos en el berilio, de 1900 en el grafito y de 6000 en el aluminio.

De estas cifras se deduce claramente que debemos esperar variaciones considerables de las propiedades en virtud del desplazamiento de los átomos de sus puestos en la red cristalina. Los cuerpos que ofrecen interés fundamental son los metales. La causa de que esto sea así es que, en los metales, el desplazamiento de los átomos es en realidad la única acción residual de la radiación.

A lo que se ha prestado mayor interés es a la acción de los neutrones y de los fragmentos del fisión. Esto es natural, ya que las investigaciones de este género están íntimamente relacionadas con la industria atómica. Se han practicado investigaciones detalladas con dosis de 10^{19} neutrones/cm^2. Esta dosis no es muy grande. En términos aproximados, a la acción de un flujo como éste de neutrones está sometido el material que se halla en el reactor nuclear durante un día de funcionamiento. Sin embargo, aún con esta

pequeña dosis se descubren serias variaciones de las propiedades de los metales; estas variaciones se parecen a las que sufre el metal al ser trabajado en frío. Esto significa que, por la acción de los neutrones y de los fragmentos de fisión, aumenta la fragilidad del metal, disminuye su forjabilidad, aumenta su dureza y cambian también sus propiedades electromagnéticas.

Si la fuente principal del deterioro radiactivo en los metales es el desplazamiento de los átomos de sus puestos, en las sustancias orgánicas, en las que los átomos están ligados químicamente, las variaciones fundamentales se deben a la ionización, que destruye los enlaces entre los átomos.

Las sustancias orgánicas se destruyen con extraordinaria rapidez por la acción de la radiación. Una dosis de neutrones del orden de 10^{19} por cm^2 destruye prácticamente a la sustancia orgánica. Las parafinas, olefinas y los polifenilos se deterioran en un 25% si permanecen dentro del reactor varias horas.

La mayor parte de la transformación que experimenta la sustancia orgánica consiste en el desprendimiento de gas y en la polimerización. No obstante, conviene señalar aquí mismo que las sustancias polímeras altas se depolimerizan en ciertos casos por la acción de la radiación.

La estructura de la red cristalina es tal, que puede esperarse que la facilidad con que pasan las partículas cargadas en distintas direcciones cristalográficas sea diferente.

A primera vista puede parecer que no es fácil que una partícula cargada acierte a caer en un túnel reticular. No es difícil calcular que el movimiento de un protón siguiendo una línea recta, sin «tropezar» por el camino con los átomos, debe realizarse en los cristales más finos con una exactitud de 0,01 grado de arco. Sin embargo, los experimentos realizados hace poco tiempo con monocristales demuestran que el paso por el túnel se observa sin gran dificultad. La intensidad de la corriente de protones aumenta 5—10 veces cuando la dirección del haz de partículas coincide con los ejes de los cristales. El análisis detenido de este fenómeno ha desmostrado que el paso por el túnel es un proceso peculiar con reacción. Cuando el protón se desvía de su trayectoria a lo largo de una fila atómica, las fuerzas electrostáticas le obligan a retornar a su camino rectilíneo.

35

DIELÉCTRICOS

§ 259. Relación entre la permitividad y la polarizabilidad de las moléculas

En una serie de casos, y en primer lugar en los gases, la interacción entre las moléculas no existe y las propiedades eléctricas de la sustancia se determinan por el comportamiento medio de una molécula. La interacción entre las moléculas tampoco existe en muchas soluciones diluidas. A veces la interacción de las moléculas desempeña también un papel secundario en la fase condensada.

Por esto tiene gran interés el estudio de las propiedades eléctricas de una sustancia constituida por un gran número de moléculas que no interaccionen.

El momento dipolar de la unidad de volumen de un dieléctrico P se determina por la permitividad ε y la intensidad del campo E aplicando la fórmula (véase la pág. 270)

$$P=\frac{\varepsilon-1}{4\pi}E.$$

Por otra parte, el vector polarización $\boldsymbol{P}$ es igual a la suma de los momentos dipolares en la unidad de volumen del dieléctrico $\boldsymbol{P}=\sum\boldsymbol{p}$, o

$$P=N\bar{p},$$

donde N es el número de moléculas que hay en la unidad de volumen, y $\bar{p}$ es la «parte» que cada molécula aporta al vector polarización. Si E' es la intensidad del campo que actúa sobre una molécula,

$$\bar{p}=\beta E',$$

donde β es la polarizabilidad de la molécula.

Al parecer, con esto queda dada la relación entre β y ε, $\varepsilon=1+4\pi N\beta$. Pero esto es erróneo, y no es casualidad que hallamos señalado con la rayita el símbolo de la intensidad que figura en la última fórmula. En las ecuaciones que relacionan entre sí P y E y $\bar{p}$ y E' figuran en realidad intensidades distintas. E es la fuerza que actúa sobre la carga unidad de prueba, que no deforma el campo existente. E' es el campo que actúa por parte de todas las moléculas sobre la dada; en E' no entra el campo de la molécula cuya acción se determina.

En la pág. 275 dijimos que el campo dentro de una esfera dieléctrica E_{int} está ligado con el campo exterior, en que se halla dicha esfera, por medio de la ecuación

$$E_{int} = E_{ext} - \frac{4}{3}\pi P.$$

Está claro que el campo que hay dentro de la cavidad esférica, cortada en el dieléctrico, se puede escribir cambiando el signo de P:

$$E_{int} = E_{ext} + \frac{4}{3}\pi P.$$

Puede demostrarse rigurosamente que el campo E' que actúa por parte de todas las moléculas sobre la dada, en el caso de los gases, equivale al campo que hay dentro de la cavidad esférica. Por lo tanto,

$$E' = E + \frac{4}{3}\pi P.$$

Ahora podemos hallar la relación entre β y ε. Para esto igualamos las expresiones dadas para P:

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E = N\bar{p} = N\beta E';$$

y sustituyendo aquí el valor de $E' = E + \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E$, hallamos la llamada *fórmula de Clausius — Mosotti*:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N\beta.$$

Si los dos miembros de esta igualdad se multiplican por M/ρ, siendo M el peso molecular y ρ la densidad, la expresión obtenida dependerá solamente de la polarizabilidad β. En efecto, $NM/\rho = N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ (número de Avogadro).

La magnitud

$$\mathcal{P} \equiv \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{M}{\rho} = \frac{4\pi}{3} N_A \beta$$

se llama *polarización molecular o molar*. Para determinar la polarización molecular se mide la permitividad de la sustancia, como la relación de las capacidades de un condensador lleno de la sustancia que se analiza y vacío. Uno de los métodos principales para medir la capacidad es el procedimiento del puente de capacidades. Este puente se utiliza en la región de frecuencias de 30 Hz a 300 000 Hz. Pueden construirse puentes que permitan medir la capacidad hasta llegar a frecuencias de 40 MHz.

El número de las diversas estructuras que existen de Q-metros (aparatos con que se mide ε) es muy grande. Estos aparatos se dis-

tinguen por su alta sensibilidad y exactitud. En particular, pueden obtenerse magníficos resultados trabajando con gases a presiones incluso del orden de 1 mm Hg.

Aplicando la fórmula $\varepsilon = n^2$ (véase la pág. 348), puede escribirse una fórmula, análoga a la de la polarización molecular, para el índice de refracción:

$$R = \frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{M}{\rho} = \frac{4\pi}{3} N_A\beta;$$

esta característica de la molécula se llama *refracción molecular* o *molar*.

Las medidas de R y $\mathcal{P}$ para distintas frecuencias de las oscilaciones electromagnéticas pueden diferir sensiblemente unas de otras.

A pesar de que la deducción rigurosa de estas fórmulas es correcta para los gases, la interacción de las moléculas, por lo visto, influye poco. En todo caso, las fórmulas de R y $\mathcal{P}$ también se utilizan mucho en la investigación de soluciones diluidas.

Ejemplos. Consideremos benceno C_6H_6 ($\varepsilon=2,28$; $\rho=0,88$ g/cm³; $M=78$) y agua ($\varepsilon=81$; $\rho=1$ g/cm³; $M=18$). Supongamos que en estos líquidos se han introducido las placas de un condensador que crea un campo eléctrico $E=300$ V/cm $=1$ u. C.G.S.

1. Calculamos la polarización (momento eléctrico de la unidad de volumen del dieléctrico) del benceno y del agua:

$$P_{\text{benc}} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}E = \frac{2,28-1}{4\cdot 3,14}\cdot 1 = 0,1 \text{ u. C.G.S.};$$
$$P_{\text{agua}} = 6,4 \text{ u. C.G.S.}$$

La parte con que cada molécula contribuye al vector polarización será $\bar{p} = P/N$, donde $N = N_A\rho/M$ es el número de moléculas que hay en la unidad de volumen;

$$\bar{p}_{\text{benc}} = 1,5\cdot 10^{-23} \text{ u. C.G.S.}; \quad \bar{p}_{\text{agua}} = 19,4\cdot 10^{-23} \text{ u. C.G.S.}$$

2. Hallamos el valor E' de la intensidad del campo eléctrico que actúa, por parte de todas las moléculas, sobre la dada:

$$E'_{\text{benc}} = E + \frac{4}{3}\pi P_{\text{benc}} = 1,43 \text{ u. C.G.S.}; \quad E'_{\text{agua}} = 27,8 \text{ u. C.G.S.}$$

es decir, el campo interno en el agua es 28 (!) veces mayor que el aplicado. Ahora podemos hallar la polarizabilidad de las moléculas de benceno y de agua:

$$\beta_{\text{benc}} = \frac{\bar{p}}{E'} = 1,05\cdot 10^{-23}; \quad \beta_{\text{agua}} = 0,7\cdot 10^{-23}.$$

3. Partiendo de las medidas de ε en el Q-metro podemos calcular la polarización molar de la sustancia $\mathcal{P} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\,\frac{M}{\rho}$:

$$\mathcal{P}_{\text{benc}} = 26,6 \text{ u. C.G.S.}; \quad \mathcal{P}_{\text{agua}} = 17,3 \text{ u. C.G.S.}$$

4. Las medidas del índice de refracción n en el refractómetro dan $n_{benc} = 1{,}5014$. $n_{agua} = 1{,}330$. De aquí calculamos la refracción molar $R = \frac{n^2-1}{n^2+1}\frac{M}{\rho}$;

$$R_{benc} = 26{,}1 \text{ u. C.G.S.}; \quad R_{agua} = 3{,}6 \text{ u. C.G.S.}$$

Puede verse que para el benceno $\mathcal{P} \approx R$, pero para el agua $\mathcal{P}$ y R difieren mucho. La causa de que esto ocurra se explica en el párrafo siguiente.

§ 260. *Polarización de moléculas polares y no polares*

Existen dos causas de la polarización de la sustancia por la acción de un campo eléctrico. La primera consiste en el desplazamiento del centro de gravedad de la capa electrónica (polarización propiamente dicha). La segunda consiste en la acción orientadora del campo, que puede hacer que las moléculas, que poseen momento dipolar constante (o rígido, como también suele llamarse) giren y tomen una dirección próxima a la del campo. Por esta razón se admite dividir la polarizabilidad en dos partes: a, polarizabilidad propiamente dicha y b, polarizabilidad por orientación.

La orientación del dipolo requiere el giro de la molécula en conjunto. Debido a la inercia de las moléculas, para este giro se necesita cierto tiempo. Cuando las oscilaciones electromagnéticas son rápidas, el dipolo rígido no puede seguir al campo. Por esto la polarizabilidad por orientación b no existe para las ondas luminosas.

Así, pues,

$$\mathcal{P} = \frac{4\pi}{3} N_A (a+b), \quad R = \frac{4\pi}{3} N_A \cdot a.$$

Midiendo el índice de refracción obtenemos la posibilidad de hallar la polarizabilidad a de la molécula. Si, además, se ha medido $\mathcal{P}$, una resta da el valor de la polarizabilidad por orientación b.

La magnitud de la polarizabilidad por orientación está relacionada directamente con el momento dipolar rígido p de la molécula. Demostraremos que $b = \frac{p^2}{3kT}$.

Las moléculas del gas están repartidas en el espacio con orientaciones arbitrarias debido al movimiento térmico caótico. En ausencia de campo, el momento dipolar p de la molécula tiene, con igual probabilidad, cualquier orientación. Si se superpone un campo $\boldsymbol{E}$, la situación cambia. La energía potencial del dipolo es igual a $e(\varphi_+ - \varphi_-)$, donde φ_+ y φ_- son los potenciales del campo en los puntos extremos del dipolo, es decir,

$$-e\frac{\partial\varphi}{\partial l} l = -\boldsymbol{pE} = -pE\cos\theta,$$

siendo θ el ángulo comprendido entre los vectores del campo y del momento de dipolo. La energía mínima la posee el dipolo que se sitúa a lo largo del campo; su energía será $-pE$. El movimiento térmico impide que todos los dipolos ocupen la posición de energía mínima. Se establece cierta distribución de compromiso: se equilibran las tendencias a la entropía máxima y al mínimo de energía (véase la pág. 704). La ley de Boltzmann expresa este compromiso. La probabilidad de que la energía de la molécula se encuentre entre U y $U+dU$ es proporcional a $e^{-U/kT}\,dU$. En nuestro caso $U=-pE\cos\theta$, por lo tanto, $dU=pE\operatorname{sen}\theta\,d\theta$. La parte de moléculas cuyos momentos dipolares tienen las direcciones comprendidas entre los ángulos θ y $\theta+d\theta$ será $e^{(pE/kT)\cos\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$.

Para las temperaturas ordinarias $pE\ll kT$. Incluso para los campos más intensos, del orden de 10^6 V/cm, la relación pE/kT será del orden de 0,01 (los momentos dipolares son en realidad magnitudes del orden de 10^{-18} u. C.G.S.). Por esto podemos limitarnos a la aproximación $e^x\approx 1+x$, y la parte de moléculas buscada será

$$\text{const}\cdot\left(1+\frac{pE}{kT}\cos\theta\right)\operatorname{sen}\theta\,d\theta.$$

La integral de esta expresión, con respecto a θ, desde 0 hasta π, por el sentido de la probabilidad debe ser igual a la unidad, ya que la dirección de $\boldsymbol{p}$, en cualquier molécula, se halla entre 0 y π. En este caso, como es fácil comprobar, la const$=1/2$, y la parte de moléculas cuyo vector polarización se encuentra en el intervalo de θ a $\theta+d\theta$ será igual a

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{pE}{kT}\cos\theta\right)\operatorname{sen}\theta\,d\theta.$$

La proyección del momento de dipolo sobre la dirección del campo es $p\cos\theta$. Si N es el número de moléculas que hay en la unidad de volumen, la parte con que contribuirán al vector polarización las moléculas inclinadas bajo un ángulo θ con respecto al campo será igual a

$$\frac{1}{2}Np\left(1+\frac{pE}{kT}\cos\theta\right)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta$$

El vector polarización P se halla integrando esta expresión de 0 a π. Se obtiene:

$$P=N\frac{p^2}{3kT}E,$$

y, por consiguiente, la polarizabilidad por orientación viene expresada por la fórmula

$$b=\frac{p^2}{3kT}.$$

La ligazón de la polarización molar con la temperatura se expresa por la fórmula

$$\mathcal{P}=\frac{4\pi}{3}N_A\left(a+\frac{p^2}{3kT}\right).$$

Esta conclusión de la teoría confirma magníficamente la experiencia. Midiendo $\mathcal{P}$ en función de T, no es difícil, partiendo de esta dependencia, calcular los dos parámetros que caracterizan las propiedades eléctricas de la molécula: su polarizabilidad y el momento dipolar «rígido» p.

De este modo, los datos obtenidos de la refracción R (con respecto a a) pueden compararse con las medidas de la polarización $\mathcal{P}$.

La experiencia demuestra que en algunos casos la interacción de los dipolos de las partículas vecinas puede ocasionar variaciones considerables de la constante dieléctrica comparada con la magnitud de ε de un sistema de moléculas que no interaccionan. Este tipo de observaciones puede hacerse midiendo las ε de un líquido y de un gas constituidos por las mismas moléculas.

La interacción de las partículas influye también en el valor de la permitividad de los cristales.

En los cuerpos cristalinos, por regla general, la polarización eléctrica se produce únicamente a expensas de la deformación de la capa electrónica y de los desplazamientos de los iones. La polarización por orientación no existe: los giros de las moléculas en el cristal son imposibles en la mayoría de los casos.

En muchos cristales iónicos, el cuadrado del índice de refracción es mucho menor que el valor de la constante dieléctrica (por ejemplo, en la sal gema sus valores son respectivamente 2,37 y 6,3; en el dióxido de titanio, 7,3 y 114, en el carbonato plumboso, 4,34 y 24, etc.). En estos cristales, por la acción del campo estático, se deforma no sólo la capa electrónica, sino que también se desplazan los iones en conjunto. Y al contrario, se ha establecido que en los cristales moleculares la constante dieléctrica no difiere del cuadrado del índice de refracción, lo que demuestra que la polarización se debe exclusivamente a la deformación de la capa electrónica.

Como la polarización por orientación no existe en los cristales, la dependencia de la permitividad con respecto a la temperatura es muy débil.

Ya hemos dicho de pasada que cuando el campo es rápidamente variable no existe la polarización por orientación y la polarización molar se hace igual a la refracción. Tiene importancia conocer qué oscilaciones del campo deben considerarse rápidas. Esto se determina por el tiempo de relajación. Si el tiempo de relajación τ supera en mucho el período de las oscilaciones, la polarización por orientación no existe.

Del tiempo de relajación τ se trató en la pág. 172. Si un dieléctrico se encuentra en un campo continuo, sus dipolos toman cierta distribución equilibrada por orientaciones característica de la temperatura dada. Si el campo se desconecta, se produce la desorientación de los dipolos. Pero esto no ocurre instantáneamente, sino que el orden decrece según una ley exponencial. A la rapidez de este decrecimiento la caracteriza el tiempo de relajación τ, que es el tiempo que tarda la polarización en disminuir e veces. Si τ es mucho mayor que el período de las oscilaciones, antes de que cambie la orientación de los dipolos varía la dirección del campo exterior. La acción de un campo tan rápido no influye en general en el comportamiento de los dipolos. Pero si $\tau \ll T$, cada estado instantáneo será de equilibrio y la polarización seguirá sumisamente al campo. Para la mayoría de los dieléctricos los tiempos de relajación son del orden de 10^{-12}—10^{-13} s.

Ejemplos. 1. Hallemos el valor de la polarizabilidad propiamente dicha a y de la polarizabilidad por orientación b para el benceno y el agua, empleando para esto los resultados del ejemplo precedente (pág. 733): $a = 3R/(4\pi N_A)$; de donde $a_{\text{benc}} = 10^{-23}$ u. C.G.S.; $a_{\text{agua}} = 0,14 \cdot 10^{-23}$ u. C.G.S. Por otra parte,

$$a + b = 3\mathcal{P}/(4\pi N_A), \quad (a+b)_{\text{benc}} = 10^{-23} \text{ u. C.G.S.}$$
$$(a+b)_{\text{agua}} = 0,7 \cdot 10^{-23} \text{ u. C.G.S.}$$

De aquí puede verse que la polarizabilidad por orientación del benceno

$$b_{\text{benc}} = 0, \text{ y la del agua } b_{\text{agua}} = 0,7 \cdot 10^{-23} - 0,14 \cdot 10^{-23} = 0,56 \cdot 10^{-23} \text{ u. C.G.S.}$$

Esto significa que las moléculas de benceno no poseen momento dipolar rígido, mientras que las moléculas de agua sí lo tienen.

2. Hallemos el momento dipolar rígido de la molécula de agua $p = \sqrt{3kTb}$. Como las medidas de la polarización molecular $\mathcal{P}$ y de la de refracción molecular R se efectúan a la temperatura ambiente ($T = 300$°K),

$$p = \sqrt{3 \cdot 1,38^{-16} \cdot 300 \cdot 0,5 \cdot 10^{-23}} = 0,8 \cdot 10^{-18} \text{ u. C.G.S.}$$

Los resultados de este cálculo se aproximan a los valores experimentales.

Con bastante frecuencia se utiliza, al dar los momentos dipolares, la unidad 1 debye $= 10^{-18}$ u. C.G.S. Esta unidad se llama así en honor del científico holandés P.J. Debye, que desarrolló la teoría de los momentos dipolares.

§ 261. Aditividad de la refracción molecular

El valor de la refracción molecular R es una constante molecular. R es independiente de la densidad, del estado fásico de la sustancia (como lo demuestran los experimentos) y de la temperatura.

Una propiedad que hace que resulte cómodo utilizar la refracción R es su aditividad. Si se consigue hacer una tabla de los in-

crementos *) de cualquier propiedad para todos los átomos y la magnitud de esta propiedad de la molécula es igual a la suma de dichos incrementos, esta propiedad recibe el nombre de aditiva. La aditividad de R puede utilizarse para fines analíticos y de identificación; conviene advertir que esta aditividad carece de fundamento teórico y, en una serie de casos, se cumple con considerables desviaciones.

Una cantidad enorme de observaciones han sido estudiadas por muchos investigadores. Resultado de sus trabajos han sido las tablas de los incrementos de R (con más frecuencia los de R_D; esto significa que el índice de refracción se midió por la llamada longitud D, es decir, la de la raya amarilla del sodio). Por ejemplo, para los átomos de C, H, Cl, los incrementos son iguales respectivamente a 2,418; 1,100 y 5,967. Utilizando nada más que estas cifras pueden predecirse los valores de la refracción molecular de muchos compuestos:

el del metano CH_4:	$R = 2,418 + 4 \cdot 1,100$;
el del cloroformo $CHCl_3$:	$R = 2,418 + 1,100 + 3 \cdot 5,967$;
el del tetracloruro de carbono Cl_4C:	$R = 2,418 + 4 \cdot 5,967$,

y así sucesivamente. Las refracciones pueden medirse con gran exactitud y, si es necesario pueden distinguirse hasta las diferencias más pequeñas.

Teniendo en cuenta los fenómenos de la dispersión anómala, que, como ya dijimos, se producen cuando los valores de las frecuencias son próximos a los de las frecuencias propias de absorción, hay que dar preferencia a las mediciones de la refracción en una región alejada de la banda de absorción.

Para calcular la refracción, su índice se mide con refractómetros. Los refractómetros más difundidos miden el ángulo de refracción de un rayo luminoso procedente de la sustancia que se analiza y que incide sobre la superficie de un prisma de vidrio cuyo n es más elevado.

Si en el límite de separación entre la sustancia que se analiza y el vidrio llega un haz de rayos cuyo ángulo de incidencia esté comprendido entre 0 y 90°, los rayos refractados se encontrarán entre los límites de un ángulo de refracción nulo y de cierto ángulo límite α, cuyo seno será igual a la razón de los índices de refracción de la sustancia analizada y del vidrio del prisma (fig. 286). El ángulo límite puede observarse en forma de frontera nítida en el plano focal del anteojo.

*) Es decir, de la fracción que aporta un átomo determinado al valor de la magnitud física dada.

Para medir el índice de refracción de un líquido, sobre la superficie del prisma se forma una capa de cerca de 0,5 mm de espesor. Los cuerpos sólidos deben ajustarse bien a la superficie del prisma. El contacto óptico se consigue poniendo una gota de un líquido apropiado entre las superficies del prisma y del cuerpo a analizar. El coeficiente de refracción de las sustancias en polvo puede determinarse sumergiendo los polvos en un líquido y haciendo que este último tenga el mismo índice de refracción que los polvos.

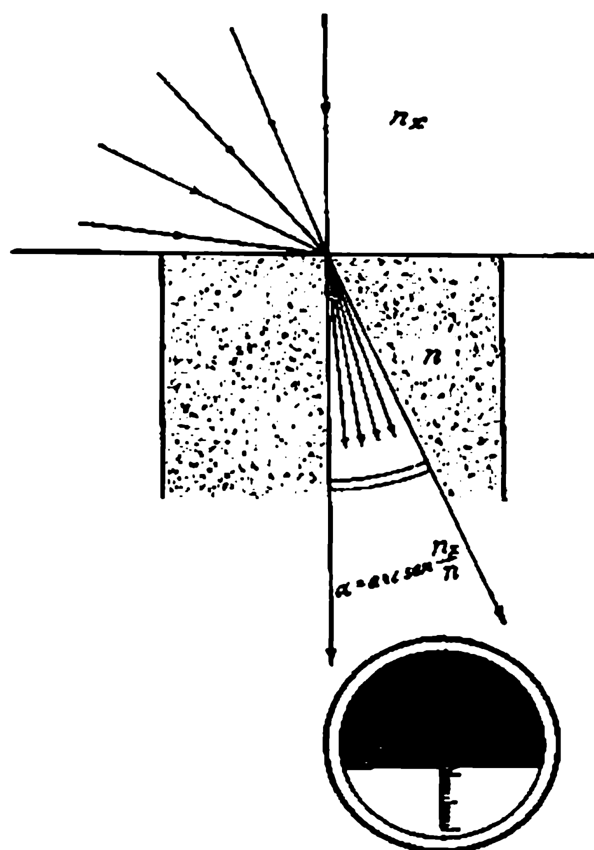


FIG. 286.

§ 262. *Piroeléctricos y piezoeléctricos*

En los cristales que entre sus elementos de simetría no cuentan con centro de inversión puede aparecer toda una serie de propiedades interesantes. Estos cristales pueden poseer momento eléctrico (vector polarización) en ausencia de campo exterior.

Nos detendremos, en primer lugar, en los cristales que se polarizan cuando sufren una deformación uniforme*). Los cristales que poseen esta propiedad se llaman piezoeléctricos; de ellos se trató ya en el § 45.

El hecho de que se produzca la polarización por compresión, tracción, etc., demuestra que la deformación uniforme ocasiona en el cristal la creación de una dirección especial (es decir, la única que no se multiplica por los elementos de simetría). Está claro que este comportamiento es imposible cuando el cristal tiene centro de inversión. En efecto, la deformación uniforme no puede privar al cristal de centro de inversión. Y, al mismo tiempo, la existencia de centro de inversión es incompatible con la existencia de una dirección particular como es la del vector polarización. Puede tener

*) Se llama deformación uniforme aquella en que un elemento pequeño de volumen que se halle en cualquier punto del cuerpo se deforma igualmente

propiedades piezoeléctricas cualquier cristal que carezca de centro de simetría. No obstante, en muchos cristales de este tipo no hallamos propiedades piezoeléctricas, quizá a causa de la insuficiente sensibilidad de los aparatos de medida. Por otra parte, podemos figurarnos una estructura no centrosimétrica en la cual cualquier deformación uniforme no desplace, uno con respecto a otro, los centros de gravedad de las cargas positiva y negativa. Un estudio detenido muestra que en una de las clases de simetría no centrosimétricas es imposible el efecto piezoeléctrico.

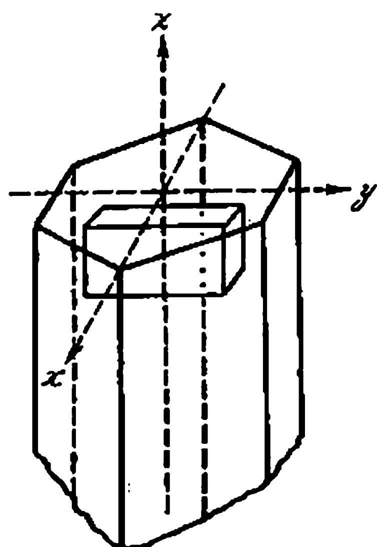
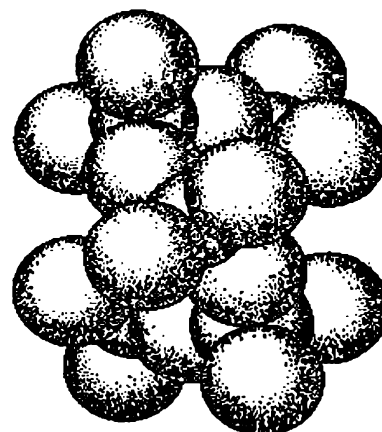


FIG. 287.

El piezoeléctrico más conocido es el cuarzo. La fig. 287 representa un cristal de cuarzo y muestra cómo de este cristal se cortan las láminas piezoeléctricas.

Del carácter de los desplazamientos de los átomos da una idea la fig. 288. La estructura del cuarzo nos la podemos figurar como un empaquetamiento denso de iones de oxígeno, en cuyos huecos se alojan los átomos de silicio (en la figura se representan los átomos de silicio en forma de esferitas negras, y los átomos de oxígeno, como esferitas blancas). Los iones de oxígeno son portadores de carga negativa; los de sicilio, de carga positiva. El átomo de sicilio se encuentra entre cuatro átomos de oxígeno. La electrización del cuarzo se produce cuando se comprime en dirección a los ejes polares. La presión a lo largo de los ejes que se encuentran en el plano del dibujo ocasiona el desplazamiento de las cargas positivas con respecto a las negativas. La presión a lo largo del eje de tercer orden (dirección no polar, perpendicular al plano del dibujo) no produce efecto.


FIG. 288.

Los desplazamientos de los átomos no se pueden representar en la figura. Estos desplazamientos son muy pequeños. En efecto, la constante piezoeléctrica del cuarzo, es decir, la magnitud del vector polarización a la presión unitaria es igual a $6{,}5 \cdot 10^{-8}$ u. C. G. S. El volumen de la celdilla elemental del cuarzo es igual a $112 \times \times 10^{-24}$ cm^3, y en cada celdilla hay tres moléculas de SiO_2, por consiguiente, el número de moléculas que hay en la unidad de volumen es igual a $2{,}7 \cdot 10^{22}$, y por lo tanto, el momento dipolar a la presión

unitaria, que corresponde a una molécula, será igual a $2,4 \times \times 10^{-30}$ u. C. G. S. Las cargas que crean la molécula son iguales a $14 + +2 \cdot 8 = 30$ cargas del electrón. Por consiguiente, el desplazamiento de los centros de gravedad de las cargas positiva y negativa es igual a 10^{-18} cm, lo que da 0,1 Å cuando la presión es de 1000 atm.

Entre los piezoeléctricos debe destacarse el grupo de los cristales llamados *piroeléctricos*. Estos son cristales que poseen polarización natural en las condiciones ordinarias de temperatura y presión. Este efecto suele estar disimulado por las cargas eléctricas superficiales libres que se acumulan en los límites del cristal, y se pone de manifiesto cuando se calienta este último. De aquí el origen de su denominación (piro — en griego πυρ — significa fuego).

Los representantes de los piroeléctricos se encuentran entre cristales aún más limitados en cuanto a simetría. Piroeléctrico sólo pude ser un cristal que contenga un eje polar único. De este modo, la condición de ausencia del centro de simetría resulta insuficiente en este caso. El sentido de esta condición se comprende fácilmente. La existencia de la polarización natural indica que en el piroeléctrico hay una dirección peculiar, mientras que en el piezoeléctrico sólo aparece esta dirección cuando se somete a una deformación mecánica. Uno de los piroeléctricos más conocidos es la turmalina.

El campo eléctrico interno de un piroeléctrico es muy intenso. Por esta razón la superposición de un campo exterior no cambia nada en la polarización de un cristal de este tipo: esta polarización no se puede aumentar, ni disminuir, ni transformar. Este cristal está polarizado hasta la saturación; los momentos dipolares de todas sus partículas son paralelos. En la teoría del ferromagnetismo (véase el § 226, que conviene conocer cuando se lea esta página), la región en que los momentos magnéticos de los átomos son paralelos se llama dominio. Este mismo término se utiliza para la región en la cual son paralelos los momentos dipolares eléctricos de todas las partículas. Los cristales piroeléctricos representan en la mayoría de los casos un dominio.

§ 262a. *Ferroeléctricos*

Para la técnica tiene mucha importancia una clase de piroeléctricos que posee la siguiente peculiaridad: la elevación de la temperatura ocasiona la desaparición de sus propiedades piroeléctricas. A la temperatura de transición (punto de Curie) se observa el máximo de permitividad. La dependencia de ε respecto de la temperatura satisface la ley $\varepsilon = \frac{C}{T - \Theta}$, donde Θ es la temperatura de Curie.

De este modo, en los ferroeléctricos (llamados también eléctricos de Seignette o de la Rochela por ser la sal de este nombre el representante típico de esta clase de sustancias) tiene lugar la transición del estado ordenado polarizado al no polarizado.

El comportamiento de los ferroeléctricos es análogo al de los ferromagnéticos. Lo mismo que los ferromagnéticos, estos interesantes dieléctricos tienen unos valores enormes de la permitividad (de centenares y millares de unidades), manifiestan fenómenos claros de histéresis y poseen punto de Curie. Además de los ferroeléctricos, en cuyos dominios todos los dipolos son paralelos, existen también los antiferroeléctricos, en los cuales las direcciones de los dipolos cambian sucesivamente.

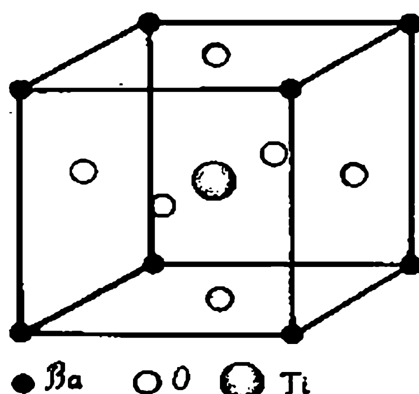


FIG. 289.

No es necesario repetir los razonamientos hechos en el § 266; todos ellos pueden aplicarse también aquí completamente. Todo lo dicho acerca de la influencia del campo, de la polarización por desplazamiento de los límites de los dominios y de las causas de la división del cristal en pequeños dominios es también correcto para los ferroeléctricos.

En la actualidad se conocen más de cien sustancias diferentes que poseen propiedades ferroeléctricas. Distintos cristales pueden poseer mecanismos de polarización algo diferentes.

Han sido bastante bien estudiados los fenómenos que ocurren en la familia de sustancias de fórmula ABO_3, llamadas «perovskitas». A ella pertenece el más conocido de los ferroeléctricos, el titanato de bario, $BaTiO_3$.

La fig. 289 representa la estructura del titanato de bario. El punto de Curie del titanato de bario se encuentra a los 120°C. A temperaturas mayores de 120°C esta sustancia tiene una celdilla elemental simple. Esta celdilla es cúbica, en su centro se halla el átomo de titanio, en los vértices del cubo, los átomos de bario, y en los centros de las caras, los átomos de oxígeno. La estructura es centrosimétrica y los cristales a más de 120°C no son piroeléctricos. Cuando la temperatura desciende se produce una transición de fase y la estructura cambia: una de las aristas del cubo se hace un 1% más larga que las otras dos y el cristal pasa a ser tetragonal. Al ocurrir esta transformación se produce el desplazamiento del átomo de titanio hacia uno de los átomos de oxígeno. Esta dirección se hace ahora peculiar y a lo largo de ella queda dirigido el vector polarización. Está claro que en el cristal de titanato de bario no existe

una dirección de polarización fácil, sino tres, ya que los desplazamientos a lo largo de los tres ejes del cubo son completamente equivalentes.

Durante el enfriamiento inferior al punto de Curie (120° C para el cristal de titanato de bario) las diversas regiones del cristal pueden transformarse en dominios con distinta orientación. Al tomar la estructura de los dominios, el cristal adquiere tensión mecánica: unas partes del cristal se comprimen y otras se expanden. Un cristal de dominios no es estrictamente un monocristal: el orden tridimensional remoto a lo largo de todo el cristal, se pierde.

Si la temperatura sigue disminuyendo, el titanato de bario sufre otra transición de fase, aproximadamente a +10°C, pero no deja de ser ferroeléctrico.

Estudiemos más detenidamente la deformación de la estructura cúbica simétrica que ocurre cuando el titanato de bario se enfría a una temperatura inferior a 120°C. Las mediciones neutronográficas han demostrado que la deformación, medida con respecto a la red de los iones de bario, consiste en desplazamientos de los iones de titanio de +0,05 Å y de los iones de oxígeno en —0,10 Å y —0,05 Å. Las desigualdades de los desplazamientos de los iones de oxígeno demuestran que una de las aristas del cubo se convierte en peculiar durante la transformación ferroeléctrica, debido a que el sistema cúbico se transforma en tetragonal.

Entre los iones de oxígeno, cargados negativamente, y los iones de titanio, con carga positiva, se forma el brazo del dipolo. Si todas las cargas se proyectan sobre la dirección peculiar, suponiendo que a los átomos de Ba y Ti le faltan respectivamente 2 y 4 electrones y que los átomos de oxígeno tienen dos electrones de más, veremos que a la celdilla elemental le corresponde un dipolo eléctrico de $0,15\cdot 10^{-8}\cdot 4e+0,05\cdot 10^{-8}\cdot 2e=0,7\cdot 10^{-8}\cdot e=3,5\cdot 10^{-8}$ u. C. G. S. Como la celdilla elemental tiene un volumen igual a 64 Å^3, el vector polarización será igual a $\frac{1}{64\cdot 10^{-24}}\cdot 3,5\cdot 10^{-18}=5\cdot 10^{4}$ u. C. G. S. La medida directa del vector polarización da, dentro de los límites de los errores del experimento, este mismo valor.

36

MATERIALES MAGNÉTICOS

§ 263. Tres clases de materiales magnéticos

Sabemos que, atendiendo a sus propiedades magnéticas, las sustancias se dividen en diamagnéticas, paramagnéticas y ferromagnéticas. Los valores de las susceptibilidades negativas de los cuerpos

diamagnéticos se encuentran generalmente entre los límites de $-13\cdot 10^{-6}$ para el bismuto y $-0{,}8\cdot 10^{-6}$ para el cobre. Los cuerpos paramagnéticos se caracterizan por tener valores positivos, por ejemplo, $0{,}4\cdot 10^{-6}$ para el potasio y $320\cdot 10^{-6}$ para el cloruro ferroso. Los cuerpos ferromagnéticos se destacan claramente por los valores de su permeabilidad magnética, que supera centenares y millares de veces los valores de μ para otros cuerpos. ¿Qué particularidades estructurales pueden explicar la aparición de propiedades magnéticas tan distintas en sustancias que a menudo son muy semejantes en sus demás propiedades?

Como ahora veremos, el diamagnetismo es una propiedad universal que todo cuerpo tiene, puesto que está constituido por electrones. De las cifras antes citadas se deduce que las propiedades diamagnéticas son más débiles que las paramagnéticas y, aún más, que las ferromagnéticas. Las propiedades diamagnéticas sólo se observan cuando el cuerpo carece por completo de las cualidades que ocasionan el magnetismo positivo. Los cuerpos paramagnéticos y ferromagnéticos también tienen propiedades diamagnéticas, pero están «ahogadas» por el paramagnetismo positivo que es más fuerte.

Así, pues, el diamagnetismo existe en todo sistema que conste de electrones. En cuanto se refiere al magnetismo positivo, éste aparece solamente en aquellos cuerpos cuyos átomos poseen momento magnético. El fenómeno del paramagnetismo se asemeja mucho al proceso de electrización de un dieléctrico constituido por dipolos rígidos que poseen momento magnético permanente.

Para que se den las propiedades ferromagnéticas es condición indispensable que los átomos tengan momento magnético. Pero la peculiaridad más notable de estos cuerpos se debe a una propiedad específica suya: la de formarse dentro de ellos grandes regiones — dominios — en las cuales millares de millones de átomos se encuentran alineados con sus momentos magnéticos paralelos unos a otros.

§ 264. Diamagnetismo

El diamagnetismo es consecuencia directa de la propiedad que tiene el electón de describir circunferencias en el campo magnético.

En un campo magnético cuya inducción sea B, una partícula libre cargada describirá circunferencias con la frecuencia $\omega = eB/(mc)$. Puede demostrarse rigurosamente que la influencia del campo magnético sobre un electrón que se mueve en un campo central, en particular en el campo del núcleo atómico, se reduce a la influencia análoga: el electrón describirá una «trayectoria» circular alrededor de la línea de fuerza, pero con una frecuencia dos veces menor, $eB/(2mc)$.

Este movimiento se superpone a otros movimientos que puede realizar el electrón: al movimiento caótico de las particulas que entran en la composición del gas electrónico o al movimiento del electrón alrededor del núcleo atómico.

Los razonamientos elementales que se hicieron en la pág. 538 demostraron que un movimiento de este tipo es equivalente a una corriente eléctrica circular. Cuando se conecta el campo magnético, todos los electrones comienzan a girar alrededor del campo magnético y cada uno de ellos origina una corriente elemental de intensidad

$$I = \frac{ve}{2\pi r} = \frac{e\omega}{2\pi}.$$

Multiplicando por el área del círculo que describe el electrón al moverse alrededor de la línea de fuerza, obtenemos el valor del momento diamagnético que crea un electrón:

$$M = -\frac{1}{c}\frac{e\omega}{2\pi}S = -\frac{e^2}{4\pi mc^2}SB.$$

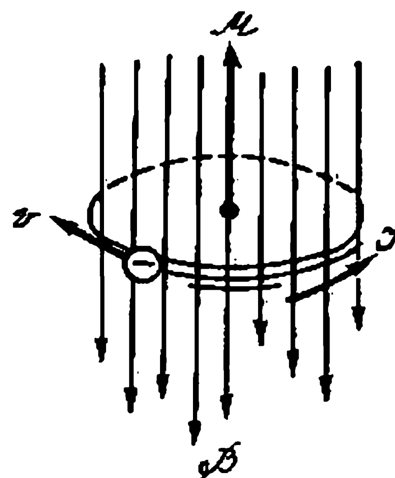


FIG. 290.

El signo menos, que indica que el momento está dirigido en realidad en sentido contrario al campo, queda explicado evidentemente por la fig. 290.

Si el sistema está constituido por un gran número de electrones, la expresión que hemos escrito debe sumarse extendiéndola a todos los electrones:

$$M = -\frac{e^2}{4\pi mc^2}\sum S_i B.$$

Como, por defición (véase la pág. 305), la susceptibilidad magnética es la razón del momento magnético de la unidad de volumen (o de la unidad de masa o de mol) a la inducción, se tiene que

$$\chi = -\frac{Ne^2}{4\pi mc^2}\sum S_i.$$

Si N es el número de Avogadro, χ es la susceptibilidad diamagnética molar (al hacer la comparación con el § 108, pág. 305, hay que tener en cuenta que $\chi = \varkappa/\mu$).

De este modo se expresa mediante las áreas que circunscriben los electrones en virtud del movimiento adicional en el campo magnético. En principio, este cálculo puede hacerse si se conoce la función de onda del sistema, es decir, la densidad electrónica en fin de

cuentas. En la práctica el cálculo resulta demasiado largo y la susceptibilidad diamagnética se determina por vía experimental.

Tiene importancia subrayar que la susceptibilidad diamagnética viene determinada por la estructura electrónica del sistema y no depende (en todo caso para los átomos y las moléculas) de las condiciones exteriores, incluyendo en ellas la temperatura.

La susceptibilidad diamagnética posee la misma propiedad que la refracción molecular: es aditiva. Si la susceptibilidad diamagnética se refiere a un mol de sustancia, siempre es posible representar con buena exactitud la susceptibilidad χ de la molécula de la forma

$$\chi = \sum_{i} n_A \chi_A,$$

donde n_A es el número de átomos del tipo A que hay en la molécula, y χ_A es el incremento para el átomo dado. Para ilustrar lo dicho podemos utilizar el mismo ejemplo (pág. 738) que pusimos para la refracción. Para los átomos C, H y Cl, los incrementos tienen respectivamente los valores (se da $\chi_A \cdot 10^6$) 7,4; 2,0 y 18,5. De este modo obtenemos para el metano 15,4, para el cloroformo 64,9 y para el tetracloruro de carbono 81,4 (lo que concuerda bien con la experiencia).

El sentido de esta aditividad consiste probablemente en la débil influencia que ejercen los electrones externos sobre la susceptibilidad diamagnética. Con la exactitud con que se cumple la aditividad, la susceptibilidad es una propiedad atómica y no molecular.

Como dijimos en el párrafo precedente, la susceptibilidad diamagnética la poseen las sustancias cuyos átomos y moléculas no tienen momento magnético permanente. A estas partículas pertenecen en primer lugar todos los átomos e iones que tienen las capas completas, como los iones F^-, Cl^-, Na^+ y los átomos de los gases nobles. También son diamagnéticos todos los átomos e iones que, además de tener completas todas sus caras, tienen dos electrones s con espines antiparalelos, como, por ejemplo, el Zn, Be, Ca, Pb^{++}, etc.

La clase de las moléculas diamagnéticas es incomparablemente más amplia que la de las moléculas paramagnéticas. Esta última es más bien una excepción. Esto se explica por el hecho de que la inmensa mayoría de las moléculas contienen enlaces de valencia formados por un par de electrones con espines antiparalelos. Por lo general, en estas moléculas no sólo es nulo el momento espinorial total, sino también el momento total del movimiento alrededor del núcleo. Por lo tanto, son diamagnéticos los cuerpos construidos por átomos e iones como los que hemos citado, y casi todos los cuerpos cuyos sillares son las moléculas, y por consiguiente, casi todas las sustancias orgánicas.

La susceptibilidad diamagnética caracteriza la capa electrónica de la molécula. Si la distribución de los electrones en la molécula

posee una fuerte anisotropía, esta anisotropía la ofrece también la susceptibilidad diamagnética. La anisotropía de la susceptibilidad diamagnética se manifiesta con especial claridad en las moléculas de los compuestos aromáticos. Por ejemplo, en el benceno la susceptibilidad diamagnética molar en la dirección que se encuentra en el plano del anillo bencénico es $\chi_{\parallel}=-37\cdot 10^{-6}$ cm^{-3}/mol, mientras que en la dirección perpendicular a dicho anillo, $\chi_{\perp}=-91\times\times 10^{-6}$ cm^{-3}/mol; en la naftalina $\chi_{\parallel}=40\cdot 10^{-6}$ cm^{-3}/mol, y $\chi_{\perp}==-190\times 10^{-6}$ cm^{-3}/mol. Revelan la anisotropía las mediciones hechas en los cristales orientados de distinto modo en el campo. Las mediciones hechas en polvos, líquidos o gases dan una susceptibilidad magnética promediada según las orientaciones.

§ 265. *Paramagnetismo*

Las propiedades paramagnéticas se observan en una sustancia si sus átomos, iones o moléculas poseen momento magnético. El momento magnético es provocado por los espines no compensados de los electrones que entran en el sistema atómico, por el movimiento de los electrones alrededor de los núcleos o por ambas causas a la vez.

Como se explicó antes (véase la pág. 542), el momento magnético de procedencia espinorial se relaciona con el impulso de rotación por medio de la fórmula

$$\mu_s=2\mu_B\sqrt{s(s+1)},$$

y el momento magnético debido al movimiento de los electrones alrededor del núcleo, por la correlación

$$\mu_L=\mu_B\sqrt{L(L+1)}.$$

Aquí μ_B es el magnetón de Bohr, y s y L son respectivamente el impulso espinorial total y el impulso de rotación total para el movimiento alrededor del núcleo, tomados para el átomo o la molécula en conjunto, s, y L se expresan, como antes, en unidades $h/(2\pi)$. Cuando existe paramagnetismo debido a ambas causas, la fórmula del momento magnético del átomo o de la molécula tiene la forma

$$\mu=g\cdot\mu_B\sqrt{J(J+1)},$$

donde J es el número cuántico del impulso de rotación total, que representa de por sí la suma vectorial de L y s, y g es el llamado *factor de Landé*, que depende de los tres números cuánticos. A propósito, la proximidad de g a 1 ó a 2 (establecida por la experiencia) sirve de juicio magnífico acerca de la procedencia del magnetismo en el cuerpo dado.

A los átomos e iones paramagnéticos pertenecen las partículas que tienen un electrón encima de la capa completa (por ejemplo, los átomos de los metales alcalinos), los átomos de los elementos de transición, los iones de las tierras raras que tienen capas electrónicas incompletas, etc.

Como ya dijimos, la mayoría de las moléculas son diamagnéticas. A las moléculas paramagnéticas pertenecen las de oxígeno y de azufre. Como excepción, estas moléculas poseen espin total igual a 1. El momento magnético que se observa en la práctica puede calcularse por medio de la fórmula

$$\mu = 2\mu_B \sqrt{2}$$

en buena coincidencia con los datos experimentales.

La existencia de paramagnetismo en una molécula es prueba de que en su composición entran electrones no apareados. Esta ci.-cunstancia hace que la medida de las propiedades magnéticas de las moléculas sea extraordinariamente interesante para los químicos. Tienen propiedades paramagnéticas los llamados radicales libres, compuestos químicos con un electrón no apareado. Los radicales libres se producen en una serie de casos durante las reacciones químicas, y la medición de la susceptibilidad magnética es uno de los procedimientos posibles para estudiar la marcha de las reacciones químicas.

¿De qué modo está relacionado el valor del momento paramagnético de la molécula con la susceptibilidad magnética? En los cuerpos paramagnéticos que se encuentran fuera de un campo magnético, los momentos magnéticos están distribuidos desordenadamente en distintas direcciones y el momento magnético total de la sustancia es nulo. Cuando se superpone el campo, los átomos (o las moléculas) tenderán a volverse de tal modo, que su momento magnético coincida con la dirección del campo. Como resultado de esto se establece el equilibrio entre dos tendencias: una, la fuerza ordenadora del campo, y otra, la tendencia al desorden térmico. A este caso podemos aplicar completamente unos razonamientos análogos a los hechos en la pág. 734 para deducir el valor de la polarizabilidad de una sustancia constituida por dipolos eléctricos rígidos. Por esto, como en aquel caso, la relación entre el momento magnético del átomo (o molécula) y la susceptibilidad paramagnética del mismo viene dada por la expresión

$$\chi_{at} = \frac{\mu^2}{3kT}.$$

A diferencia de la susceptibilidad diamagnética, el paramagnetismo de una sustancia depende de la temperatura. Es verdad que la cues-

tión se plantea aquí de un modo algo más complicado que en los dieléctricos. Es el caso que momento eléctrico permanente de la molécula es una constante, mientras que el momento magnético de la molécula (o átomo) puede variar considerablemente con la temperatura. El momento paramagnético está ligado con los números cuánticos, y la distribución de las moléculas por estados puede depender bastante de la temperatura. Por esta razón la ley simple que dice, que la susceptibilidad magnética es inversamente proporcional a la temperatura (ley de Curie), puede no cumplirse para los paramagnéticos.

§ 266. Ferromagnetismo

DOMINIO. Propiedades magnéticas apreciables (valiéndose de medios de observación ordinarios) sólo tiene un pequeño número de sustancias. A él pertenecen: el hierro, cobalto, níquel, gadolinio, los compuestos de estos elementos y algunos compuestos del manganeso y del cromo. Como el hierro desempeña en esta familia el papel fundamental, estas sustancias recibieron el nombre de ferromagnéticas.

Los átomos de los cuerpos ferromagnéticos poseen momento magnético de procedencia espinorial (por lo menos en lo fundamental). Pero ésta no es la peculiaridad que los destaca entre los paramagnéticos. La particularidad principal de los ferromagnéticos es su estructura de dominios. Un *dominio* es una región magnetizada hasta la saturación, es decir, una región dentro de la cual todos los átomos están alineados paralelamente a sus momentos magnéticos. Las dimensiones lineales de los dominios suelen ser generalmente del orden de 0,01 mm, por lo que los dominios pueden verse con un microscopio ordinario.

En los ferromagnéticos existen dominios tanto en presencia del campo como en ausencia de él. Para ver los dominios, sobre la superficie pulimentada de un monocristal ferromagnético se deposita una gota de suspensión coloidal de una sustancia ferromagnética, del tipo de la magnetita (Fe_3O_4), cuidadosamente pulverizada. Las partículas coloidales se concentran junto a las fronteras de los dominios, ya que a lo largo de estas fronteras existen fuertes campos magnéticos locales (como en cualquier imán de barra); estos campos atraen las partículas de polvo de magnetita (fig. 291).

Consideraremos primeramente los problemas que se plantean con respecto a un dominio y luego nos detendremos en la disposición mutua de los dominios en el cristal y finalmente estudiaremos el proceso de imanación del ferromagnético.

Las direcciones en que se sitúan los momentos magnéticos de los átomos que forman un dominio no son arbitrarias: en cada cristal

de un ferromagnético existe una dirección cristalográfica de magnetización más fácil. En el cobalto hexagonal esta dirección única es su eje hexagonal. En el hierro cúbico esta dirección es la arista del cubo. Es decir, en el hierro existen tres direcciones de magnetización más fácil y, respectivamente, tres direcciones de los momentos magnéticos de los dominios. En el níquel cúbico los ejes de magnetización más fácil son las diagonales espaciales del cubo, es decir, existen cuatro direcciones posibles de los momentos magnéticos.

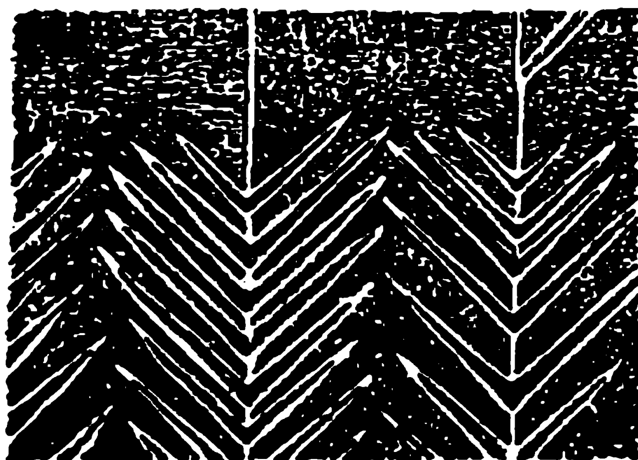


FIG. 291.

¿Por qué, en los ferromagnéticos, se alinean los átomos paralelamente a sus momentos magnéticos? La causa de que esto ocurra es un fenómeno especifico, la conmutación de puestos por los electrones. Como se dijo con motivo del enlace químico, el solapamiento de las funciones de onda acarrea una disminución de la energía. Los electrones en este caso reciben un espacio común y adquieren la capacidad necesaria para intercambiar sus puestos. La tendencia de la energía de intercambio al mínimo es la causa de la estabilidad de la mayoría de los compuestos químicos. Un papel semejante desempeña la energía de intercambio en la creación del dominio. En el caso del enlace químico el valor mínimo de la energía de intercambio se alcanza cuando los espines de los electrones intercambiados son antiparalelos. Pero la consecuencia general que saca la mecánica cuántica es más amplia: la energía de intercambio puede ser en ciertos casos mínima cuando la orientación de los espines es paralela y en otros casos, cuando es antiparalela. En los ferromagnéticos los espines de los átomos que entran en la composición de un dominio están orientados paralelamente. Hace relativamente poco tiempo fue descubierta una nueva clase de compuestos, éstos son

ferromagnéticos en los cuales el estado estable del dominio se produce cuando la orientación de los espines es antiparalela.

Midiendo el valor de la imanación del dominio se puede calcular el número de espines por átomo que intervienen en el ferromagnetismo. En este caso no se obtienen números enteros (para el hierro 2,2, para el cobalto 1,7, para el gadolinio 7,1, etc.). De aquí se deduce que, en cierta medida, en la creación del ferromagnetismo intervienen también los electrones que forman el gas electrónico. No obstante, los responsables del ferromagnetismo son los electrones ligados con los átomos. En el hierro los electrones de conducción se toman principalmente de la capa superior 4 *s*, mientras que los electrones ferromagnéticos se hallan en la capa 3 *d*.

Una demostración directa de la ausencia de toda relación entre las propiedades de conducción y de ferromagnetismo la da el hecho de que existan unos materiales admirables: las ferritas. Estos materiales son semiconductores cuya resistividad es 10—11 órdenes mayor que la del hierro. Los electrones de conducción, como es de suponer, no desempeñan ningún papel en el magnetismo de estas sustancias. Las ferritas son mezclas de óxidos, por ejemplo, la ferrita de manganeso es un compuesto de óxidos de manganeso y de hierro en la proporción 1 : 1, la ferrita de níquel es una composición semejante de óxido de hierro y óxido de níquel. El óxido de hierro tiene dos átomos de hierro, y el óxido de níquel, un átomo de níquel. El cristal de la mezcla es un empaquetamiento denso de átomos de oxígeno. En los huecos entran átomos de níquel y dos átomos de hierro. Como sabemos (véase la pág. 667), los huecos del empaquetamiento denso pueden ser de dos tipos: tetraédricos y octaédricos. El átomo que cae en un hueco del primer tipo está rodeado por cuatro átomos vecinos, y el átomo que se encuentra en un hueco octaédrico tiene seis vecinos. Resulta que los átomos de hierro se distribuyen por los huecos de ambos tipos. Los momentos magnéticos de los átomos de hierro se sitúan de un modo completamente ordenado, pero los momentos de los átomos de hierro que se encuentran en los huecos tetraédricos miran hacia un lado, y los momentos de los átomos de hierro que se hallan en los huecos octaédricos, miran hacia el lado opuesto. Como resultado, las acciones de estos dos sistemas de momentos se destruyen, y las propiedades magnéticas de esta mezcla de óxidos se deben al magnetismo del níquel, cuyos átomos tienen sus momentos orientados todos en un mismo sentido.

La existencia de la energía de intercambio hace que se comprenda la tendencia de los átomos a colocarse de tal modo que sus espines sean paralelos o antiparalelos. Es evidente que en los ferromagnéticos la energía de intercambio se sitúa en primer plano y dicta a la sustancia la disposición de los espines que conduce a su valor mi-

nimo. Por lo visto, en las demás sustancias paramagnéticas otras componentes de la energía de interación no dejan que se manifieste la energía de intercambio.

El orden de largo alcance en la disposición de los átomos se destruye a una temperatura determinada: el cristal se funde. De igual modo influye la temperatura en la disposición de los momentos magnéticos. La fig. 292 representa esquemáticamente cómo se

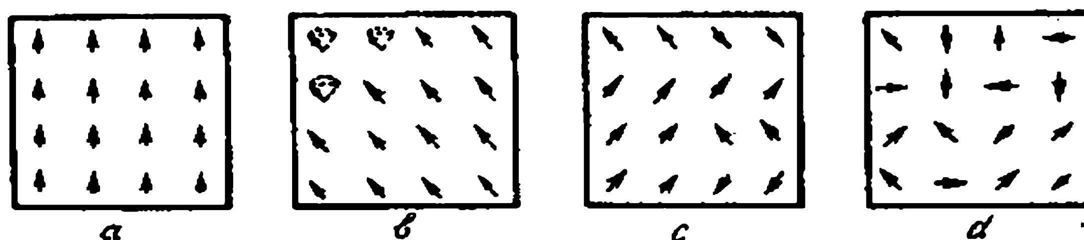


FIG. 292.

comportan los momentos magnéticos de los átomos al elevarse la temperatura. Al principio oscilan rítmicamente, después comienza el desorden y, finalmente, la «fusión» del orden magnético. A partir de una temperatura determinada, llamada punto de Curie en honor del eminente físico francés Pierre Curie, desaparece el orden en la disposición de las flechas y el cuerpo pierde sus cualidades magnéticas, es decir, el ferromagnético se transforma en una sustancia paramagnética. En el hierro el punto de Curie se halla a 770°C, en el cobalto a 115°C, en el níquel a 358°C y en el gadolinio a 15°C.

En los antiferromagnéticos los espines de los átomos tienden a colocarse en orden, pero antiparalelamente. La estructura de un dominio de óxido manganeso (MnO), que es antiferromagnético, se representa en la fig. 293. La flechita que simboliza al momento pertenece al manganeso. En la figura puede verse que el período químico de repetición de la estructura es la mitad que el magnético. A la temperatura de cero absoluto cada imán atómico del antiferromagnético está rodeado de átomos con momentos dirigidos en sentidos opuestos. Lo mismo que en los ferromagnéticos, este orden se destruye a una temperatura de Curie, determinada y por encima de este punto la sustancia se comporta como paramagnética.

Una demostración indirecta de las propiedades antiferromagnéticas es el establecimiento de diversas anomalías en el comportamiento de las propiedades del cuerpo al pasar por el punto de Curie. Como el punto de Curie es un punto de transición de fase de segundo orden, una serie de propiedades experimentan en él un salto o quebradura.

La demostración directa se ha hecho posible gracias a los métodos de la difracción neutrónica. La dispersión de los neutrones por la red representada en la fig. 293 es sensible no al período químico de repetición de la estructura, sino al magnético.

DISPOSICIÓN DE LOS DOMINIOS EN EL CRISTAL. Estudiando por el método de los polvos que hemos descrito antes la estructura

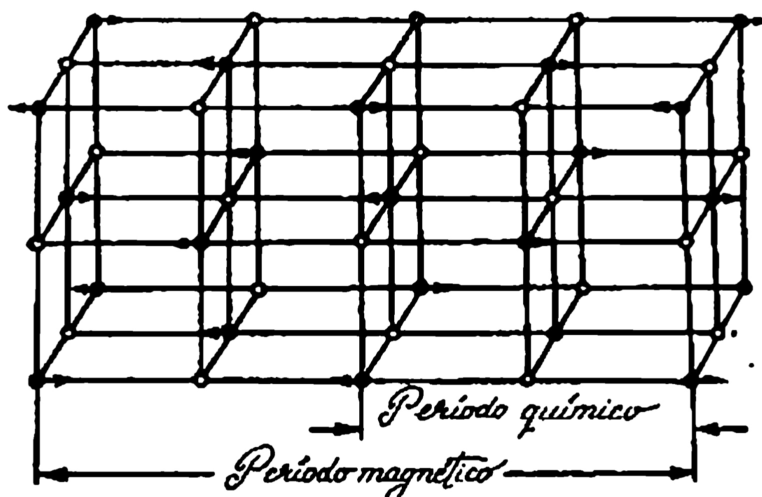


FIG. 293.

de dominios de los monocristales de las sustancias ferromagnéticas, descubrimos que los dominios no abarcan nunca regiones demasiado grandes; por lo general no superan unas dimensiones lineales del orden de 0,01 mm. En los ferromagnéticos cúbicos hallamos, además, combinaciones extraordinariamente simétricas de dominios de direcciones distintas. Estos dos hechos requieren una explicación, ya que la facilidad de magnetización debería, al parecer, conducir a que todo el monocristal se transformara en un dominio.

Los físicos soviéticos L. D. Landau y E. M. Lifshits demostraron que la estructura de dominios del tipo que se representó en la fig. 291 es el resultado natural de que existan diversas formas de energía del cuerpo ferromagnético. La fig. 294 ilustra la idea de esta teoría. El primero de los esquemas corresponde a un dominio; este dominio posee una energía magnética considerable $(1/8\,\pi) \int H^2 d\tau$. Pero ya en el segundo esquema esta energía disminuye hasta la mitad. En el caso de N dominios paralelos, la energía disminuye aproximadamente en N veces. No obstante, el proceso de división será conveniente hasta cierto límite. En fin de cuentas la energía de las capas fronterizas supera la disminución de la energía debida a la división del cristal en dominios. Se comprende perfectamente la conveniencia de las configuraciones con dominios de flujo cerrado.

En este caso se origina un flujo magnético cerrado y la energía del campo fuera del cristal es nula.

En el caso del cobalto, que posee dirección de magnetización a lo largo del eje, nos encontramos con dominios en los cuales los momentos están situados únicamente a lo largo del eje hexagonal.

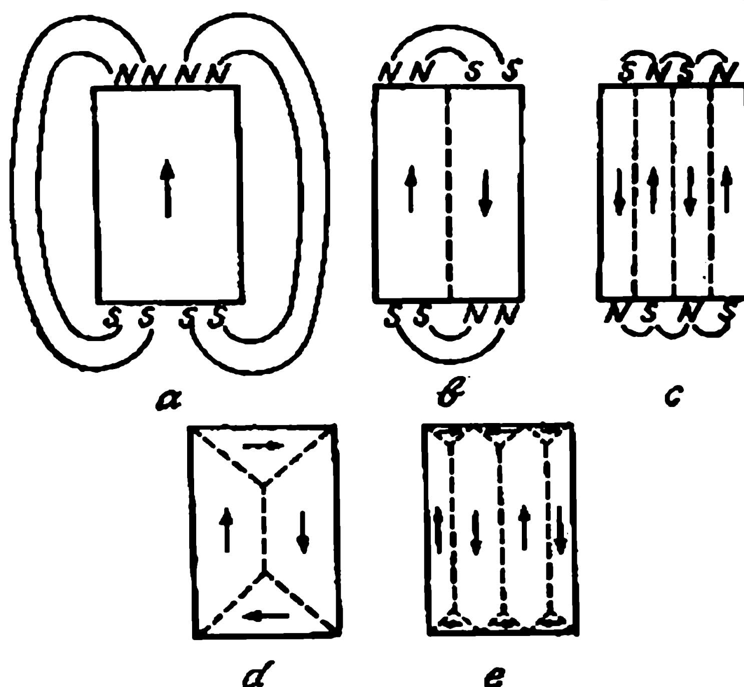


FIG. 294.

El momento magnético nulo del cuerpo, en ausencia de campo exterior, se consigue porque la mitad de los dominios tiene una dirección y la otra mitad, la opuesta.

Unas palabras acerca de la frontera entre los dominios. Esta capa fronteriza se representa esquemáticamente en la fig. 295; en ella los momentos magnéticos cambian poco a poco su dirección. El espesor de la capa está determinado por la condición de que la energía sea mínima. Aquí se observan dos tendencias opuestas. Por una parte, sería deseable extender el proceso desfavorable de viraje de los espines a un espesor mayor, esto resulta conveniente con respecto a la energía de intercambio. Por otra parte, es preferible que este proceso se realice cuanto antes, ya que en la capa transitoria los espines están dirigidos formando ángulo con las direcciones de magnetización más fácil.

Consideremos ahora lo que ocurre en el ferromagnético cuando se le aplica un campo exterior. El proceso de magnetización puede seguirse valiéndose del método de los polvos. Resulta que el mecanismo principal de la magnetización consiste en el crecimiento del

dominio que mira en la dirección «necesaria», por desplazamiento de la frontera. Los dominios orientados con su momento formando

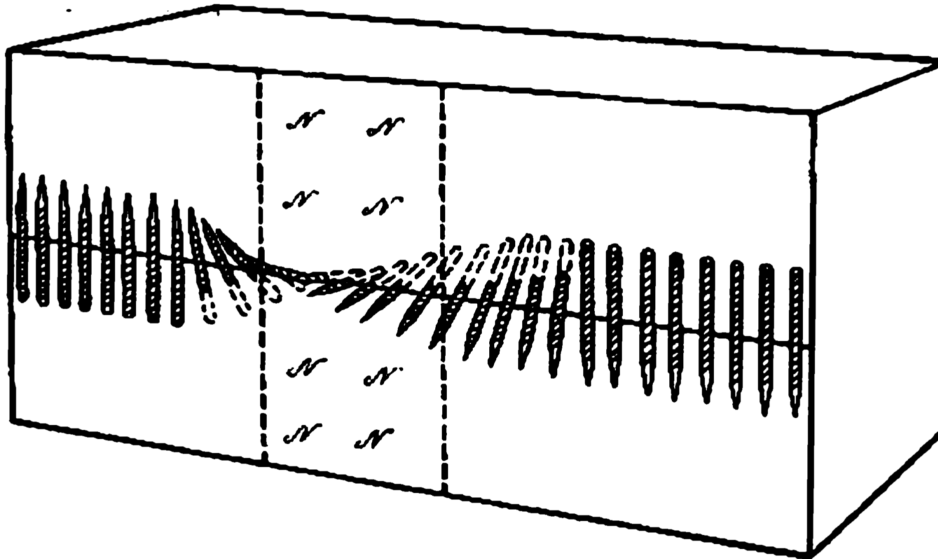


FIG. 295.

ángulo agudo con el campo, «se comen» a los dominios orientados formando ángulo obtuso con dicho campo. En el período inicial de la magnetización, el desplazamiento de las fronteras de los dominios tiene carácter reversible (cuando se quita el campo, los dominios recobran sus fronteras anteriores). Después este desplazamiento se hace irreversible. Finalmente, cuando los grados de magnetización son máximos, comienza el viraje de la dirección de magnetización de los dominios. La fig. 296 ilustra lo dicho.

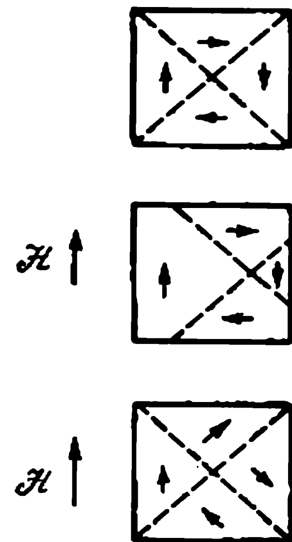


FIG. 296.

En las sustancias policristalinas se plantea la cuestión exactamente lo mismo (siempre que los cristalitos no sean demasiado pequeños, ya que cuando las dimensiones son menores de 10^{-6} cm no se forman dominios), cada grano puede estar constituido por varios dominios. Pero como los cristalitos están repartidos en el cuerpo con sus ejes cristalográficos dispuestos arbitrariamente, los momentos magnéticos de los dominios toman en el espacio direcciones cualesquiera. De este modo, las figuras elementales de magnetización, conocidas desde los tiempos de Ampere, reproducen correctamente el cuadro que se presenta en el caso de las sustancias policristalinas.

Los fenómenos de histéresis, característicos de todos los materiales ferromagnéticos, se producen en virtud del carácter irreversible que tiene el desplazamiento de las fronteras de los dominios durante la magnetización.

37

ESTRUCTURA ELECTRÓNICA Y PROPIEDADES DE LOS CUERPOS

§ 267. Electrones libres

Hasta ahora, al hablar de la estructura atómica de los sólidos y líquidos, no nos hemos detenido especialmente en el papel de los electrones en la creación de las propiedades y de la estructura de estos cuerpos. No pudimos hacerlo por la sencilla razón de que la estructura electrónica de los cuerpos rara vez aparece en primer plano. Pero al mismo tiempo, en una serie de problemas de la física es imposible no tener en cuenta dicho papel.

Sabemos que en el cuerpo existen dos «tipos» de electrones: ligados y libres. Los electrones ligados entran en la composición de un determinado átomo, ion o molécula. Los electrones libres pertenecen a todo el cristal o a todo el líquido y son capaces de trasladarse entre los átomos con gran facilidad.

La estructura electrónica se aprecia con especial claridad en las sustancias moleculares. En la mayoría de los casos no existen electrones «socializados». Todos los electrones permanecen dentro de los «contornos» de la molécula. Esta delimitación de los electrones se consigue ya establecer menos claramente en los cristales iónicos. Incluso en los representantes clásicos del enlace iónico es imposible suponer la inexistencia absoluta del intercambio de electrones. No obstante, en los cristales iónicos, los electrones que pasan de un ion a otro (electrones de intercambio) no se comportan como libres: sus traslaciones por el cristal tienen el carácter de transmisión del electrón de un átomo al vecino. En los cristales con enlace homopolar esto se observa con bastante claridad. El diamante es aislador a pesar de que los electrones que enlazan a los átomos de carbono no están ligados en modo alguno a unos puestos determinados, sino que se transmiten de un átomo a otro por relevos.

Los metales se distinguen bastante claramente de todos los cuerpos que hemos enumerado. En ellos nos encontramos con electrones con respecto a los cuales está completamente justificado el

término de «libre». Los electrones del metal se trasladan por él lo mismo que las partículas de un gas a través de un tubo lleno de obstáculos. El papel de obstáculos lo desempeñan los restos atómicos (es decir, los iones) que se hallan en estado de oscilación térmica.

La existencia de los electrones libres se manifiesta, ante todo, en los fenómenos de conductibilidad y en todos los experimentos relacionados con el arranque de un electrón del cuerpo. Este conjunto de fenómenos sería imposible de comprender sin tener en cuenta el comportamiento peculiar de los electrones «socializados».

Es claro que sería erróneo suponer que la división de los electrones en ligados y libres tiene un carácter absoluto. Al contrario, lo más correcto es considerar los conceptos de enlace y de libertad como dos representaciones ideales extremas. En un sólido pueden encontrarse electrones de todos los grados de «liberación». Esto se comprendió con particular claridad cuando los semiconductores ocuparon en la física el puesto que les correspondía, llenando todos los intervalos entre los esquemas del sistema de electrones perfectamente libres y del sistema de electrones de intercambio o del sistema de moléculas electrónicas aisladas. En la actualidad está claro que son posibles todos los tipos transitorios de estructuras.

Conviene recordar que el electrón en el sólido, lo mismo que el electrón atómico, obedece a la mecánica ondulatoria. La idea del electrón como «bolita» sólo es correcta dentro de los límites que determinan el principio de incertidumbre. En la mayoría de los casos todos los razonamientos acerca de las trayectorias del electrón dentro de un metal carecen de contenido físico. La descripción de la estructura electrónica de un cuerpo consiste, ante todo, en indicar la distribución de los electrones por energías.

La teoría demuestra que la representación de los electrones en el cuerpo como un gas electrónico sólo puede utilizarse en un sentido muy convencional. Resulta posible considerar los electrones del metal como un gas de ciertas partículas ficticias, poseedoras de una masa efectiva dependiente de la dirección de su movimiento. Con estas advertencias queremos prevenir del carácter extremadamente superficial que tiene la analogía entre el gas electrónico y el gas de moléculas.

§ 268. Niveles energéticos en el sólido

Con anterioridad hemos estudiado los niveles de energía del átomo libre. El sistema de niveles de energía peculiar del átomo se halla por vía experimental, observando las transiciones energéticas cuando emite o absorbe luz. Si un átomo tiene muchos electrones, cada uno de ellos, al entrar en la composición del átomo, adquiere una cuaterna distinta de números cuánticos; según el prin-

cipio de Pauli, en un estado cuántico dado sólo puede encontrarse un electrón. Por esta razón los niveles energéticos poseen una capacidad limitada. En los estados *s* pueden hallarse dos electrones, en los estados *p*, seis y así sucesivamente. Todos estos datos pueden obtenerse de la experiencia y como consecuencia de las leyes fundamentales de la mecánica cuántica.

Si queremos formarnos una idea acerca de los niveles de energía de un sistema formado por gran número de átomos tenemos que ir también por estos dos caminos. Cuando se estudia un sistema constituido por millares de millones de átomos, las ideas teóricas fundamentales permanecen invariables. Por esto, en primer lugar, sacamos la siguiente conclusión: en un sistema formado por n átomos, el número de estados cuánticos debe ser n veces mayor que en un átomo libre. En este caso puede satisfacerse el principio de Pauli: en un estado cuántico se encontrará, lo mismo que antes, un solo electrón.

Cualquiera que sea el cuerpo, el átomo nunca pierde por completo su individualidad. Al contrario, las investigaciones espectrales nos dicen que las variaciones esenciales afectan únicamente a los electrones exteriores o de valencia, que son los que responden de la interacción entre los átomos. Por lo tanto el estado cuántico del sólido debe estar íntimamente ligado con los estados cuánticos del átomo. Consideremos, por ejemplo, los electrones de la capa K, que son los más próximos al núcleo. Por una parte, es evidente que su estado sólo puede variar de un modo muy insignificante al unirse los átomos para formar el cuerpo. Pero al mismo tiempo, el principio de Pauli no nos permite considerar iguales todos los electrones K. Hay que admitir, pues, que en el cuerpo de n átomos existe no un nivel K de energía, sino n niveles K extraordinariamente próximos y en cada uno de ellos hay un par de electrones con espines de sentido contrario.

Este razonamiento se hace extensivo a los otros niveles de energía. Suponemos, por lo tanto, que la relación de los estados cuánticos del cuerpo y del átomo viene dada por la regla siguiente: un cuerpo de n átomos tiene n veces más niveles de energía que un átomo aislado. En este caso la distribución en n partes ocurre en cada nivel del átomo libre. Esto significa que los niveles energéticos del cuerpo pueden considerarse como un sistema de bandas. Cada banda es un nivel desintegrado del átomo; por esto dichas bandas pueden designarse con los mismos símbolos $1s$, $2s$, $2p$, etc., que se utilizan el la espectroscopía atómica. El número de electrones cuya energía constituye una banda será, como es natural, n veces mayor que el número de electrones que hay en la capa correspondiente del átomo. Así, en las bandas $1s$ y $2s$ habrá $2n$ electrones, en cada una, en la banda $2p$, $6n$ electrones, y así sucesivamente.

La anchura de la banda depende de las fuerzas de interacción entre los átomos. Esta idea se ilustra con la fig. 297. El esquema de la izquierda representa los niveles energéticos del átomo de de sodio, y el de la derecha, el ensanchamiento de los niveles en bandas al formarse la red cristalina. Sobre el eje horizontal se ha tomado $1/r$. Un ensanchamiento sensible del nivel $1s$ podría obtenerse a distancias interatómicas absolutamente irrealizables. Las bandas $2s$ y $2p$ tampoco se ensanchan prácticamente en las condiciones ordinarias (línea de trazos). En cambio las bandas $3s$ y $3p$ se ensanchan tanto, que se superponen. Esto quiere decir, que la interacción entre los átomos de sodio en las condiciones ordinarias afecta únicamente a los electrones superiores. (El sodio carece de electrones en el estado $3p$. No obstante, los niveles energéticos no ocupados también nos van a interesar si la energía de excitación es suficiente para el paso del electrón a dicho nivel).

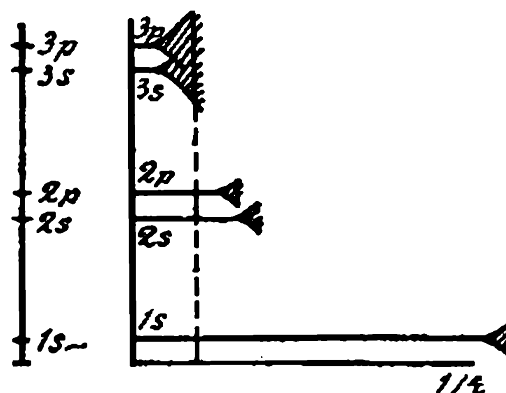


FIG. 297.

¿Qué significa la superposición de las bandas $3s$ y $3p$? En esencia esto significa que nuestro esquema de correspondencia de los niveles energéticos del átomo y del cuerpo falla en este caso. Pero esta circunstancia no debe extrañarnos. La superposición de las bandas significa que las propiedades de la función de onda del electrón que se halla en la región de recubrimiento difieren de las propiedades de las funciones de onda del electrón atómico. Así, por ejemplo, el electrón exterior del átomo libre de sodio es el electrón s. En el sodio líquido o sólido las bandas $3s$ y $3p$ se superponen; el comportamiento de los electrones externos del sodio difiere del comportamiento del electrón s y se ponen de manifiesto ciertas propiedades especiales, que a veces reciben el nombre de híbridas (es decir, en su comportamiento se mezclan las peculiaridades de las funciones de onda s y p).

¿Cómo se pueden establecer experimentalmente las regularidades descritas? Esto se hace por los métodos espectrales. En efecto, para demostrar la existencia de la banda de energía, en vez de un nivel de energía claro, hay que investigar las transiciones de los electrones desde la banda alta a la baja. Lo que en el átomo libre habría ocasionado una raya nítida, da aquí una banda espectral ancha.

Lo más fácil es estudiar las transiciones desde la banda de energía a un nivel nítido, por ejemplo, en el caso del sodio, estudiar las transiciones al nivel $2p$. La banda espectral que aparece en este caso proporciona información no sólo acerca de la anchura de la banda de energía, sino también sobre la distribución de los electrones por energías. Para conseguir estos datos hay que arrancar electrones de la capa $2p$ (para el sodio). Las transiciones que se producen dan unas frecuencias, difíciles de observar, que se encuentran en la región de los rayos X blandos (de centenares de angstrom). La investigación se lleva a cabo en tubos especiales de rayos X; la sustancia que se estudia sirve de ánodo.

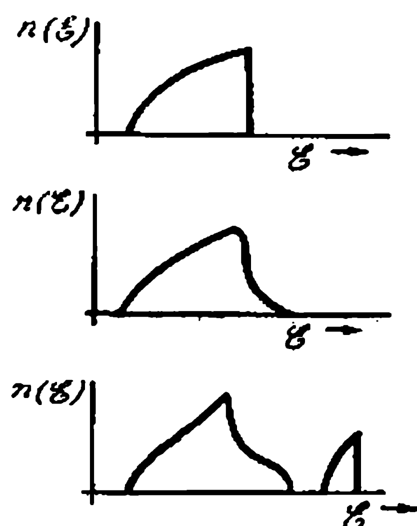


FIG. 298.

Midiendo la intensidad de la banda espectral que se produce, obtenemos la curva de intensidad en función de la frecuencia ν. Pero la frecuencia $\nu=\mathcal{E}/h$ (bonde $\mathcal{E}$ es la energía de transición, es decir, la energía calculada con respecto al nivel nítido que se desaloja), y la intensidad para una ν dada es proporcional al número de electrones que poseen la energía $\mathcal{E}$. La experiencia nos da las curvas $n(\mathcal{E})$ en función de $\mathcal{E}$, donde $n(\mathcal{E})$ es la parte de los electrones de la banda cuya energía se encuentra entre $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}+d\mathcal{E}$. La fig. 298 representa tres curvas características. En el primer caso la experiencia indica que existe una banda de energía limitada bruscamente por la parte del máximo. Todos los niveles energéticos inferiores están ocupados. El corte brusco indica que los niveles inferiores están totalmente ocupados, es decir, que en cada uno de ellos hay dos electrones. La segunda curva es típica para las temperaturas elevadas; el extremo de la banda se hace borroso, siendo la anchura de esta borrosidad del orden de kT. Esto significa que una parte de los electrones se encuentra en estado excitado y puede ocupar parcialmente niveles más altos. La tercera curva es muy interesante: indica la existencia de dos bandas que no se superponen. La banda inferior está ocupada, la superior comienza a llenarse. Entre las bandas de energía permitidas existe una banda prohibida.

§ 269. *Gas electrónico*

De lo expuesto anteriormente queda claro que para la teoría del sólido sólo tienen interés las bandas de energía superiores, ya que los electrones que se encuentran en niveles más bajos no parti-

cipan prácticamente en la interacción de los átomos. ¿Cómo puede describirse el comportamiento de los electrones de las bandas superiores? Como se trata de un número enorme de electrones, es natural que se nos ocurra considerar el conjunto de los electrones aplicando los métodos de la física estadística, es decir, como un gas particular.

El estado de cada electrón del gas puede darse por un punto en el espacio de los impulsos (p_x, p_y, p_z). La dirección del movimiento del electrón coincide en esta representación con el radio vector $\boldsymbol{p}$. La energía depende del impulso del electrón. En un cristal la energía del electrón será distinta para las diferentes direcciones de movimiento. Prescindamos ahora de esta circunstancia y supongamos que los electrones se comportan como partículas libres. A pesar del carácter extremadamente inexacto de esta suposición (es decir, a pesar de que prescindamos de la energía potencial del campo en que se mueven los electrones y de la interacción de estos últimos), las consecuencias que de ella se deducen caracterizan bien —por lo menos desde el punto de vista cualitativo— el comportamiento de los electrones del sólido que forman la banda de energía.

Si los electrones son libres, la relación entre la energía y el impulso viene dada por la fórmula $\mathscr{E}=p^2/(2m)$. Esto significa que, en el espacio de los impulsos, la superficie de igual energía es una esfera. A esta esfera se le da el nombre del físico italiano E. Fermi. Como vimos en el párrafo anterior, de la experiencia puede hallarse $\mathscr{E}_{máx}$, es decir, la energía máxima de los electrones en la banda. Puede decirse, por lo tanto, que el estado del gas electrónico contenido en una esfera de radio $p_{máx}=\sqrt{2m\mathscr{E}_{máx}}$. De este modo, la superficie de Fermi puede llamarse también superficie de máxima energía.

Para comprobar la corrección cualitativa de la teoría puede calcularse el número de electrones que entran en la banda por el valor de $\mathscr{E}_{máx}$. Razonaremos del modo siguiente. De acuerdo con el principio de incertidumbre, la proyección del impulso de una partícula no puede determinarse en un trozo de metal, cuya dimensión lineal sea L, con una exactitud mayor que h/L. Por esta razón, el concepto de punto del espacio de impulsos debe sustituirse por el de celdilla de este espacio, cuyo volumen será h^3/V, siendo V el volumen del trozo de metal que se considere. Uno de los postulados fundamentales de la teoría consiste en suponer que esta celdilla representa un estado cuántico y que en ella no puede haber más de dos electrones, cuyos espines estén dirigidos en sentidos opuestos. Si en el volumen V hay N electrones en la banda que se estudia, estarán ocupadas $N/2$ celdillas, es decir, el volumen $(N/2)(h^3/V)$. Este es el volumen de Fermi de radio $p_{máx}$. Por consiguiente,

$$\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2m\mathscr{E}_{máx}}\right)^3=\frac{N}{2}\frac{h^3}{V},$$

Partiendo de esta ecuación pueden hallarse números N bastante razonables. Esto demuestra que las suposiciones hechas reflejan, en cierta medida, la verdad.

Ejemplo. La experiencia da, que el orden de la energía máxima en un metal $\mathcal{E}_{máx} \sim 10\,eV = 16\cdot 10^{-12}$ erg. De aquí hallamos $p_{máx} = \sqrt{2m\mathcal{E}_{máx}} \sim 2\cdot 10^{-19}$ g cm/s, es decir, que la velocidad máxima de los electrones en el metal será del orden

$$v_{máx} = \frac{p_{máx}}{m} \sim \frac{2\cdot 10^{-19}}{9\cdot 10^{-28}} \sim 2\cdot 10^{8}\ \text{cm/s}.$$

En este caso el número de electrones N que hay en la unidad de volumen será una magnitud del orden

$$N = 2\cdot \frac{4}{3}\pi\,(\sqrt{2m\mathcal{E}_{máx}})^3\,\frac{1}{h^3} \sim 10^{22}.$$

Los razonamientos hechos son correctos si la temperatura es de cero absoluto. Cuando la temperatura aumenta, los electrones pueden pasar a celdillas del espacio de impulsos a las cuales les corresponde una energía mayor. Esta transición la realizarán los electrones que se encuentran en las celdillas próximas a la superficie de Fermi (de lo contrario se necesitaría una energía de transición demasiado grande, que sería poco probable), y los límites de la esfera se disiparán. Sólo cuando las temperaturas sean muy considerables la excitación podrá apoderarse de electrones de energías inferiores. A medida que aumenta la temperatura se produce una disminución del grado de degeneración del gas electrónico. El gas electrónico está fuertemente degenerado, sobre todo a temperaturas bajas. El término «degenerado» significa que estados cuánticos distintos poseen una misma energía.

Puede calcularse la distribución de los electrones por energías para una temperatura dada. Esta distribución difiere de la de Boltzmann. Según la ley de Boltzmann, a la temperatura de cero absoluto la energía de los electrones debe ser nula. Desde el punto de vista de la nueva teoría, la energía de los electrones a dicha temperatura es bastante grande *); a esto nos conduce el principio de Pauli. Teniendo en cuenta este principio puede construirse una nueva esta-

* $\mathcal{E}_{máx}$ es una magnitud del orden de varios eV, mientras que la energía media del movimiento térmico (kT) mide centésimas de eV. De este modo, a la temperatura de cero absoluto los electrones también se encuentran en movimiento bastante rápido. La velocidad de los electrones a dicha temperatura es 1000 veces mayor que la velocidad del movimiento de los átomos a la temperatura ambiente. Esto conviene subrayarlo una vez más para que quede claro que la relación de la energía cinética y la temperatura que existe en las moléculas no es aplicable a los electrones. De aquí se deduce también que el gas electrónico posee una capacidad calorífica insignificante. La presencia o ausencia de gas electrónico en un cuerpo no influye en su capacidad calorífica.

dística (la estadística de Fermi — Dirac), que en vez de la función $e^{\mathcal{E}/kT}$ conduce a la expresión

$$\frac{1}{e^{(\mathcal{E}-\mathcal{E}_{máx})/kT}+1}\,,$$

donde $\mathcal{E}_{máx}$ es la energía máxima posible de los electrones a la temperatura de cero absoluto. Este factor multiplicado por la distribución de los electrones a cero absoluto, da la distribución de los mismos a cualquier temperatura.

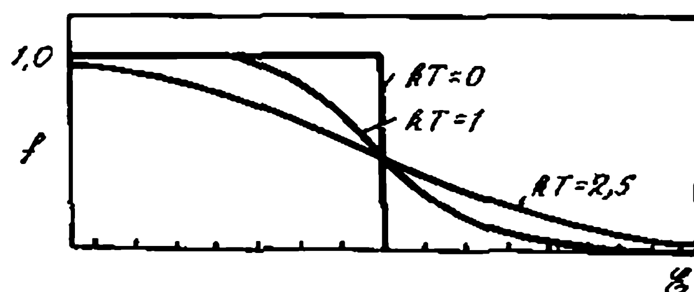


FIG. 299.

La fig. 299 muestra la marcha de la función de Fermi — Dirac, en dependencia de $\mathcal{E}$, para los valores de $kT=0$, 1 y 2,5 eV.

Es necesario prestar atención a que existen diferentes estadísticas para las distintas partículas. Para las moléculas se utiliza la estadística de Boltzmann, para los fotones, la de Bose — Einstein, y para los electrones (y otras partículas con espín de 1/2), la de Fermi — Dirac.

La diversidad de enfoques estadísticos reside en los diferentes procedimientos de distribución de las partículas por los estados posibles.

Supongamos que existen dos estados posibles en los cuales hay que alojar dos partículas. En este caso, en la estadística de Boltzmann, en que las partículas poseen individualidad, hay que tener en cuenta las siguientes posibilidades: 1) las dos partículas pueden estar en el primer estado; 2) las dos partículas pueden estar en el segundo estado; 3) la primera partícula puede estar en el primer estado y la segunda, en el segundo; 4) la segunda partícula puede estar en el primer estado y la primera, en el segundo. En total tenemos cuatro posibilidades.

En la estadística de Bose — Einstein las partículas son indistinguibles. Por lo tanto existen tres posibilidades: 1) las dos partículas están en el primer estado; 2) las dos partículas están en el segundo estado; 3) una partícula se encuentra en el primer estado y otra en el segundo.

En la estadística de Fermi — Dirac se toma en consideración el principio de Pauli: en un estado sólo puede haber una partícula. El número de distribuciones posibles se reduce hasta la unidad: una partícula en cada uno de los estados.

Así, pues, los electrones exteriores de los átomos del sólido se comportan como el gas electrónico. Este es un gas muy peculiar y sus partículas obedecen la estadística de Fermi — Dirac.

§ 270. Conductibilidad

En ausencia de un campo eléctrico, el estado del gas electrónico es tal, que el número de electrones que se mueven de derecha a izquierda es igual al de electrones que se desplazan en dirección contraria. Cuando se aplica un campo aparecen fuerzas que hacen que los electrones se muevan a lo largo del campo. La distribución de los electrones en el espacio de impulsos pierde su simetría con respecto al origen de coordenadas; esta distribución se desplaza en la dirección del campo. Junto al movimiento caótico de los electrones, cuya velocidad es enorme, aparece un movimiento ordenado que crea la corriente eléctrica.

Para que la distribución de los electrones se desplace es necesario, claro está, que los electrones pasen de los estados de menor energía a estados de energía mayor. Esta transición siempre es posible si en la banda de energía existen puestos libres. Pero si la banda de energía está totalmente ocupada, es decir, si todos los niveles están ocupados por electrones, de acuerdo con las posibilidades que ofrece el principio de Pauli, los electrones no tienen a dónde pasar, por lo menos hasta que no se les suministre la energía necesaria para el salto a la banda siguiente.

Si no existiera el efecto de superposición de las bandas, de que hablamos antes, podría suponerse que todos los elementos que poseen un electrón de valencia deben ser conductores, y que todos los elementos con dos electrones, cedidos a la posesión común al formarse el sólido, deben ser aisladores. Efectivamente, el sodio tiene un electrón en el nivel 3*s*. Al formarse un cuerpo de N átomos de sodio, este nivel se desintegra en N niveles. En cada uno de estos niveles pueden alojarse dos electrones que tengan los espines opuestos, es decir, en total $2N$ electrones. Pero sólo tenemos N electrones de valencia, y por consiguiente, la mitad de la banda energética queda libre. El elemento vecino, según la tabla de Mendeléiev, es el magnesio, que tiene dos electrones (por átomo) en el nivel 3*s*. Por esto al formarse un cristal de magnesio todos los niveles deberían estar ocupados si no existiera el efecto de superposición de las bandas energéticas.

El estudio de las formas de las bandas en los diversos elementos muestra, que la explicación que hemos dado del origen de las propiedades conductoras es completamente correcta. Solamente cuando la banda superior o las bandas que se confunden no están ocupadas totalmente, el cuerpo puede considerarse conductor.

En el cuerpo conductor, la distribución de los electrones en el espacio de impulsos puede desplazarse en la dirección del campo. El número de electrones que se mueven según el campo y en sentido contrario a éste se hace distinto, aparece la corriente eléctrica. En el aislador todas las bandas energéticas están totalmente ocupadas. Las intensidades ordinarias del campo no pueden crear fuerzas capaces de trasladar los electrones a la banda vecina más elevada (si insistimos en nuestro empeño de hacer pasar los electrones del aislador a la banda vecina, lo único que conseguiremos será perforar este dieléctrico). La distribución de los electrones conserva su simetría en el espacio de impulsos y los números de electrones que se mueven hacia la izquierda y hacia la derecha continuarán siendo iguales el uno al otro, es decir, no hay corriente.

Volvamos a ocuparnos de los conductores y valoremos, aunque sea de un modo aproximado, la conductibilidad eléctrica de un cuerpo que tenga n electrones libres por unidad de volumen. En este caso se entiende por electrones libres o de los de conducción aquellos electrones que se encuentran en las bandas energéticas no ocupadas por completo.

Suponemos que el movimiento de los electrones por la acción de la fuerza aceleradora eE se realiza durante cierto intervalo pequeño de tiempo $\tau=l/v$. Aquí v es la velocidad del electrón y l la longitud media del recorrido libre. El electrón efectúa su recorrido con la enorme velocidad caótica. La velocidad del movimiento ordenado de los electrones que crea la corriente eléctrica es muchos órdenes de magnitud menor que dicha velocidad caótica y por esto no figura en el denominador de τ. El movimiento con la aceleración eE/m durante el tiempo τ hace que el electrón alcance la velocidad $(eE/m)\times$ $\times(l/v)$. Esta es la velocidad que, debe tener el movimiento ordenado de los electrones que crea la corriente $u\approx eEl/(mv)$.

La densidad del flujo electrónico no es otra cosa que la cantidad de electricidad que pasa por la unidad de superficie en la unidad de tiempo, es decir, $j=neu$. Sustituyendo aquí u por el valor que hemos obtenido, tenemos:

$$j=\frac{ne^2l}{mv}E.$$

Recordando (pág. 322) la ley de Ohm en forma diferencial, $j=\sigma E$, obtenemos para la conductibilidad eléctrica la expresión:

$$\sigma\approx\frac{ne^2l}{mv}.$$

Esta expresión debe considerarse solamente como valoración aproximada de la conductibilidad eléctrica. Las simplificaciones que hemos hecho para obtener esta valoración son tan grandes, que en el mejor de los casos esta fórmula únicamente puede estar de acuerdo con la experiencia en cuanto se refiere al orden de magnitud. Pero a nosotros nos interesan precisamente las apreciaciones cualitativas. Sólo esta magnitud y la longitud del recorrido libre pueden variar de una sustancia a otra.

Ejemplo. Si la longitud del recorrido libre del electrón en un metal es $l \sim 10$ Å $= 10^{-7}$ cm, y v (véase el ejemplo de la pág. 762) es del orden de 10^{8} cm/s, el tiempo del recorrido libre será $\tau = 10^{-15}$ s.

Supongamos que la caída de tensión en un trozo del conductor metálico de 1 cm de longitud y 1 cm² de sección es igual a 0,003 V $= 10^{-5}$ u. C.G.S. En este caso $E = 10^{-5}$ u.C.G.S. y la velocidad del movimiento ordenado del electrón será $u \sim \frac{eEl}{mv} \sim 5 \cdot 10^{-3}$ cm/s. La densidad de la corriente $j = neu \sim 10^{23} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 5 \times \times 10^{-3} \sim 30 \cdot 10^{10}$ u. C.G.S. $= 100$ A/cm². Esto da un valor de la conductibilidad bastante razonable:

$$\sigma \sim 25 \cdot 10^{15} \text{ u. C.G.S.} \sim 25 \cdot 10^{15} \text{ u. C.G.S.} \approx 28 \cdot 10^{4} \text{ Ohm}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}.$$

Si el cristal fuera una red cristalina perfecta y la temperatura se aproximara al cero absoluto, no veríamos limitación del recorrido libre y la sustancia carecería de resistencia eléctrica. El recorrido del electrón está limitado por las oscilaciones térmicas de los átomos y por la existencia de defectos de tipos distintos en el cristal. Estos dos factores alteran la perioricidad ideal del campo en que se mueve el electrón y son causa de la dispersión de los electrones. De aquí se deduce que la conductibilidad de un cuerpo deberá mejorar a medida que desciende la temperatura y tender a cierto límite dependiente del grado de perfección de la red cristalina.

La disminución de la resistencia al descender la temperatura se observa en la práctica para los metales. Esto se considera demostración de que la teoría es correcta para dichos cuerpos. Es más, la disminución de la resistencia eléctrica al descender la temperatura se considera como indicio importante de que el cuerpo es metal. La deformación plástica del metal, la alteración de la red del mismo por bombardeo nuclear y, en general, cualesquiera fenómenos que aumenten los defectos del cristal, disminuyen el recorrido libre y de este modo acarrean un aumento de la resistencia eléctrica.

En la parte I (pág. 235) se estudiaron los fenómenos de conductibilidad térmica de los gases. Se demostró entonces que la conductibilidad térmica del gas es proporcional al recorrido libre y viene expresada por la fórmula $\varkappa \sim \rho\, vlc_p$. ¿No podría aplicarse esta fórmula al cálculo de la conductibilidad térmica de los metales? En efecto, los electrones son mucho más ligeros que los átomos y podemos

suponer que la transición del calor se efectúa por medio de los electrones, los cuales transmiten la energía de un átomo a otro. Como no conocemos la longitud del recorrido libre, el cálculo del coeficiente de conductibilidad térmica es imposible. Pero si prestamos atención, vemos que la relación de los coeficientes de conductibilidad eléctrica y térmica no contiene parámetros desconocidos y que sólo depende de constantes universales y de la temperatura:

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = \text{cons} \cdot T$$

(*fórmula de Wiedemann y Franz*). La comparación de esta fórmula con la experiencia da buenos resultados. Como ilustración damos a continuación los valores de la magnitud $\varkappa/\sigma T$ a 0°C para algunos metales.

Metal	Ag	Au	Cu	Mo	Pb	Pt	Sn	Zn
$\frac{\varkappa}{\sigma T} \cdot 10^{8} \frac{W \cdot \Omega}{{}^{\circ}K^{2}}$	2,31	2,36	2,23	2,61	2,47	2,51	2,52	2,31

El valor teórico de esta magnitud es igual a $2{,}45 \cdot 10^{-8}$.

§ 271. *Superconductividad*

El grado de imperfección del cristal es siempre considerable y por esto la resistencia residual se alcanza generalmente a temperaturas de varios grados Kelvin y en adelante permanece invariable. No obstante, existe cerca de una decena de metales que se comportan de un modo completamente peculiar. A temperaturas perfectamente determinadas, próximas al cero absoluto, estos metales pierden totalmente su resistencia eléctrica. Si por inducción electromagnética se excita en un anillo de metal superconductor de este tipo una corriente eléctrica, esta corriente circulará por dicho anillo durante un día. Por lo tanto la resistencia no disminuye, sino que se anula y, además de golpe.

De los metales puros, el niobio es el que posee la temperatura T_c, a que aparecen las propiedades superconductoras, más elevada (cerca de 9°K). La temperatura T_c más baja le corresponde al hafnio y es de cerca de 0,3°K.

Podría parecer que la superconductividad es una propiedad que tienen todos los metales; basta disminuir todavía más la temperatura y descubriremos las propiedades superconductoras. Pero esto, por

lo visto, no es así. En muchas sustancias sometidas a investigación a temperaturas de hasta 0,03°K no se han podido descubrir propiedades superconductoras. El criterio de que las propiedades superconductoras no son universales se ve apoyado por la circunstancia de que todos los metales superconductores ocupan un puesto determinado en la tabla de Mendeléiev, su parte media.

Además de los metales puros antedichos, son también sustancias superconductoras muchas aleaciones de aquéllos entre sí y con metales no superconductores. Así mismo han resultado ser superconductores ciertos compuestos químicos como, por ejemplo, el sulfuro cúprico (CuS), a pesar de que ni el azufre ni el cobre son superconductores. El nitruro de niobio (NbN) pone de manifiesto propiedades superconductoras a una temperatura superior a 30°K.

La desaparición de la resistencia eléctrica a la temperatura T_c no es la única peculiaridad de los superconductores. Otro indicio del superconductor es su comportamiento característico en el campo magnético, que se reduce, aproximadamente, a que dicho campo penetra en el conductor únicamente hasta una profundidad del orden de 1000 Å. Si se prescinde de películas extraordinariamente delgadas, cuyo comportamiento es algo particular, puede decirse resumiendo, que, dentro del superconductor, el campo magnético es nulo. Sin embargo, esto sólo es así hasta que el campo exterior aplicado no supera cierto valor crítico H_c. Si la densidad del campo es mayor que este valor crítico, el estado superconductor desaparece: el campo magnético penetra dentro del cuerpo y se restablece la resistencia eléctrica.

La magnitud H_c no es constante, sino que depende de la temperatura. A una temperatura igual a T_c basta un campo exterior insignificante para suprimir el estado superconductor. Resumiendo, a $T = T_c$, la intensidad crítica $H_c = 0$. Al disminuir la temperatura, H_c aumenta monótonamente y alcanza su valor máximo a la temperatura de cero absoluto. Por ejemplo, para el mercurio (cuya temperatura $T_c = 4,2$°K) el valor máximo de la intensidad crítica del campo magnético es igual a 412 Oe.

La resistencia eléctrica es consecuencia de la dispersión de los electrones por las ondas térmicas de los átomos de la red cristalina. Estas ondas térmicas, como sabemos, debido a la existencia de la energía del punto cero, existen también a la temperatura de cero absoluto. Por esta razón, al parecer, la resistencia eléctrica no debería desaparecer por muy bajas que fueran las temperaturas. ¿Cómo es posible que se conserve la dispersión térmica de los electrones a la vez que cesa la resistencia a la corriente eléctrica?

La respuesta a esta pregunta sólo pudo darse en 1937. Valiéndose de los métodos de la mecánica cuántica se demostró, que los electrones de energía comprendida en una capa delgada contigua a la

superficie de Fermi son capaces de «aparearse» en virtud de la interacción con las oscilaciones térmicas de la red cristalina. Resultó que, a bajas temperaturas, se hace conveniente, desde el punto de vista energético, un estado de cosas tal, que se «unan» dos electrones con espines iguales y de sentido contrario. Ponemos entre comillas las palabras «aparearse» y «unan» porque las funciones de ondas de estos electrones se extienden, como demuestran los cálculos, a una gran distancia, del orden de 10^{-4} cm (dimensión del grano cristalino en un metal policristalino). Por consiguiente, las parejas formadas no podemos figurárnoslas como «moléculas» sui géneris; el enlace se efectúa a gran distancia por medio de las ondas térmicas.

De la teoría se deduce que todos los pares de electrones son idénticos, en el sentido de que poseen el mismo impulso total.

La «materia» formada por estos pares de electrones posee propiedades de superconductor. El pareado de los electrones no excluye la dispersión térmica de los mismos: la superconductividad aparece debido a que la dispersión de los electrones que constituyen el par deja de influir en la intensidad de la corriente. La dispersión térmica sólo puede romper tal o cual pareja o, al contrario, formar un nuevo par de electrones individuales. Pero la magnitud de la corriente se determina por el impulso total de los electrones, que permanece constante. Por lo tanto, en este esquema la dispersión térmica sólo puede ocasionar fluctuaciones de la corriente eléctrica, pero no su interrupción.

Junto a los electrones «apareados», en el superconductor existe el gas electrónico ordinario, es decir, un gas de electrones individuales. De este modo, en el superconductor existe algo así como dos fluidos, uno ordinario y otro superconductor (véase la pág. 700). Si la temperatura del superconductor comienza a elevarse a partir de cero grados, el movimiento térmico romperá un número cada vez mayor de pares de electrones y la parte de gas electrónico ordinario aumentará. Finalmente, llega la temperatura crítica, a la que desaparecen los últimos electrones apareados.

Todos los fenómenos de superconductividad a que nos referimos antes, se explican cualitativamente por esta nueva teoría.

Durante los últimos años se han empezado a aplicar en la técnica los fenómenos de superconducción. Las investigaciones teóricas de los físicos soviéticos han demostrado que los campos críticos de los llamados superconductores de segundo orden pueden alcanzar valores de 300 000 Gs. La creación de electroimanes con campos de este tipo, que no requieren gastos de energía, es un acontecimiento para muchas ramas de la técnica (un electroimán ordinario que tuviera este campo necesitaría una potencia eléctrica de cerca de 20 millones de W, cifra que expresa el consumo de energía eléctrica de una población de 20 mil habitantes). Materiales adecuados para hacer el deva-

nado son el Nb_3Sn y las aleaciones Nb — Zr y Nb — Ti. Los modelos industriales de imanes superconductores, que funcionan en «baños» de helio, dan campos de más de 100 000 Gs, de extraordinaria uniformidad (10^{-6} por cm^3), factor muy importante para muchas de las aplicaciones de los imanes.

§ 272. Semiconductores

PROPIEDADES. A los semiconductores pertenece una clase muy numerosa de sustancias (elementos y diversos compuestos químicos) cuya conductibilidad llena el amplísimo intervalo que existe entre los conductores y los aisladores. Si la tensión de 1 V crea un cubo metálico de 1 cm^3 de dimensión una corriente de centenares de miles amperios, en los aisladores, en las mismas condiciones, las corrientes serán del orden de 10^{-10} A. El intervalo es realmente enorme y puede ser llenado por los diversos semiconductores.

La conductibilidad de estas sustancias, intermedias por sus propiedades, tiene características peculiares que permiten «reconocer» a los semiconductores.

Es necesario señalar, ante todo, que la dependencia de su conductibilidad eléctrica con respecto a la temperatura es inversa a la de los metales. A diferencia de los metales, la conductibilidad de los semiconductores puede decrecer rápidamente al disminuir la temperatura. A bajas temperaturas, el semiconductor puede convertirse en aislador. En la mayoría de los semiconductores, la resistencia es mucho más sensible a las variaciones de la temperatura que en los metales. Las resistencias térmicas semiconductoras (termisores) permiten hacer medidores compactos de la temperatura de alta sensibilidad.

La segunda peculiaridad importante de los semiconductores es, que, en una serie de casos, estos cuerpos pueden poseer conductibilidad tanto positiva (p) como negativa (n). A estos términos se les da el siguiente sentido: si la corriente es transportada por cargas positivas (negativas), la conductibilidad se llama positiva (negativa). Los metales, por ejemplo, poseen conductibilidad negativa, ya que en ellos la corriente es transportada por los electrones. En los semiconductores existen ambos tipos de conductibilidad. Este efecto pareció extraño en su tiempo, puesto que el paso de la corriente por el semiconductor no se debe (como en los electrólitos) al transporte de iones, y el problema acerca de la naturaleza de los portadores positivos de la corriente quedó sin resolver durante algunos años.

El signo del portador de la corriente se puede poner de manifiesto por una serie de procedimientos. Nos detendremos en la demostración más convincente, basada en el estudio de las fuerzas que actúan

sobre las partículas portadoras de la corriente, por parte de un campo magnético (*efecto Hall*). Si a lo largo de una plaquita, situada transversalmente a las líneas de fuerza magnéticas (fig. 300), pasa una corriente eléctrica, sobre una partícula cargada e, que se mueva con la velocidad u, actuará la fuerza F, cuya dirección será perpendicular al campo y a la corriente. En otras palabras (véase la pág. 267), en esta dirección aparecerá un campo eléctrico de intensidad $E=uB$. Entre las caras de la plaquita situadas perpendicularmente al campo eléctrico aparecido se creará una diferencia de potencial $U=uBd$. El signo de esta diferencia de potencial vendrá determinado por el signo del portador de la carga.

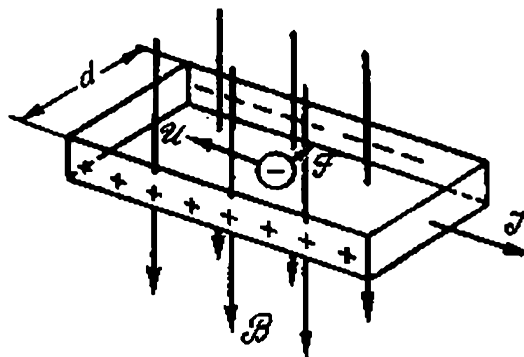


FIG. 300.

Ejemplo. Sea una plaquita semiconductora de $1\times2\times0{,}5$ cm² situada en un campo magnético $B=1000$ Gs. Supongamos que la conductibilidad σ de la plaquita es igual a 3 $\Omega^{-1}\cdot$cm^{-1} (para el óxido de zinc). Si entre los extremos de la plaquita (a 2 cm de distancia) se aplica una diferencia de potencia al de 1 V, pasará por ella una corriente eléctrica cuya densidad será

$$j=\sigma E=3\cdot\frac{1}{2}=1{,}5\ \text{A/cm}^2.$$

La experiencia demuestra que entre las superficies laterales de la plaquita aparece una diferencia de potencial $U=0{,}12$ mV. El signo del efecto Hall (véase la fig. 300) indica que los portadores de la carga son electrones. Calculemos la velocidad de su movimiento ordenado

$$u=\frac{U}{Bd}=\frac{0{,}12\cdot10^{-3}\ \text{V}}{0{,}1\ \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}\cdot10^{-2}\ \text{m}}=0{,}12\ \text{m/s}=12\ \text{cm/s}.$$

Es interesante señalar que esta velocidad es más de 1000 veces mayor que la del movimiento ordenado de los electrones de conducción en el metal (véase el ejemplo de la pág. 766). El número de electrones de conducción por unidad de volumen del semiconductor es

$$n=\frac{j}{eu}=\frac{1{,}5\ \text{A/cm}^2}{1{,}6\cdot10^{-19}\ \text{C}\cdot12\ \text{cm/s}}=8\cdot10^{17}\ \text{cm}^{-3}.$$

La pequeñez del valor de σ se explica por el hecho de que este valor de n es aproximadamente 10^6 veces menor que el que tiene n para el metal.

Finalmente, otra importantísima peculiaridad de los semiconductores es su extremada sensibilidad para con las impurezas, que no sólo influyen enérgicamente en la magnitud de la conductibilidad (la impureza del orden de un uno por ciento puede hacer que

varíe un millón de veces la conductibilidad), sino que también pueden hacer que la conductibilidad n se torne p y viceversa.

Entre los semiconductores más interesantes y que ya tienen gran importancia práctica figuran el germanio, silicio, selenio, las aleaciones del antimonio con el indio, el cadmio, zinc, los óxidos de cobre y los óxidos de titanio.

EXPLICACIÓN DE LAS PROPIEDADES. La mayoría de las particularidades de los semiconductores se explican sin dificultad en el esquema de los niveles energéticos que se estudió anteriormente. Los aisladores tienen ocupada la banda energética. La siguiente banda libre está separada de la llena por un gran intervalo energético. Figurémonos que el sistema de niveles de la sustancia es tal, que los intervalos entre estas bandas disminuyen y la energía del movimiento térmico es suficiente para hacer que los electrones pasen de la banda ocupada a la libre. Esta sustancia será un semiconductor natural.

A una temperatura dada, el número de electrones que se encuentran en la banda superior se determinará por las condiciones del equilibrio móvil establecido entre las zonas. Los electrones pasan continuamente de la banda inferior al estado excitado y viceversa; el estado de equilibrio será aquel en que (como en el caso del vapor saturado) el número de electrones que «suben» sea igual al de los que «bajan».

Cuando la temperatura aumenta (otra vez como en el caso del vapor saturado) el equilibrio se desplaza hacia el lado del nivel superior, porque aumenta la concentración instantánea de electrones en la banda superior. La concentración de electrones libres crece bruscamente al disminuir los intervalos entre las bandas. La probabilidad de que sea salvada una barrera energética de anchura $\Delta\mathcal{E}$ viene dada, como siempre, por un factor exponencial. Para valorar aproximadamente la concentración de electrones que hay en la banda superior a la temperatura T, puede aplicarse la fórmula $n \approx 10^{19} \cdot e^{-\Delta\mathcal{E}/(2kT)}$.

Si la anchura de la separación $\Delta\mathcal{E}$ se hace considerablemente mayor que kT, el cuerpo debe considerarse ya como aislador. Para esto es suficiente que $\mathcal{E}$ sea 100—200 veces mayor que kT. A la temperatura ambiente $kT \approx 1/40$ eV. Cuando $\Delta\mathcal{E}$ se haga menor que 1 eV, es decir, aproximadamente 40 veces mayor que kT, el número de electrones que haya en la banda superior será ya suficiente para crear corrientes mensurables. Si $\Delta\mathcal{E}$ es del orden de décimas de eV, el semiconductor posee una conductibilidad bastante considerable.

Si recordamos la fórmula de la conductibilidad eléctrica, $\sigma = ne^2l/(mv)$, vemos que cuando varía la temperatura de los semiconductores cambian dos factores de los cuales depende σ. En primer lugar aumenta el número de electrones libres n, pero, lo mismo que antes, al elevarse la temperatura disminuye el recorrido libre l.

No obstante, la experiencia demuestra que el primer efecto supera al segundo.

Hasta ahora hemos razonado acerca de las cualidades conductoras de la banda superior y no hemos prestado atención a la zona inferior, que también debe haber adquirido propiedades conductoras, puesto que en ella quedaron vacantes los puestos dejados por los electrones que pasaron a la banda superior. Esta conductibilidad puede tener un carácter muy especial.

El hecho de que se origine conductibilidad en la banda superior parcialmente ocupada, puede interpretarse como un desplazamiento de la distribución de los electrones, en el espacio de impulsos, en la dirección del campo (hacia la derecha en la fig. 301, *a*). Pero ésta

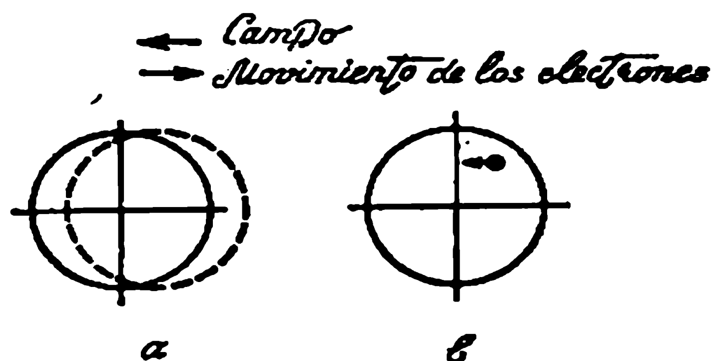


FIG. 301.

no es la única posibilidad de que se ponga de manifiesto el movimiento ordenado de los electrones. Figurémonos que los contornos generales de la distribución de los electrones no varían (fig. 301, *b*). Pero ya de uno, ya de otro punto próximo a la superficie de Fermi son arrancados electrones y en el espacio de impulsos se forma un «hueco». A este hueco, por la acción del campo, pasa inmediatamente el electrón vecino, de izquierda a derecha (en la misma dirección que en el esquema considerado antes). El hueco se desplaza de derecha a izquierda. Ahora pasa a él otro punto, representativo del electrón en el espacio de los impulsos, y de este modo el hueco se mueve en sentido contrario al que siguen los electrones. Como los huecos se forman continuamente, durante todo el tiempo pasará una corriente positiva de «huecos».

Así, pues, en un semiconductor natural, la corriente eléctrica puede considerarse como resultado del movimiento, no sólo de los electrones de la zona superior, sino también de los «huecos» en la banda ocupada. No obstante, el papel fundamental en estos casos lo desempeña el movimiento de los electrones en la zona de conducción.

La conductibilidad natural de los conductores que acabamos de explicar se observa con mucha menos frecuencia que otro fenó-

meno: el de las propiedades semiconductoras debidas a pequeñas impurezas constituidas por átomos extraños. El papel de los átomos extraños o de otros defectos de la red, consiste en la adición que ellos aportan al cuadro de los niveles energéticos. Los defectos crean con frecuencia su nivel, que es una banda energética estrecha situada entre las zonas ocupada y libre.

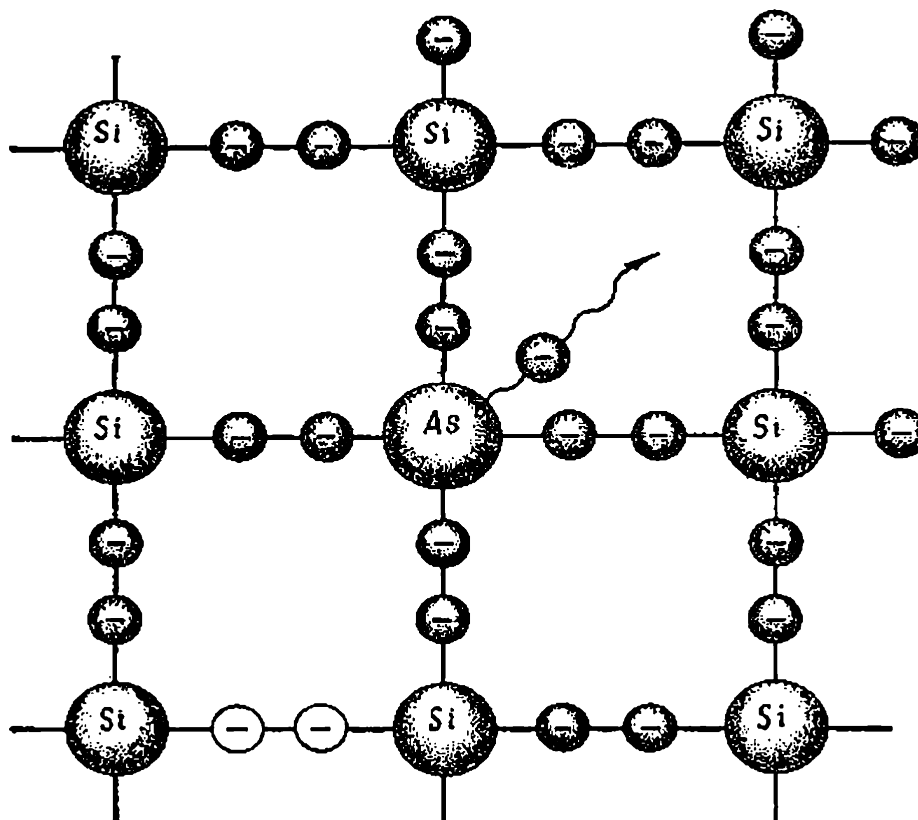


FIG. 302.

Supongamos que los átomos extraños traen consigo electrones «superfluos» que llenan la banda estrecha que aparece entre las zonas. Cuando la temperatura aumenta, los electrones del nivel de las impurezas pasan a la zona de conducción en número cada vez mayor: la conductibilidad crece. Este semiconductor dará conductibilidad *n*. Puede ocurrir (si la concentración de impurezas es pequeña) que se cedan todos los electrones superfluos. En este caso, si se sigue aumentando la temperatura, la conductibilidad no crecerá ya; el cuerpo se comportará a partir de este instante como un metal. Este comportamiento se pone de manifiesto cuando en la red de silicio o germanio tetravalente se introducen átomos pentavalentes de arsénico o de fósforo. La fig. 302 representa de un modo simplificado la red cristalina del silicio. Si un átomo de silicio se sustituye

por un átomo de arsénico, resulta un electrón «superfluo». Este será el electrón de conducción.

Tiene importancia el hecho de que las impurezas puedan ocasionar conductibilidad p. Esto ocurre cuando el átomo de la impureza posee propiedades aceptoras, es decir, es capaz de captar electrones. Al nivel intermedio, de la impureza, pasan los electrones de la banda ocupada y en ella se produce la conducción por huecos. Esta conducción se puede observar en el silicio con impurezas de aluminio trivalente. Si en una serie de puntos de la red se sustituye el silicio por aluminio, en el cristal aparecen «vacantes» de electrones. Una vez que se aplica el campo, el átomo de aluminio puede quitarle un electrón al átomo de silicio vecino: el electrón pasará por la acción del campo eléctrico, y el «hueco» se moverá en dirección contraria.

Conviene recordar que estas «ingenuas» imágenes de la traslación de los electrones tienen carácter convencional en grado sumo, ya que el movimiento de los electrones en el sólido obedece las leyes de la mecánica cuántica.

La introducción de una u otras impurezas permite controlar la conductibilidad eléctrica de los materiales dentro de límites muy amplios. Se puede cambiar la conductibilidad de tipo p por la de tipo n. Se puede variar considerablemente el carácter que tiene la dependencia de la conductibilidad con respecto a la tempetatura.

§ 273. Emisión de electrones

TRABAJO DE SALIDA DEL ELECTRÓN. Los electrones que se encuentran en la zona de conducción se comportan como un gas electrónico particular. Las «paredes» del recipiente en que se halla este gas son la superficie del sólido. Para salir fuera de los límites de esta superficie, el electrón tiene que salvar una barrera de potencial cuya altura designaremos por $\mathcal{E}$. Como sabemos, a la temperatura de cero absoluto, los electrones poseen una energía límite W. En el modelo del gas electrónico, W corresponde a la superficie de Fermi. Esta es la energía de los electrones que, a cero grados, se hallan en el nivel más alto. Por lo tanto, para que el electrón pueda salvar la barrera de potencial no hay que comunicarle la energía $\mathcal{E}$, sino que bastará transmitirle la energía adicional,

$$A = \mathcal{E} - W.$$

La magnitud A recibe el nombre de *trabajo de salida* o *de extracción*, y $A/e = \varphi$ puede llamarse *potencial de salida* o trabajo de salida expresado en voltios (fig. 303).

La salida del electrón del metal la dificultan las fuerzas de atracción que actúan por parte de los iones positivos y las fuerzas de

atracción entre el electrón y su imagen eléctrica. Esta última fuerza es igual a $e^2/(4x^2)$, si el electrón se encuentra a la distancia x de la superficie. Esta fuerza es capaz de retener el electrón a una distancia considerable de la superficie, formando de este modo una capa o nube de electrones cerca de la superficie del cuerpo.

Si el metal se encuentra en un campo eléctrico, el trabajo de salida disminuye en la magnitud $e\sqrt{eE}$, donde e es la carga del electrón y E, la intensidad del campo. Para que el potencial de salida disminuya en 1V es necesario que la intensidad del campo exterior sea de $0{,}2 \cdot 10^7$ V/cm. (Vemos que, en los aparatos electrónicos ordinarios, la influencia del campo exterior sobre el trabajo de salida será insignificante).

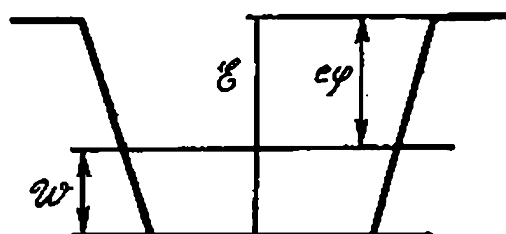


FIG. 303.

El trabajo de salida depende claramente de las propiedades de la superficie. Sobre la superficie del cátodo pueden depositarse átomos o iones electropositivos (metales, oxígeno). En este caso se pueden formar capas con las cargas positivas vueltas hacia fuera. En estas condiciones el trabajo de salida puede reducirse mucho, como se ve en el ejemplo siguiente.

El material ordinario de los filamentos de caldeo de los tubos electrónicos es el volframio, cuyo trabajo de salida $A=4{,}9$ eV. Si la superficie del volframio se recubre con una capa de óxido de un metal alcalinotérreo (Ca, Ba, Sr), el trabajo de salida disminuye hasta 1,5—2 eV. Esto permite obtener, a temperaturas más bajas del filamento de caldeo, una emisión considerablemente mayor.

EMISIÓN TERMOIÓNICA. La salida de electrones de un metal al calentarlo, se llama emisión termoiónica. Como sabemos, este fenómeno sirve de base para el funcionamiento de las lámparas de incandescencia. Cuando la temperatura se eleva, los electrones se excitan y algunos de ellos pueden recibir una velocidad, en dirección perpendicular a la superficie del cuerpo, suficiente para salvar la barrera de potencial $\mathcal{E}$.

El gas electrónico obedece la estadística de Fermi — Dirac, según la cual el número de electrones con energía $\mathcal{E}$ es proporcional a la expresión $\frac{1}{e^{(\varepsilon-W)/kT}+1}$. Pero a nosotros nos interesa una energía $\mathcal{E}$ que es mucho mayor que la energía W del nivel cero. Por esto, el factor que hemos escrito puede sustituirse con bastante aproximación por $e^{-(W-\varepsilon)/kT}=e^{-e\varphi/kT}$. Este es el número de electrones cuya energía es igual a la altura del pozo de potencial. Puede demostrarse rigurosamente que la intensidad de la corriente de emisión electrónica es proporcional a esta emisión. De esta fórmula se deduce

evidentemente la extraordinaria rapidez con que crece la corriente termoiónica al elevarse la temperatura.

Para medir la corriente termoiónica se utiliza el esquema que reproduce la fig. 304. Aumentando la tensión se llega bastante pronto hasta la corriente de saturación. Esta corriente es precisamente la que se tuvo en cuenta más arriba. En cuanto se refiere a la parte inicial de la curva corriente termoeléctrica—tensión, ésta se debe a la nube electrónica de que hablamos antes. La tensión que absorbe los electrones, recoge las partículas del gas electrónico. El cátodo repone inmediatamente el número de electrones de la nube hasta el valor de equilibrio. Este valor de equilibrio se determina, en ausencia de tensión exterior, por la capacidad emisiva y por el contracampo de la nube. A medida que aumenta la tensión, la nube electrónica se va disipando y la emisión aumenta hasta que la tensión no agota por completo a la nube electrónica. Entonces se establece la corriente de saturación.

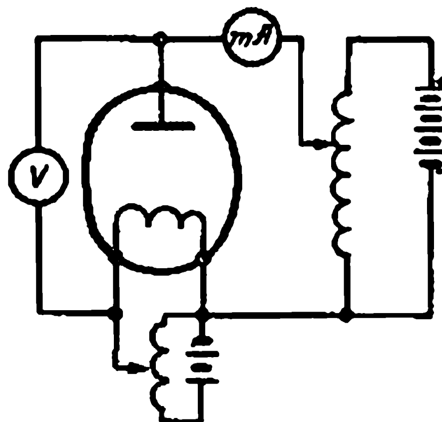


FIG. 304.

El estudio riguroso conduce a la siguiente dependencia de la densidad de la corriente termoiónica con respecto a la temperatura:

$$j = AT^2 e^{-e\varphi/kT}$$

(*fórmula de Richardson*).

Para el volframio $A=75$ A/(cm²·°K²), y $e\varphi=4,5$ eV. Comparemos las densidades de la corriente de emisión termoiónica del volframio a las temperaturas de 500°K y 2000°K. A 500°K

$$j=75\cdot 25\cdot 10^4\cdot e^{-\frac{4,5\cdot 1,6\cdot 10^{-12}}{1,38\cdot 10^{-16}\cdot 500}} \sim 10^{-36}\ \text{A/cm}^2,$$

es decir, para obtener corrientes mensurables se necesitarían cátodos de dimensiones inverosímiles, mayores que el área de toda la tierra firme de nuestro planeta.

A 2000°K

$$j=75\cdot 4\cdot 10^6\cdot e^{-\frac{5,21\cdot 10^4}{2000}} \sim 1,6\ \text{mA/cm}^2.$$

Esta corriente se puede medir ya fácilmente, pero el área de la superficie emisora resultaría aún demasiado grande para muchas aplicaciones.

Si el volframio se recubre de cesio, el cuadro cambia: en este caso $A=3,2$ A/(cm²·°K²), pero $e\varphi=1,36$ eV, y a la temperatura $T=2000$°K

$$j=3,2\cdot 4\cdot 10^6\cdot e^{-\frac{1,57\cdot 10^4}{2000}} \approx 4,8\cdot 10^3\ \text{A/cm}^2.$$

Está claro que esta densidad de corriente destruiría el cátodo, por esto, los valores necesarios en la práctica, de $j \leq 1$ A/cm², se pueden obtener ahora a una temperatura más baja (~1300°K).

EMISIÓN SECUNDARIA. Se da este nombre a la emisión de electrones por la superficie de un metal provocada por la acción de otros electrones. Los electrones secundarios pueden salir en la dirección de los primarios. Esto demuestra que los electrones primarios interaccionan con los electrones ligados, de lo contrario se infrigiría la ley de conservación del impulso. La emisión secundaria comienza cuando la energía de los electrones primarios es del orden de 10 eV. La mayoría de los electrones secundarios tiene una energía de varios electrón-voltios, y su distribución por energía casi no depende de la energía de los electrones primarios.

Los electrones primarios provocan los secundarios y, además, se dispersan elásticamente. Un hecho muy importante y que se aprovecha mucho en la práctica (tubo de Kubetski) es, que un electrón primario puede crear varios secundarios.

§ 274. Efecto fotoeléctrico

EFECTO FOTOELÉCTRICO EXTERNO. Para el estudio de este fenómeno, la sustancia a analizar se utiliza como cátodo de un tubo de vacío. La luz se dirige sobre el cátodo y arranca de él electrones. Los electrones que llegan al ánodo crean una corriente fotoeléctrica, cuya magnitud se estudia en dependencia de las circunstancias externas.

Para una sustancia es característica, claro está, la corriente total que se obtiene del cátodo. Por esta razón, en este caso también se trabaja generalmente con el régimen de corriente de saturación. Si a la célula fotoeléctrica no se le aplica tensión, por el aparato pasará una corriente débil creada por la parte de los electrones que salen del cátodo en dirección al ánodo. Una tensión aceleradora débil tampoco recogerá a todos los electrones, pero cuando aquella alcance cierto valor, todos los electrones llegarán al ánodo, es decir, se establecerá la corriente de saturación.

La experiencia demuestra que la intensidad de la corriente fotoeléctrica es rigurosamente proporcional a la intensidad de la luz incidente. Esto es correcto para toda luz que produzca efecto fotoeléctrico, cualquiera que sea su frecuencia.

Es más, se afirma que el número de electrones liberados es igual exactamente al número de fotones. Un fotón puede arrancar un solo electrón. Por lo tanto, es inadmisible el proceso en que un fotón, perdiendo energía poco a poco, arrancaría de la sustancia varios electrones. Este importante postulado es algo difícil de demostrar al estudiar el efecto fotoeléctrico externo, ya que éste puede ir acompañado del efecto fotoeléctrico interno (véase más adelante) y parte de los electrones puede no salir fuera de los límites de la sustancia.

Durante la interacción del fotón con el electrón deben cumplirse las leyes de conservación de la energía y el impulso. La ley de conservación de la energía (ecuación de Einstein) tiene la forma

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} + e\varphi,$$

donde φ es el potencial de salida del electrón del metal (que es el mismo que en las experiencias de emisión termoiónica). La necesidad de que se cumpla la ley de conservación del impulso nos lleva a la conclusión de que en el proceso de interacción del fotón con el electrón debe participar la red cristalina del metal (de lo contrario los electrones sólo podrían moverse en la misma dirección que los fotones).

Todo fotón puede ocasionar el efecto fotoeléctrico, siempre que su energía sea igual por lo menos al trabajo de salida. De aquí se deduce que cada material tiene su umbral del efecto fotoeléctrico. La frecuencia umbral $\nu_0=(e/h)\varphi$, y la longitud de onda umbral λ_0, en milimicras (umbral «rojo» del efecto fotoeléctrico), es igual a $hc/(e\varphi)=1236\ \varphi$, si φ se expresa en voltios. Si la sustancia se expone a una luz cuya longitud de onda sea mayor, el efecto fotoeléctrico no se produce. El umbral «rojo» del efecto fotoeléctrico para el litio será $\lambda_0=560$ nm (5600 Å), es decir, corresponde a la parte amarilla del expectro visible; para el Cu, $\lambda_0=300$ nm (3000 Å), que se encuentra en la ultravioleta, y para el Al, $\lambda_0=410$ nm (4100 Å), en la violeta.

Si la energía del fotón es mayor que el trabajo de salida, su exceso incrementa la energía cinética del electrón. Por lo tanto, la radiación dura es capaz de crear fotoelectrones muy rápidos.

Para medir con exactitud el umbral de frecuencia y el trabajo de salida se utiliza el método del potencial retardador. Para esto se le aplica a la célula fotoeléctrica una tensión retardadora débil (con el polo positivo al fotocátodo) y se va aumentando hasta que se interrumpe la corriente. Este instante llega cuando $eV_r=mv^2/2$. De este modo puede construirse la curva experimental de V_r en función de la frecuencia de la luz,

$$V_r = \frac{h\nu}{e} - \varphi.$$

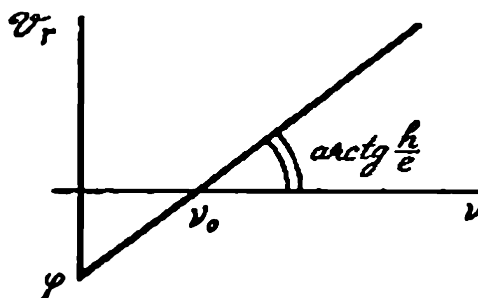


FIG. 305.

Deberá obtenerse una línea recta cuya inclinación angular permite calcular la constante universal h/e. Las dos características de la sustancia —el umbral de frecuencia ν_0 y el potencial de salida φ— se obtienen como segmentos que esta recta corta en los ejes (fig. 305).

Ejemplo. Si sobre una lámina de cobre ($\varphi=4.1$ V) inciden rayos X blandos, $\lambda=100$ Å, la tensión retardadora interrumpirá la corriente fotoeléctrica cuando sea

$$eV_r=h\nu-e\varphi=6.6\cdot10^{-27}\cdot\frac{3\cdot10^{10}}{10^{-6}}\cdot\frac{1}{1,6\cdot10^{-12}}-4,1\text{ eV}=120\text{ eV}.$$

Por consiguiente, el potencial retardador será igual a 120 V.

Otra característica importante del material del fotocátodo es la dependencia espectral del fotón. Aquí no existe ninguna regularidad simple. La curva comienza en la frecuencia umbral y, en muchos casos, crece bastante monótonamente; puede decirse que con la energía de los fotones se eleva su factor de utilización. Pero en otros casos las curvas espectrales tienen máximos claramente expresados que se encuentran en una región espectral bastante estrecha.

Las células fotoeléctricas que utilizan el efecto fotoeléctrico externo están muy difundidas. Se emplean en los fotorelés, en televisión y en el cine sonoro. De fotocátodos sirven la plata, el cesio y el potasio; también se usan mucho los cátodos de cesio sobre antimonio.

En diversos fotorelés suele no tener importancia la proporcionalidad de la corriente fotoeléctrica con respecto a la intensidad de la luz; lo importante es la sensibilidad de la célula fotoeléctrica. En estos casos, en vez de células de vacío, pueden utilizarse células llenas de gas. La sensibilidad aumenta entonces decenas de veces.

EFECTO FOTOELÉCTRICO INTERNO. Si la acción del fotón se reduce a trasladar un electrón desde la zona ocupada hasta el nivel de las impurezas o hasta nivel de conducción, se dice que el efecto fotoeléctrico es interno. Como resultado de este fenómeno pueden originarse en el cuerpo, por la acción de la luz, electrones de conducción y huecos. Deberán formarse a pares. Hablando estrictamente, un par de cargas deberá corresponder a un fotón. El fenómeno se complica extraordinariamente porque dentro del cuerpo se desarrollan procesos secundarios, a consecuencia de la recombinación de los electrones y los huecos.

Como está claro por lo que acabamos de decir, el efecto fotoeléctrico interno es un fenómeno característico especialmente de los semiconductores, pero también se observa en los aisladores.

Los semiconductores que poseen este efecto se incluyen en los circuitos de corriente en calidad de fotorresistencias. Estos cuerpos tienen una conductibilidad muy pequeña (de oscuridad) en la oscuridad. Cuando se exponen a la luz, la conductibilidad aumenta. Para las transiciones internas del electrón suelen ser suficientes las energías de décimas de electrón-voltio. Por esta razón el umbral del efecto fotoeléctrico interno puede encontrarse en la región infrarroja remota.

Las fotorresistencias se utilizan mucho para señalización y automatización en todos aquellos sitios en que hay que transformar en acción o registrar las variaciones más pequeñas de la intensidad de la luz.

§ 275. *Capa de barrera*

La frontera entre un metal y un semiconductor, lo mismo que la de dos semiconductores, puede en una serie de casos poseer acción rectificadora. Como la transición de un cuerpo a otro, que estén en íntimo contacto (soldados o fundidos), tiene cierto espesor finito, aunque sea muy pequeño, suele hablarse de *capa de barrera*. Esta capa puede crearse en el límite entre el cobre y el óxido cuproso, entre el selenio y el seleniuro de cadmio. Las investigaciones han demostrado que la capa de barrera entre dos semiconductores aparece si uno de ellos pertenece al tipo *p* y el otro al tipo *n*. Estas capas de barrera se llaman uniones *p-n*.

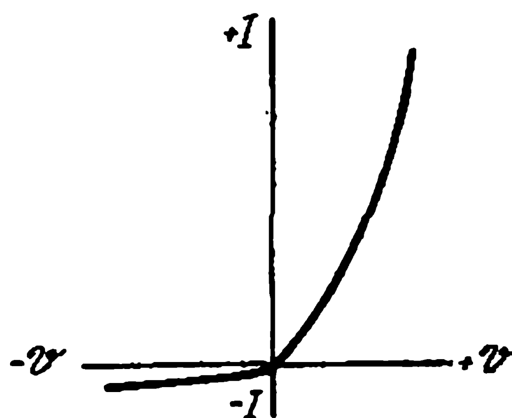


FIG. 306.

La fig. 306 reperesenta la rectificación que dan las capas de barrera. En ella se reproduce la curva típica de la intensidad de la corriente en función de la tensión. La rama derecha de la curva se llama de corriente directa, la izquierda, de corriente inversa. La corriente directa crece rápidamente con la tensión, la inversa casi no varía, permanece durante todo el tiempo débil en extremo.

¿Qué dirección de la corriente es la directa? Las investigaciones han demostrado que, en la unión *p-n*, la corriente directa va del semiconductor por defecto al semiconductor por exceso, atravesando la barrera. Esto significa que los huecos tienden hacia los electrones y, al contrario, que los electrones se mueven hacia la parte en que es mayor la concentración de huecos. A la corriente inversa le corresponde una tensión en la cual los huecos y los electrones se apartan de la frontera.

En la frontera entre un metal y un semiconductor el problema se plantea de la forma siguiente. Si con el metal linda un semiconductor por defecto (cobre — óxido cuproso), la dirección de la corriente directa es la que va del óxido cuproso al cobre. Esto parece natural: en el semiconductor no hay electrones libres, en el metal los hay con exceso; los electrones pasan del metal al semiconductor.

Las propiedades de las capas de barrera han encontrado un amplio campo de aplicación en la industria de los rectificadores. Ya hace mucho tiempo que se construyen rectificadores cuprox (de cobre — óxido de cobre) y rectificadores de selenio. Ultimamente se están utilizando mucho rectificadores muy pequeños de germanio o silicio (diodos de cristal). Introduciendo impurezas en el germanio o en el silicio se pueden convertir en conductores del tipo *p* o del tipo *n*. Un diodo de cristal es un cristalito pequeño de germanio (silicio), una de cuyas partes contiene impurezas de tipo aceptor y la otra, impurezas de tipo donador.

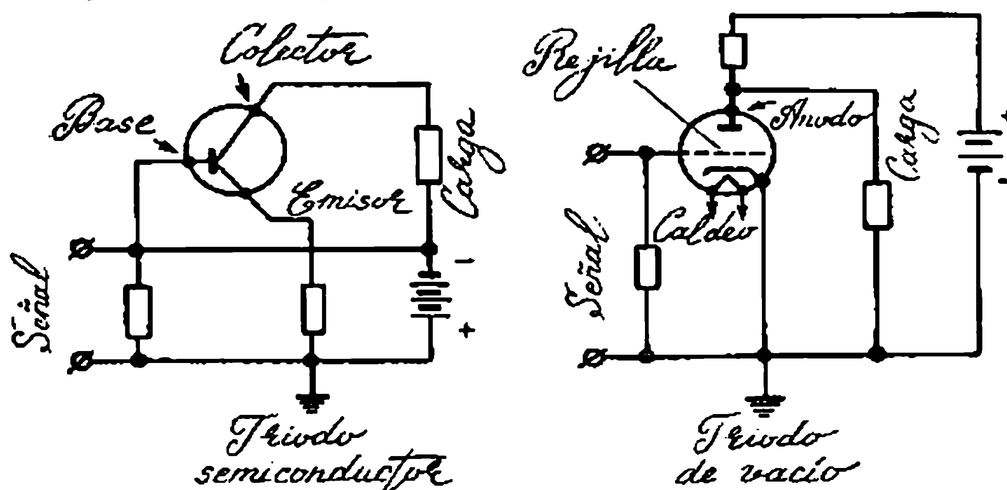


FIG. 307.

También son interesantes los triodos a cristal (transitores), que son un sistema semiconductor del tipo *p-n-p* o *n-p-n*. Si a las tres partes de este minúsculo triodo (las dimensiones de las «válvulas» de cristal son del orden de un centímetro) se sueldan tres alambres conductores, este sistema puede incluirse en un circuito con los mismos fines que una válvula de tres electrodos. A los dos terminales extremos se aplica una tensión —uno de los terminales hace de ánodo y el otro, de cátodo—. La tercera derivación desempeña el papel de rejilla. En este sistema de semiconductores hay dos capas de barrera conectadas la una al encuentro de la otra. Pero esto hace las veces de válvula de tres electrodos. El paralelismo entre el funcionamiento de un transitor y el de un triodo ordinario se ve claramente en la fig. 307.

Otra aplicación importante de las capas de barrera es la fabricación de células fotoeléctricas (fotovoltaicas), que funcionan sin fuente de tensión. Si sobre la superficie de un semiconductor se deposita una capa delgada de metal, se crea una barrera. La capa de metal puede ser tan delgada, que la luz pase libremente a través de ella. Por la acción de la luz que pasa a través del metal, en el semiconduc-

tor se produce el efecto fotoeléctrico interno. Como existe la capa de barrera, los electrones liberados se ven obligados a comenzar un movimiento dirigido. Cerrando el circuito obtenemos corriente eléctrica.

Basándose en este principio pueden fabricarse células fotoeléctricas de óxido de cobre y de selenio. En la URSS se utilizan células fotoeléctricas de sulfuro de talio, de fabricación propia, que dan una corriente de corto circuito del orden de 10 000 microamperios por lumen. Estas células fotoeléctricas poseen un rendimiento de transformación de la energía luminosa en eléctrica del orden de un 1%. Aquí también constituye un viraje importante la introducción de capas de barrera *p-n* de silicio y germanio. Estas capas permiten hacer células fotoeléctricas cuyo rendimiento es del orden de un 10%. El descubrimiento de esta nueva posibilidad hace que el aprovechamiento técnico de la energía solar sea una tarea realizable.

§ 276. Diferencia de potencial de contacto

Si dos cuerpos metálicos o semiconductores se ponen en contacto, entre ellos aparece una diferencia de potencial, que se llama de contacto. Para medir esta diferencia de potencial hay que crear un contacto íntimo entre los dos cuerpos a lo largo de una superficie cualquiera (soldándolos, esmirilándolos, eliminando las inclusiones extrañas, las capas de óxido, etc.), y formar con dichos cuerpos un circuito abierto en un punto. Cada uno de los cuerpos tendrá un potencial determinado, igual en todos sus puntos. Por esto, la diferencia de potencial de contacto puede medirse determinando el campo que hay en el intervalo. Por su orden de magnitud, la diferencia de potencial de contacto entre dos cuerpos es igual a unas décimas de voltio.

La necesidad de que exista la diferencia de potencial de contacto es completamente evidente; siempre que el trabajo de salida de los electrones sea distinto en los cuerpos en contacto, tendrá que producirse la diferencia de potencial. Recordaremos que el trabajo de salida A es la diferencia que existe, a la temperatura de cero absoluto, entre la energía del electrón en el nivel más alto dentro del metal W y la del electrón salido del metal con energía cinética nula.

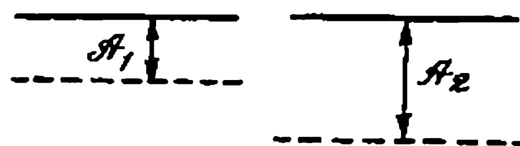


FIG 308.

La distribución de los electrones por energías en los dos cuerpos puestos en contacto puede representarse por un esquema (fig. 308). El nivel superior es igual para todos los cuerpos. Los electrones del cuerpo en que el trabajo de salida sea menor se encontrarán en un

nivel de energía más alto. De este modo se crean las condiciones para que los electrones del primer cuerpo pasen al segundo. Esta transición va acompañada de la creación de una carga positiva en el primer cuerpo y de otra negativa en el segundo. En el punto de contacto aparece un campo eléctrico que impedirá el paso de los electrones. Por fin, se establecerá el equilibrio; éste existirá a una diferencia de potencial rigurosamente determinada, característica del par de metales dado.

El cuadro que acabamos de esbozar dependerá de la temperatura en grado insignificante. Cuando la temperatura se eleva, la distribución de los electrones por energías no tiene ya un límite tan claro. Aparecen electrones en niveles más elevados, pero las condiciones de transición de los electrones siguen siendo las mismas en lo fundamental, debido a que, como ya indicamos antes, la energía de los electrones depende poco de la temperatura.

De la descripción que hemos hecho del fenómeno se deduce evidentemente que todos los cuerpos sólidos pueden distribuirse en una serie determinada de tal forma, que cada miembro de la serie se cargue positivamente con respecto al siguiente. Esta serie fue formada por Volta, descubridor de la diferencia de potencial de contacto. De la explicación que hemos dado del fenómeno resulta evidente que la serie de Volta debe ser la serie ascendente de los trabajos de salida: los electrones pasan de los cuerpos de menor trabajo de salida a los cuerpos cuyo trabajo de salida es mayor.

Como la diferencia de potencial de contacto φ_{12} de dos cuerpos se expresa en forma de diferencia entre sus trabajos de salida

$$\varphi_{12} = \frac{1}{e}(A_1 - A_2),$$

es evidente que la diferencia de potencial de dos cuerpos puede representarse en forma de las diferenciales de potencial de dichos cuerpos con respecto a un tercer cuerpo cualquiera:

$$\varphi_{12} = \frac{1}{e}(A_1 - A_2), \qquad \varphi_{13} = \frac{1}{e}(A_1 - A_3);$$

$$\varphi_{23} = \frac{1}{e}(A_1 - A_3) - \varphi_{21} - \varphi_{31}.$$

También es evidente que en un circuito cerrado, formado por un número cualquiera de cuerpos, la diferencia de potencial de contacto total será igual a cero: $\varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{31} = 0$. Por este circuito no pasará corriente eléctrica.

Serie de tensiones
(potencial normal en la solución de electrólito, en voltios)

Li	Ca	Na	Al	Zn	Fe	Ni	Pb
—3,01	—2,84	—2,71	—1,66	—0,76	—0,44	—0,23	—0,12
		Cu	Hg	Ag	Pt		
		+0,34	+0,70	+0,80	+1,2		

§ 276a. *Electroluminiscencia de los semiconductores*

Los electrones y los huecos pueden combinarse con emisión de un fotón. Podemos imaginarnos cuatro variantes de procesos de este tipo: paso de un electrón de la banda de conducción a un hueco de la banda de valencia o a un hueco del nivel colector (aceptor), y paso de un electrón del nivel donador a un hueco de la banda de valencia o a un hueco del nivel colector.

Para que un semiconductor sea emisor de luz es necesario que su estructura favorezca la recombinación rápida de los electrones y los huecos y permita inyectar electrones en estado excitado. Estos estados se obtendrán si se consigue inyectar electrones en un semiconductor en que haya más huecos, es decir, en un cristal *p*. El mismo efecto se consigue inyectando huecos en un semiconductor tipo *n*. Finalmente, también se puede recurrir a inyectar huecos y electrones en un aislador.

Si al hacer pasar la corriente por un semiconductor logramos realizar uno de estos procesos, se produce la transformación directa de la energía de la corriente en luz, es decir, la electroluminiscencia.

Los más convenientes para la realización práctica de la electroluminiscencia resultaron ser los diodos *p-n* fabricados con semiconductores binarios del tipo del fosfuro o el arseniuro de galio. La fig. 308a representa el esquema de los niveles energéticos del diodo. Entre las regiones *p* y *n* del diodo se establece, como acabamos de explicar, una diferencia de potencial de contacto que equilibra la difusión de los electrones (circulitos negros) en la región *p* y la de los huecos (circulitos blancos) en la región *n* (fig. 308a, *a*).

Cuando se aplica el campo (fig. 308a, *b*) la barrera decrece, los electrones comienzan su movimiento hacia la derecha en nuestra figura, y los huecos, hacia la izquierda. En la capa fronteriza se crean condiciones favorables para los cuatro tipos de recombinación. La energía de los fotones que se generan es igual, aproximadamente, al espacio entre las bandas.

Está claro que el proceso de recombinación no va acompañado necesariamente de la radiación. La energía correspondiente puede transformarse también en calor. Si se consiguiera realizar el caso

ideal, el rendimiento de radiación sería mayor que la energía eléctrica suministrada y el aparato funcionaría como refrigerador, sacando calor del cristal y del medio circundante.

Toda la radiación se propaga en el plano de la capa fronteriza. Los dos extremos del diodo perpendiculares a la frontera se pulen

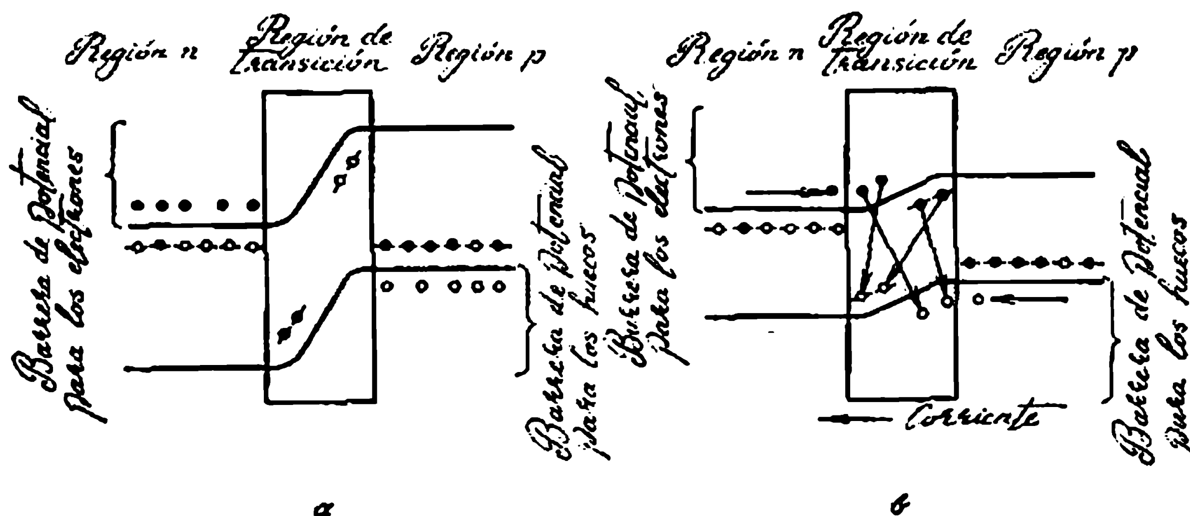


FIG. 308a.

de tal modo, que se crea una cavidad resonante. Cuando las corrientes son grandes, la radiación se convierte en inducida con todas las consecuencias que de esto se deducen con respecto a la agudeza de la directividad de la polarización y la coherencia.

En la actualidad se ha conseguido ya crear un gran número de lásares semiconductores. Todos ellos son semiconductores binarios que combinan los elementos de las columnas II—VI y III—V de la tabla de Mendeléiev. De acuerdo con las anchuras de los intervalos, que oscilan dentro de los límites de varios electrón-voltios, se han creado lásares semiconductores que abarcan una gama de longitudes de onda que va desde el ultravioleta hasta la luz infrarroja lejana.

§ 277. Distribución de las cargas en un cuerpo calentado irregularmente

Consideremos una barra a lo largo de la cual descienda la temperatura. Las diferentes partes de esta barra se encontrarán en condiciones distintas y esto influirá en el comportamiento de las cargas eléctricas libres. Allí donde la temperatura sea mayor, las cargas poseerán más energía; además, el número de cargas libres puede aumentar si existe la posibilidad de que los electrones pasen de la zona ocupada a la zona de conducción. Estas dos causas hace que comience la difusión de las cargas libres, que continuará hasta que

se cree el contracampo que equilibra la tendencia a la distribución uniforme. A lo largo de la barra se produce una caída de potencial; en un extremo de ella se origina una carga negativa y en el otro, una positiva. La caída del potencial eléctrico con la temperatura será característica para cada cuerpo. La rapidez de la caída del potencial puede definirse por la derivada del potencial con respecto a la temperatura $\alpha = d\varphi/dT$.

Si en los extremos de la barra se mantiene invariable la diferencia de temperatura, esto significa que a través de ella se transmite continuamente calor. El calor es transmitido por las cargas libres, pero en un conductor abierto no puede existir corriente. El transporte continuo de energía, sin que haya transporte de carga, es posible en virtud de la distinta velocidad con que se mueven las cargas que van del extremo caliente al frío, siendo el mismo el numero de las que pasan en ambos sentidos por una sección en la unidad de tiempo. Si los portadores de la corriente son los electrones, su concentración excesiva tiene lugar en el extremo frío de la barra. Si los portadores de la corriente son partículas positivas o huecos, en el extremo frío se reunirá la carga positiva. El signo de la diferencia de potencial que aparece dependerá, por lo tanto, del signo que tengan los portadores de la corriente.

Si se trata de un semiconductor en el cual la corriente es transportada tanto por huecos como por electrones, ¿se producirá este efecto? La difusión bilateral puede, efectivamente, anular la diferencia de potencial del cuerpo calentado irregularmente. No obstante, las diferencias de potencial originadas por los portadores de carga de ambos signos pueden no compensarse. Esto puede ocurrir debido a la diferencia de movilidad de los electrones y de los huecos, así como a la diferencia de sus concentraciones.

La observación de la diferencia de potencial en un conductor calentado irregularmente ofrece ciertas dificultades. El orden de magnitud de la caída de potencial que se produce es de 10^{-4} V por grado. Está claro que el efecto no se puede observar si se prepara un conductor cerrado con la esperanza de poder medir la corriente eléctrica. En efecto, este conductor cerrado puede dividirse mentalmente en dos mitades: en la primera se producirá la caída de potencial, y en la segunda, su elevación. En un conductor homogéneo estas magnitudes serán rigurosamente iguales y, por lo tanto, será imposible descubrir la f.e.m. resultante.

§ 278. Fuerza termoelectromotriz

En un conductor anular formado por dos (o más) cuerpos distintos puede observarse corriente eléctrica, siempre que los puntos de unión (juntas soldadas) se hallen a temperaturas diferentes. Este es

el conocido fenómeno de la termoelectricidad, que tiene un gran campo de aplicación en la práctica.

Las causas de que se produzca la corriente termoeléctrica pueden ser dos. En primer lugar, es evidente que la caída de potencial a lo largo de ambos conductores, debida a la diferencia de temperatura, puede ser distinta en estos dos cuerpos (que llamaremos 1 y 2) si sus constantes $a = d\varphi/dT$ son diferentes.

En efecto, sólo casualmente puede ocurrir que las diferencias de potencial

$$\int_{T_1}^{T_2} a_I dT \quad \text{y} \quad \int_{T_2}^{T_1} a_{II} dT$$

sean iguales. Esto sería ya suficiente para que en el conductor anular se produjera una f.e.m. igual a la diferencia entre estas dos tensiones.

La segunda causa de la corriente termoeléctrica consiste en la completamente probable dependencia de la diferencia de potencial de contacto con respecto a la temperatura. Como resultado de que las dos juntas se encuentren es distintas condiciones de temperatura, sus diferencias de potencial de contacto podrán resultar ser diferentes. Una vez más, esta sola condición bastaría para que se produjese una diferencia de potencial resultante en el circuito cerrado y, por consiguiente, para que se produjera corriente.

Teniendo en cuenta estos fenómenos podemos escribir la expresión de la fuerza termoelectromotriz en forma de suma de la caída de tensión en el primer conductor, del salto de potencial del primer cuerpo al segundo, de la caída de potencial en el segundo cuerpo y del salto de potencial del segundo cuerpo al punto de partida del recorrido del contorno:

$$\mathscr{E} = \int_{T_1}^{T_2} a_I \, dT + [\varphi_{II}(T_2) - \varphi_I(T_2)] + \int_{T_2}^{T_1} a_{II} \, dT + [\varphi_I(T_1) - \varphi_{II}(T_1)].$$

Para simplificar la expresión obtenida escribiremos la diferencia $\varphi_{II}(T_2) - \varphi_{II}(T_1)$ de la forma

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{d\varphi_{II}}{dT} dT$$

y del mismo modo transformaremos la segunda diferencia análoga. En este caso la fórmula de la f.e.m. toma la forma

$$\mathscr{E} = \int_{T_1}^{T_2} \left(a_I - \frac{d\varphi_I}{dT}\right) dT - \int_{T_1}^{T_2} \left(a_{II} - \frac{d\varphi_{II}}{dT}\right) dT.$$

De este modo hemos conseguido expresar $\mathscr{E}$ en forma de diferencia de dos magnitudes, cada una de las cuales es característica de un cuerpo dado. Con bastante frecuencia el término «fuerza termoelectromotriz» se utiliza no para designar estas integrales, sino la magnitud de la f.e.m. referida a un grado:

$$\alpha = a - \frac{d\varphi_{cont}}{dT}.$$

Esta magnitud es la característica fundamental de las propiedades termoeléctricas del cuerpo. No es una constante invariable, sino que puede depender de las condiciones termodinámicas, y, entre ellas, de la temperatura. Sin embargo, para muchos cuerpos esta dependencia no está expresada claramente.

Midiendo la fuerza termoelectromotriz puede determinarse no α, sino la diferencia de estas magnitudes. Pero combinando diversos pares de conductores y semiconductores tenemos la posibilidad de determinar el valor de α con respecto a un cuerpo tomado como «punto de referencia». De este modo pueden disponerse los cuerpos en serie según sus fuerzas termoelectromotrices. Por causas perfectamente comprensibles después de lo que hemos dicho, la serie según las fuerzas termoelectromotrices no coincide con la serie según las diferencias de potencial de contacto.

A continuación se dan las fuerzas termoelectromotrices de ciertos metales con respecto al platino. Si el metal dado está soldado al platino y una de las juntas soldadas está a 0°C y la otra a 100°C, en el contorno cerrado aparece la f. e. m. (en milivoltios):

Antimonio	+4,0
Hierro	+1,9
Cobre	+0,75
Níquel	—1,5
Constantán	—3,4

El signo positivo indica que en la junta de soldadura que se halla a 0°C la corriente va del metal dado al platino.

Tomando de la tabla los valores de las constantes α podemos calcular inmediatamente la fuerza termoelectromotriz que se produce a una diferencia de temperatura dada: $\mathscr{E} = (\alpha_1 - \alpha_2) \times (T_1 - T_2)$. Esta será la forma que tendrá la fórmula en el caso de un elemento termoeléctrico (termopar) constituido por dos metales o dos semiconductores que tengan portadores de corriente de igual signo. En este caso las diferencias de potencial que aparecen en los dos brazos del circuito están dirigidas la una en contra de la otra y la f.e.m. resultante es la diferencia de las acciones de los dos conductores que forman el circuito. Pero las cosas cambian si formamos el circuito con dos semiconductores de los cuales uno posee conductibilidad por

huecos y el otro, por electrones. En el conductor por huecos se dirigen hacia la junta soldada fría los huecos, mientras que los electrones van hacia la junta caliente. En el conductor por electrones, éstos van hacia la junta fría. Ambos efectos se refuerzan entre sí y la fórmula tiene la forma

$$\mathscr{E}=(\alpha_1+\alpha_2)(T_1-T_2).$$

Esta circunstancia tiene mucha importancia práctica.

§ 279. Desprendimiento de calor en los circuitos eléctricos

En un conductor por el que pasa corriente se desprende calor de Joule. Además, el desplazamiento de las cargas a lo largo del cuerpo va acompañado de dos fenómenos térmicos.

El primero de estos fenómenos, llamado efecto Peltier, consiste en lo siguiente. Si por la junta de soldadura de dos cuerpos pasa una corriente eléctrica, en aquélla se desprende o absorbe una cantidad de calor que es proporcional a la intensidad de la corriente que pasa:

$$Q=\Pi I,$$

donde Π es un coeficiente de proporcionalidad. Una peculiaridad ontable de este efecto es, que el signo de la cantidad de calor cambia cuando varía la dirección de la corriente eléctrica: en dependencia de dicha dirección, la misma junta desprenderá o absorberá calor. El experimento de Lenz demostró esto hace más de cien años. Emil Lenz colocó una gota de agua en un hueco practicado en la junta de una barra de antimonio con otra de bismuto. Haciendo pasar la corriente en una dirección, podía verse cómo la gota se helaba. Cambiando la dirección de la corriente, esta misma gota se fundía.

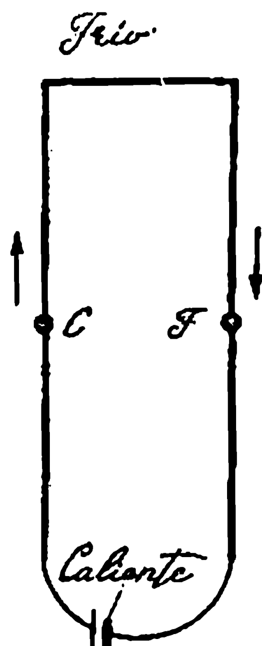


FIG. 309.

El segundo fenómeno se produce en todo conductor homogéneo si se calienta irregularmente. Supongamos, que la corriente pasa a lo largo de una barra que tiene uno de sus extremos a una temperatura y el otro, a otra. Entonces en este conductor se producirá un desprendimiento de calor adicional que será proporcional a la primera potencia de la intensidad de la corriente (y no al cuadrado, como en el efecto de Joule). Está claro que para notar este fenómeno hay que reducir al mínimo el calor de Joule.

Este efecto (predicho, basándose en razonamientos termodinámicos, por el físico inglés Willian Thomson), puede demostrarse.

El circuito de corriente lo constituyen dos barras situadas paralelamente entre sí (fig. 309). Los extremos de estas barras, formando parejas, se mantienen a temperaturas distintas. La simetría de esta disposición debería conducir, al parecer, a que en dos puntos simétricos de ambas barras fuera igual la temperatura. Pero en una de las barras va la corriente del extremo caliente al frío, y en la otra, al contrario. El efecto de Thomson hace que los puntos correspondientes de las barras no se encuentren a igual temperatura. Estará más caliente el punto situado en la barra en que la corriente va del extremo caliente al frío.

La cantidad de calor que se desprende en 1 s, de un trozo de longitud dx, puede escribirse de la forma

$$dQ = \tau I \frac{\partial T}{\partial x} dx;$$

siendo τ un coeficiente de proporcionalidad. La cantidad de calor será tanto mayor cuanto mayor sea el gradiente de temperatura. En un circuito termoeléctrico existen simultáneamente tres efectos: la aparición de la fuerza termoelectromotriz, el efecto Peltier y el de Thomson. Puede decirse que estos tres efectos están relacionados entre sí por los principios de la termodinámica. Para las corrientes débiles esto no requiere demostración. Como los efectos termoeléctricos son proporcionales a la primera potencia de la corriente, y el calor de Joule, a la segunda, está claro que el último puede despreciarse.

Ejemplo. Los extremos de una barra de sodio ($\tau = -8{,}5 \cdot 10^{-6}$ V/°K, $\rho = 5 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot$cm) de 10 cm de longitud y de 5 mm² de sección transversal se mantienen respectivamente a las temperaturas de 300°K y de 310°K.

Cuando por la barra se hace pasar una corriente de $I = 0{,}5$ mA del extremo caliente al frío de dicho conductor, debido al efecto Thomson, se desprende en la unidad de tiempo el calor

$$Q_T = \tau I \frac{\partial T}{\partial x} l = -8{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot (-5 \cdot 10^{-4}) \cdot 1 \cdot 10 = 4{,}24 \cdot 10^{8}\ \text{J/s}.$$

La corriente se ha tomado con signo menos porque tiene la dirección contraria a la del gradiente de temperatura. En virtud del efecto de Joule, del conductor se desprende en la unidad de tiempo el calor

$$Q_D = I^2 R = (5 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \frac{10}{5 \cdot 10^{-6}} = 2{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{J/s},$$

es decir, aproximadamente, 200 veces menor que el calor de Thomson.

Del estudio termodinámico resulta que entre los coeficientes α, Π y τ existe relación, a saber: $\tau = \frac{\partial \Pi}{\partial T} - \alpha$ y $\alpha = \frac{\Pi}{T}$. Sustituyendo la segunda relación en la primera, se obtiene también que $\tau = T \frac{\partial \alpha}{\partial T}$. Valiéndose de estas igualdades se determina el valor absoluto de α.

Los efectos Peltier y Thomson tienen el mismo fundamento físico que la aparición de la fuerza termoelectromotriz. Esta última se debe en fin de cuentas a que el flujo calorífico transporta las cargas eléctricas. En nuestro caso tenemos unos efectos en los cuales el flujo de cargas eléctricas transporta calor.

§ 280. *Aplicación del efecto termoeléctrico*

En la actualidad existen serias perspectivas de utilización de los termopares como generadores de energía eléctrica. Los termopares metálicos tienen un rendimiento del orden del 0,5%, pero el rendimiento de un par semiconductor constituido por una rama de conducción por huecos y otra de conducción por electrones, ya hoy puede alcanzar hasta un 7—8%.

El bajo rendimiento se explica por ser inevitables las pérdidas en calor de Joule. Si R_0 es la resistencia de la parte interna del circuito y R es la resistencia externa, la potencia que se desprende en la resistencia exterior (potencia útil) será igual a $\frac{\mathscr{E}^2 R}{(R+R_0)^2}$ para cualquier circuito eléctrico; $\mathscr{E}$ es aquí la f.e.m. Sustituyendo $\mathscr{E}$ por su valor, obtenemos para la potencia del termopar la expresión

$$\alpha^2 (T_1 - T_2)^2 \frac{R}{(R+R_0)^2}.$$

La fuerza electromotriz de un termopar es una magnitud del orden de décimas de voltio. Si se desea obtener, por ejemplo, una tensión de 120 V, los termopares se conectan en serie (batería). Si se necesitan corrientes intensas, los termopares se conectan en paralelo.

La segunda aplicación interesante del efecto termoeléctrico, que también se ha hecho posible gracias al desarrollo de la técnica de los semiconductores, es su utilización como refrigerador.

El empleo del efecto termoeléctrico para medir temperaturas es bien conocido y no vamos a detenernos en él.

Un campo muy importante, y conocido desde hace mucho tiempo, de aplicación del efecto termoeléctrico es su utilización para descubrir grados insignificantes de calentamiento. Esta posibilidad se ha incrementado en la actualidad en virtud de que los semiconductores dan fuerzas electromotrices mayores. Con este fin se utilizan pares termoeléctricos conectados en serie que reciben el nombre de pilas termoeléctricas. Las juntas pares de estas pilas se enfrían, y las impares, se someten al calentamiento. Las pilas termoeléctricas miden potencias de hasta magnitudes tan pequeñas como varios ergios por segundo. Pero existen posibilidades de que este límite descienda hasta décimas de ergio por segundo. Esto se consigue por medio de los termopares de vacío, en los que las pérdidas de calor se reducen al mínimo.

APÊNDICE

Tabla de fórmulas de electrodinámica

	Sistema CGS	SI
Intensidad del campo eléctrico	$\underset{\sqrt{\text{din}}/\text{cm}}{E} = \dfrac{\overset{\text{din}}{F}}{\underset{\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm}}{q}}$	$\underset{\text{V/m}}{E} = \dfrac{\overset{\text{N}}{F}}{\underset{\text{C}}{q}}$
Densidad superficial de carga eléctrica	$\underset{\sqrt{\text{din}}/\text{cm}}{\sigma} = \dfrac{\overset{\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm}}{dq}}{\underset{\text{cm}^2}{dS}}$	$\underset{\text{C/m}^2}{\sigma} = \dfrac{\overset{\text{C}}{dq}}{\underset{\text{m}^2}{dS}}$
Desplazamiento eléctrico		$\underset{\text{C/m}^2}{\mathfrak{D}} = \underset{\text{C/m}^2}{\sigma} = \varepsilon \underset{\text{C/(V}\cdot\text{m)}}{\varepsilon_0} \underset{\text{V/m}}{E}$
Inducción eléctrica	$\underset{\sqrt{\text{din}}/\text{cm}}{D} = 4\pi \underset{\sqrt{\text{din}}/\text{cm}}{\sigma} = \varepsilon \times \underset{\sqrt{\text{din}}/\text{cm}}{E}$	
Flujo eléctrico	$\underset{\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm}}{N} = \int \underset{\sqrt{\text{din}}/\text{cm}}{D} \cos\alpha \underset{\text{cm}^2}{dS}$	$\underset{\text{C}}{\mathfrak{N}} = \int \underset{\text{C/m}^2}{\mathfrak{D}} \cos\alpha \underset{\text{m}^2}{dS}$
Teorema de Gauss — Ostrogradski	$\oint \underset{\sqrt{\text{din}}/\text{cm}}{D} \cos\alpha \underset{\text{cm}^2}{dS} = \sum_{\text{dentro de la superficie}} \underset{\text{C}}{4\pi q_i}$	$\oint \underset{\text{C/m}^2}{\mathfrak{D}} \cos\alpha \underset{\text{m}^2}{dS} = \sum_{\text{dentro de la superficie}} \underset{\text{C}}{q_i}$

Continuación

	Sistema CGS	SI
Potencial eléctrico	$\underset{\sqrt{\text{din}}}{\varphi} = \dfrac{\overset{\text{erg}}{U}}{\underset{\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm}}{q}}$	$\underset{\text{V}}{\varphi} = \dfrac{\overset{\text{J}}{U}}{\underset{\text{C}}{q}}$
Intensidad del campo eléctrico de una carga puntual	$\underset{\sqrt{\text{din}}\ \text{cm}}{E} = \dfrac{\overset{\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm}}{q}}{\varepsilon\ \underset{\text{cm}^2}{r^2}}$	$\underset{\text{V/m}}{E} = \dfrac{\overset{\text{C}}{q}}{4\pi\varepsilon\ \underset{\frac{\text{C}}{\text{V}\cdot\text{m}}}{\varepsilon_0}\ \underset{\text{m}^2}{r^2}}$
Potencial del campo eléctrico de una carga puntual	$\underset{\sqrt{\text{din}}}{\varphi} = \dfrac{\overset{\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm}}{q}}{\varepsilon\ \underset{\text{cm}}{r}}$	$\underset{\text{V}}{\varphi} = \dfrac{\overset{\text{C}}{q}}{4\pi\varepsilon\ \underset{\frac{\text{C}}{\text{V}\cdot\text{m}}}{\varepsilon_0}\ \underset{\text{m}}{r}}$
Capacidad eléctrica	$\underset{\text{cm}}{C} = \dfrac{\overset{\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm}}{q}}{\underset{\sqrt{\text{din}}}{\varphi_1-\varphi_2}}$	$\underset{\text{F}}{C} = \dfrac{\overset{\text{C}}{q}}{\underset{\text{V}}{\varphi_1-\varphi_2}}$
Energía del campo eléctrico de un condensador	$\underset{\text{erg}}{W_{el}} = \dfrac{\overset{\text{din}\cdot\text{cm}^2}{q^2}}{\underset{\text{cm}}{2C}}$	$\underset{\text{J}}{W_{el}} = \dfrac{\overset{\text{C}^2}{q^2}}{\underset{\text{F}}{2C}}$
Densidad de la energía de un campo eléctrico	$\underset{\text{erg}\cdot\text{cm}^{-3}}{w_{el}} = \dfrac{\varepsilon\ \overset{\text{din}\cdot\text{cm}^{-2}}{E^2}}{8\pi}$	$\underset{\text{J/m}^3}{w_{el}} = \dfrac{1}{2}\varepsilon\ \underset{\text{C}/(\text{V}\cdot\text{m})}{\varepsilon_0}\ \underset{\text{V}^2/\text{m}^2}{E^2}$
Fuerza de interacción entre dos planos cargados	$\underset{\text{din}}{F} = \dfrac{2\pi\ \overset{\text{din/cm}^2}{\sigma^2}}{\varepsilon}\ \underset{\text{cm}^2}{S}$	
Momento eléctrico dipolar	$\underset{\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm}^2}{p} = \underset{\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm}}{q}\ \underset{\text{cm}}{l}$	

Continuación

	Sistema CGS	SI
Vector polarización	$\underset{\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm}}{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \underset{\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm}}{E}$	
Momento magnético de una corriente cerrada	$\underset{\sqrt{\text{din}}\ \text{cm}^2}{M} = \underset{\text{cm/s}}{\frac{1}{c}} \underset{\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm/s}}{I} \underset{\text{cm}^2}{S}\, n$	$\underset{\text{A}\cdot\text{m}^2}{M} = \underset{\text{A}}{I} \underset{\text{m}^2}{S}\, n$
Momento de rotación que actúa sobre una espira con corriente en un campo magnético	$\underset{\text{din}\cdot\text{cm}}{N} = [\underset{\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm}^2}{M}, \underset{\text{Gs}}{B}]$	$\underset{\text{N}\cdot\text{m}}{N} = [\underset{\text{A}\cdot\text{m}^2}{M}\ \underset{\text{V}\cdot\text{s/m}^2}{B}]$
Energía potencial del momento magnético en un campo magnético	$\underset{\text{erg}}{U} = -\underset{\text{Gs}}{B}\ \underset{\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm}^2}{M}$	$\underset{\text{J}}{U} = -\underset{\text{V}\cdot\text{s/m}^2}{B}\ \underset{\text{A}\cdot\text{m}^2}{M}$
Ley de Ampere	$\underset{\text{din}}{dF} = \underset{\text{cm/s}}{\frac{\overset{\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm/s}}{I}}{c}} [\underset{\text{cm}}{dl}, \underset{\text{Gs}}{B}]$	$\underset{\text{H}}{dF} = \underset{\text{A}}{I} [\underset{\text{m}}{dl}, \underset{\text{V}\cdot\text{s/m}^2}{B}]$
Flujo magnético	$\underset{\text{Mx}}{\Phi} = \int \underset{\text{Gs}}{B} \cos\alpha\ \underset{\text{cm}^2}{dS}$	$\underset{\text{V}\cdot\text{s}}{\Phi} = \int \underset{\text{V}\cdot\text{s/m}^2}{B} \cos\alpha\ \underset{\text{m}^2}{dS}$
Masa magnética	$\underset{\text{Mx}}{m} = \frac{1}{4\pi} \underset{\text{Mx}}{\Phi}$	$\underset{\text{V}\cdot\text{s}}{m} = \underset{\text{V}\cdot\text{s}}{\Phi}$

Continuación

	Sistema CGS	SI
Intensidad del campo magnéti o creado por un elemento de corriente	$dH = \frac{I \left[dl, \frac{r}{r}\right]}{c \; r^2}$ dH: Oe; I: $\sqrt{\text{din}}\cdot$cm/s; dl: cm; c: cm/s; r^2: cm²	$dH = \frac{I}{4\pi r^2}\left[dl, \frac{r}{r}\right]$ dH: A/m; I: A; dl: m; r^2: m²
Relación entre B y H	$B = \mu H$ B: Gs; H: Oe	$B = \mu \; \mu_0 \; H$ B: V·s/m²; μ_0: Ω·s/m; H: A/m (1Ω·s = 1H)
Fuerza de interacción de dos masas magnéticas (ley de Coulomb)	$F = \frac{m_1 \; m_2}{\mu r^2}$ F: din; m_1, m_2: Mx; r^2: cm²	$F = \frac{m_1 \; m_2}{4\pi\mu \; \mu_0 \; r^2}$ F: N; m_1, m_2: V·s; μ_0: H/m; r^2: m²
Fuerza de interacción de dos corrientes paralelas	$dF = \frac{\mu I_1 \; I_2 \quad dl_1 \; dl_2}{c^2 \quad r^2}$ dF: din; I_1, I_2: $\sqrt{\text{din}}\cdot$cm/s; dl_1, dl_2: cm; c^2: cm²/s²; r^2: cm²	$dF = \mu_0 \mu \frac{I_1 \; I_2 \; dl_1 \; dl_2}{4\pi r^2}$ dF: N; μ_0: H/m; I_1, I_2: A; dl_1, dl_2: m; r^2: m²
Ley de la intensidad magnética (ley de la corriente total)	$\oint H \; dl = \frac{4\pi}{c} \sum I$ H: Oe; dl: cm; c: cm/s; I: $\sqrt{\text{din}}\cdot$cm/s	$\oint H \; dl = \sum I$ H: A/m; dl: m; I: A
Intensidad del campo magnético de un solenoide	$H = \frac{4\pi}{c} \frac{n}{L} I$ H: Oe; c: cm/s; L: cm; I: $\sqrt{\text{din}}\cdot$cm/s	$H = \frac{n}{L} I$ H: A/m; L: m; I: A

Continuación

	Sistema CGS	SI
F. e. m. de inducción electromagnética	$\underset{\sqrt{\text{din}}}{\mathcal{E}^{\text{ind}}} = -\underset{\text{cm/s}}{\frac{1}{c}}\;\overset{\text{Mx}}{\underset{\text{s}}{\frac{d\Phi}{dt}}}$	$\underset{\text{V}}{\mathcal{E}^{\text{ind}}} = -\overset{\text{V·s}}{\underset{\text{s}}{\frac{\partial\Phi}{dt}}}$
Susceptibilidad magnética	$\varkappa' = \frac{\mu - 1}{4\pi}$	$\varkappa = \mu - 1$
Vector magnetización	$\underset{\sqrt{\text{din}}/\text{cm}}{J} = \varkappa' \underset{\sqrt{\text{din}}/\text{cm}}{H}$	$\underset{\text{V·s/m}^2}{J} = \underset{\text{H/m}}{\mu_0}\varkappa \underset{\text{A/m}}{H}$
Ecuaciones de Maxwell	$\oint \overset{\sqrt{\text{din}}/\text{cm}}{E}\;\overset{\text{cm}}{dl} = -\underset{\text{cm/s}}{\frac{1}{c}}\;\overset{\text{Mx}}{\underset{\text{s}}{\frac{\partial\Phi}{dt}}}$ $\oint \underset{\sqrt{\text{din}}/\text{cm}}{H}\;\underset{\text{cm}}{dl} = \underset{\text{cm/s}}{\frac{4\pi}{c}}\left(\underset{\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm/s}}{I} + \overset{\sqrt{\text{din}}\text{-cm}}{\underset{\text{s}}{\frac{dN}{dt}}}\right)$	$\oint \underset{\text{V/m}}{E}\;\underset{\text{m}}{dl} = -\overset{\text{V·s}}{\underset{\text{s}}{\frac{d\Phi}{dt}}}$ $\oint \underset{\text{A/m}}{H}\;\underset{\text{m}}{dl} = \underset{\text{A}}{I} + \overset{\text{C}}{\underset{\text{s}}{\frac{dN}{dt}}}$
Densidad de la corriente	$\underset{\sqrt{\text{din}}/\text{s}\cdot\text{cm}}{j} = \frac{\overset{\sqrt{\text{din}}\ \text{cm/s}}{I}}{\underset{\text{cm}^2}{S}}$	$\underset{\text{A/m}^2}{j} = \frac{\overset{\text{A}}{I}}{\underset{\text{m}^2}{S}}$
Ley de Ohm	$\underset{\text{A}\sqrt{\text{din}}\cdot\text{cm/s}}{I} = \frac{\overset{\sqrt{\text{din}}}{U}}{\underset{\text{s/cm}}{R}}$ $\underset{\sqrt{\text{din}}/\text{s}\cdot\text{cm}}{j} = \underset{\text{s}^{-1}}{\lambda}\;\underset{\sqrt{\text{din}}/\text{cm}}{E}$	$\underset{\text{A}}{I} = \frac{\overset{\text{V}}{U}}{\underset{\Omega}{R}}$ $\underset{\text{A/m}^2}{j} = \underset{\Omega^{-1}\text{m}^{-1}}{\lambda}\;\underset{\text{V/m}}{E}$

Continuación

	Sistema CGS	SI
Densidad de la energía de un campo magnético	$\frac{w}{\text{erg/cm}^3} = \frac{\mu H^2}{8\pi}$ (din/cm²)	$\frac{w}{J/m^3} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$ (H/m A²/m²)
Vector de Poynting	$\frac{K}{\text{erg/cm}^2\cdot s} = \frac{c}{4\pi} \times \left[\frac{E}{\sqrt{\text{din}}/\text{cm}} \frac{H}{\sqrt{\text{din}}/\text{cm}} \right]$	$\frac{K}{J/(m^2\cdot s)} = \left[\frac{E}{V/m} \frac{H}{A/m} \right]$

INDICE ALFABÉTICO DE MATERIAS

